В. П. Танана, С. И. Бельков, Конечноразностная аппроксимация метода регуляризации А.Н. Тихонова n-го порядка,
Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ., 2015, том 4, выпуск 1, 86–98

https://www.mathnet.ru/vyurv16

УДК 517.948 DOI: 10.14529/cmse150108

КОНЕЧНОРАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА n-го ПОРЯДКА

В.П. Танана, С.И. Бельков

Статья является естественным продолжением работы А.Н. Тихонова, в которой впервые была сформулирована идея конечномерного приближения регуляризующей задачи, однако условия, накладываемые на операторы являются трудно проверяемыми. В настоящей работе предложено другое условие, которое легче использовать на практике и с его помощью произведено доказательство теоремы о сходимости конечноразностных аппроксимаций метода регуляризации Тихонова к точному решению регуляризованной задачи. Применение предложенного метода конечноразностных приближений продемонстрировано на примере интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, конечно-разностная аппроксимация, некорректная задача, интегральное уравнение.

Введение

Многие задачи, имеющие прикладное значение (такие как геологоразведка или определение температур внутри ракетных двигателей), являются некорректно поставленными и требуют использования аппарата регуляризации для их решения. Настоящая статья является естественным продолжением работы [1]. Дело в том, что в [1] для доказательства сходимости конечномерных аппроксимация использовано условие слабой замкнутости пары $A,\{A_k\}$, где A — оператор исходной задачи, а A_k — операторы аппроксимирующих задач. Это условие, впервые предложенное в [2] и являющееся наиболее общим при исследовании вопросов сходимости конечномерных аппроксимаций, трудно проверяемо. Поэтому в настоящей работе предложено другое условие и с его помощью доказана теорема о сходимости конечноразностных аппроксимация метода регуляризации Тихонова n-го порядка, которая была сформулирована в работе [3], но не доказана.

Статья состоит из трех частей. В первой части вводятся ограничения на рассматриваемые объекты, приводится формулировка решаемой задачи и ее регуляризация сведением к вариационной задаче. Во второй части работы производится построение последовательных конечномерных приближений регуляризованной задачи и доказательство соответствующих теорем сходимости. Замена бесконечномерных регуляриязующих вариационных задач конечномерными аналогами позволяет построить последовательность численных приближенных решений, которая сходится к регуляризованному решению. В третьей части рассматривается пример построения конечноразностной аппроксимации метода регуляризации А.Н. Тихонова n-го порядка для оператора Фредгольма.

1. Постановка задачи и метод регуляризации

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, всюду плотной в H и областью значения $R(A)$ из H, T — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(T)$, всюду плотной в H и множеством значений $R(T)$ из H.

Предположим, что существует число $c > 0$ такое, что для любого $u \in D(T)$ имеет место соотношение

$$\|Tu\| \geq c\|u\|. \tag{1}$$

Лемма 1. Пусть n — некоторое натуральное число, большее единицы. Тогда оператор T^n будет замкнут.

Доказательство. Предположим, что $\{u_k\} \subset D(T)$

$$u_k \to \hat{u} \tag{2}$$

и

$$T^n u_k \to \overline{f}_n. \tag{3}$$

Тогда из условий (1), (3) следует, что $T^{n-1}u_k \to \overline{f}_{n-1}$.

Продолжая рассуждения аналогичным образом, приходим к тому, что

$$Tu_k \to \overline{f}_1 \tag{4}$$

Так как оператор T замкнут, то из соотношений (2) и (4) следует, что $\hat{u} \in D(T)$ и $\overline{f}_1 = T\hat{u}$. Продолжая этот процесс, окончательно получим, что $\hat{u} \in D(T^n)$ и $\overline{f}_n = T^n\hat{u}$. Тем самым лемма доказана.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \quad u \in D(A), \quad f \in H. \tag{5}$$

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (5) и $u_0 \in D(T^n)$, но вместо f_0 нам известны $f_\delta \in H$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$.

Требуется по исходной информации (f_δ, δ) найти приближенное решение u_δ, сходящееся к точному. Метод регуляризации (см. [3]) поставленной задачи заключается в сведении ее к вариационной

$$\inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|T^n u\|^2 : \quad u \in D(A) \cap D(T^n)\right\}, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$.

Вариационная задача (6) разрешима единственным образом (см. [4], стр. 73). Обозначим решение вариационной задачи (6) через u_δ^α и будем называть его приближенным решением уравнения (1), полученным методом регуляризации, или регуляризованным решением.

2. Конечномерная аппроксимация метода регуляризации

Пусть $\{H_k\}$ — возрастающая последовательность конечномерных подпространств пространства H, A_k и T_k — линейные ограниченные операторы, отображающие пространство H_k в H и H_k соответственно.

Конечномерная аппроксимация метода регуляризации заключается в замене вариационной задачи (6) ее конечномерным аналогом

$$\inf\left\{\|A_k u - f_\delta^k\|^2 + \alpha\|T_k^n u\|^2 : \quad u \in H_k\right\}. \tag{7}$$

Аппроксимирующая задача (7) так же, как и (6), разрешима единственным образом. Решение этой задачи в дальнейшем будем обозначать через $u_\delta^\alpha(k)$. Главным вопросом, возникающим при этом, является вопрос о сходимости конечномерных аппроксимаций $u_\delta^\alpha(k)$ к регуляризованному решению u_δ^α при $k \to \infty$.

Для ответа на поставленный вопрос введем ряд вспомогательных определений.

Пусть B, S, B_k, S_k — линейные замкнутые операторы с областями определения $D(B), D(S), D(B_k), D(S_k)$, всюду плотными в H и областями значений из H.

Определение 1. Последовательности операторов $\{B_k\}$ и $\{S_k\}$ будем называть B и S полными одновременно, если $\overline{D(B) \cap D(S)} = H$ и для любого $u \in D(B) \cap D(S)$ найдется последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in D(B_k) \cap D(S_k)$ такая, что $u_k \to u, B_k u_k \to Bu$ и $S_k u_k \to Su$ (см. [4], стр. 113).

Определение 2. Будем говорить, что пара $\{B_k\},\{S_k\}$ удовлетворяет условию дополнительности, если существует $\gamma \neq 0$ такое, что $\forall u_k \in D(B_k) \cap D(S_k)$ $\quad \|B_k u_k\|^2 + \|S_k u_k\|^2 \geq \gamma^2 \|u_k\|^2$.

Определение 3. Пару $B,\{B_k\}$ будем называть слабо замкнутой, если из того, что $u_k \xrightarrow{w} \hat{u}$, а $B_k u_k \xrightarrow{w} \overline{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(B)$ и $\overline{f} = B\hat{u}$ (см. [4], стр. 113).

Теорема 1. Пусть $f_\delta^k \to f_\delta$, а пара $\{A_k\},\{T_k^n\}$ удовлетворяет условию дополнительности. Тогда, если последовательности $\{A_k\}$ и $\{T_k^n\}$ являются A и T^n полными одновременно, а последовательности $\{A_k'\}$ и $\left\{\left(T_k^n\right)'\right\}$ — A' и $\left(T^n\right)'$ полными одновременно, то имеет место сходимость конечномерных аппроксимаций $u_\delta^\alpha(k)$ к регуляризованному решению u_δ^α при $k \to \infty$.

Доказательство. См. [4], стр. 114.

Обозначим через B' оператор, сопряженный с B, а через B_k' оператор, сопряженный с B_k, через G обозначим множество такое, что $G \subset D(B')$ и всюду плотно в $D(B')$ относительно B'-нормы, где

$$\|g\|_{B'}^2 = \|g\|_H^2 + \|B'g\|_H^2 \tag{8}$$

Лемма 2. Если для любого k имеет место $G \subset D(B_k')$ и для любого $g \in G$ выполнено $B_k' g \to B'g$, то пара $B,\{B_k\}$ слабо замкнута.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\{u_k\} \subset H$ такая, что для любого k имеет место $u_k \in D(B_k)$ и

$$u_k \xrightarrow{w} \hat{u} \tag{9}$$

и

$$B_k u_k \xrightarrow{w} \overline{f} \tag{10}$$

Тогда для любого $g \in G$ справедливо соотношение

$$(g, B_k u_k) \to (g, \overline{f}) \tag{11}$$

или

$$\left(B'_k g, u_k\right) \to \left(B' g, \hat{u}\right) = \left(g, B\hat{u}\right) \tag{12}$$

Из соотношений (11) и (12) следует, что для любого $g \in G$

$$\left(g, \overline{f}\right) = \left(g, B\hat{u}\right) \tag{13}$$

Так как множество G всюду плотно в H, то из (13) следует, что $\hat{u} \in D(B)$ и $B\hat{u} = \overline{f}$.

Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. Пусть для любого k область значений $R(B_k)$ оператора B_k содержится в его области определения $D(B_k)$. Тогда, если пара $B, \{B_k\}$ слабо замкнута и существует $\gamma \neq 0$ такое, что для любых k и $u \in D(B_k)$ выполняется $\|B_k u\|^2 \geq \gamma^2 \|u\|^2$, то для любого натурального n пара $B^n, \{B_k^n\}$ слабо замкнута.

Доказательство. Будем доказывать лемму по индукции.

При $n = 1$ справедливость леммы следует из ее предположений.

Допустим, что лемма справедлива для всех n от 1 до $m-1$ и докажем справедливость ее утверждений при $n = m$.

Пусть дана последовательность $\{u_k\}$ такая, что для любого k $u_k \in D\left(B_k^m\right)$,

$$u_k \xrightarrow{w} \hat{u} \tag{14}$$

и

$$B_k^m u_k \xrightarrow{w} \overline{f}. \tag{15}$$

Тогда из условий леммы и соотношения (15) следует ограниченность последовательности $\left\{B_k^{m-1} u_k\right\}$, а, следовательно, и ее слабая компактность, то есть без ограничения общности можем считать, что

$$B_{k_l}^{m-1} u_{k_l} \xrightarrow{w} \hat{\varphi}. \tag{16}$$

Из предположения индукции, (14) и (16) следует, что $\hat{u} \in D\left(B^{m-1}\right)$ и

$$B^{m-1}\hat{u} = \hat{\varphi}, \tag{17}$$

а из предположений леммы, (15) и (16) следует, что $\hat{\varphi} \in D(B)$ и

$$\overline{f} = B\hat{\varphi}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует утверждение леммы, то есть, что $\hat{u} \in D\left(B^m\right)$ и $\overline{f} = B^m \hat{u}$.

Тем самым лемма доказана.

Пусть $G \subset D(A') \cap D(T')$ и при этом всюду плотно в $D(A')$ и $D(T')$ относительно A'-нормы и T'-нормы соответственно. Тогда справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть $f_\delta^k \to f_\delta$, а последовательности $\{A_k\}$ и $\left\{T_k^n\right\}$ являются A и T^n полными одновременно. Тогда если для любого $g \in G$ выполнено $A'_k g \to A' g$ и $T'_k g \to T' g$, то имеет место сходимость конечноразностных аппроксимаций $u_\delta^\alpha(k)$ к регуляризованному решению u_δ^α при $k \to \infty$.

Доказательство. Эта теорема следует из теоремы 1 и лемм 1, 2, 3.

3. Конечноразностная аппроксимация метода регуляризации Тихонова n-го порядка при решении интегрального уравнения

Пусть $H = L_2[0,1]$, а

$$Au = \int_0^1 K(s,t)\,u(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1, \tag{19}$$

где $K \in C[0,1;0,1]$, $u \in L_2[0,1]$, $Au \in L_2[0,1]$.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0,1]$ на 2^k равных частей точками $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{2^k} = 1$, где для любого i, $i = 1,2,\ldots,2^k$ $s_i - s_{i-1} = \dfrac{1}{2^k}$.

Обозначим через Δ_i полуинтервал деления $\Delta_i = [s_{i-1}, s_i)$, а через U_k подпространство $L_2[0,1]$, состоящее из кусочно-постоянных функций, то есть

$$U_k = \left\{u(s) : u(s) = u_i,\ s \in \Delta_i,\ i = 1,2,\ldots,2^k\right\}. \tag{20}$$

Пусть P_k оператор метрического проектирования пространства $L_2[0,1]$ на U_k. Оператор P_k самосопряжен, то есть

$$P_k' = P_k, \tag{21}$$

где P_k' — оператор, сопряженный к P_k, и для любого $u \in L_2[0,1]$

$$P_k u \to u \ \text{при}\ k \to \infty. \tag{22}$$

Следуя [4], стр. 119

$$A_k u = \int_0^1 \overline{K_k}(s,t)\,u(s)\,ds = \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} K_{ij} u_i, \tag{23}$$

где $u \in U_k$, определенному (20) , а $\overline{K_k}(s,t) = K\left(\dfrac{i}{2^k};\dfrac{j}{2^k}\right)$ при $s \in \Delta_i$ и $t \in \Delta_j$; $K_{ij} = K\left(\dfrac{i}{2^k};\dfrac{j}{2^k}\right)$.

Если рассмотреть расширение $\overline{A_k}$ оператора A_k с U_k на все пространство $L_2[0,1]$, то следуя [4]

$$\left\|\overline{A_k} - A\right\| \to 0 \ \text{при}\ k \to \infty. \tag{24}$$

Пусть оператор T определен формулой

$$Tu(t) = \frac{d}{dt}\left[u(t)\right], \tag{25}$$

где $D(T) = \left\{u(t) : u(t),\ u'(t) \in L_2[0,1],\ u(0) = 0\right\}$.

Оператор T — линейный замкнутый с областью определения $D(T)$, всюду плотной в $L_2[0,1]$.

Оператор T', сопряженный T, будет иметь вид

$$T'g(t) = -\frac{d}{dt}\left[g(t)\right], \tag{26}$$

где $D(T') = \left\{g(t) : g(t),\, g'(t) \in L_2[0,1],\, g(1) = 0\right\}$.

Кроме того, легко проверить, что для любого $u \in D(T)$ оператор T удовлетворяет соотношению

$$\|Tu\| \ge \|u\|. \tag{27}$$

На пространстве U_k, определенном формулой (20), определим оператор T_k следующим образом

$$T_k u(t) = \begin{cases} 0, & t \in \Delta_1 \\ \dfrac{u(t) - u\left(t - 2^{-k}\right)}{2^k}, & t \notin \Delta_1 \end{cases}, \tag{28}$$

где $D(T_k) = \left\{u(t) : u(t) \in U_k,\, u(t) = 0,\, t \in [0,1]\right\}$.

Из (28) следует, что $D(T_k)$ является подпространством U_k, следовательно, и $L_2[0,1]$, кроме того оператор T_k непрерывен на $D(T_k)$ и область значений $R(T_k)$ оператора T_k содержится в $D(T_k)$, а из соотношения (28) легко следует, что для любого $u \in D(T_k)$

$$\|T_k u\| \ge \|u\|. \tag{29}$$

Для любого k сопряженный оператор T_k' будет иметь вид

$$T_k' = \overline{T_k} P_k, \tag{30}$$

где P_k оператор метрического проектирования $L_2[0,1]$ на U_k, а $\overline{T_k}$ определен формулой

$$\overline{T_k} g(t) = \begin{cases} 0, & t \in \Delta_{2^k} \\ \dfrac{g(t) - g\left(t + 2^{-k}\right)}{2^k}, & t \notin \Delta_{2^k} \end{cases}, \tag{31}$$

где $g \in U_k$.

В качестве множества G, использованного в лемме 2, возьмем следующее множество:

$$\begin{aligned} G = \{&g(t) : g(t) \in C[0,1],\, g(t) = a_i t + b_i,\, t \in \Delta_i, \\ &g(t) = 0,\, t \in \Delta_1 \cup \Delta_{2^k},\, i = 1, 2, \ldots, 2^k,\, k = 1, 2, \ldots\} \end{aligned}, \tag{32}$$

Тогда множество G содержится в области определения $D(T')$ оператора T'.

Определение 4. Определим срезающую функцию $\xi(t)$:

$$\xi(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[\frac{7}{4}\delta;1-\frac{7}{4}\delta\right],\\ \frac{2}{\delta}\left(t-\frac{5}{4}\delta\right), & t\in\left[\frac{5}{4}\delta;\frac{7}{4}\delta\right],\\ -\frac{2}{\delta}\left(t-1+\frac{5}{4}\delta\right), & t\in\left[1-\frac{7}{4}\delta;1-\frac{5}{4}\delta\right],\\ 0, & t\in[0;1]\setminus\left[\frac{5}{4}\delta;1-\frac{5}{4}\delta\right].\end{cases}$$

Ее обобщенная производная обладает свойством (см. [5], стр. 119):

$$\left|\xi_h'(t)\right|=\left|(\xi_h)'(t)\right|=\left|\int\limits_{|t-v|\le h}\xi'(v)\,dv\right|\le\frac{2}{\delta}\quad\forall t\in[0;1],\quad\forall h\in\left[0;\frac{\delta}{4}\right], \tag{33}$$

Лемма 4. Множество G содержится в области определения $D(T')$ оператора T', определенного (26) и всюду плотно в $D(T')$ относительно T'-нормы.

Доказательство. Из (26) и (32) следует, что множество $G\subset D(T')$. Докажем, что оно всюду плотно в нем относительно T'-нормы.

Рассмотрим множество $D=\left\{h(t):h(t)\in C^\infty[0;1],\,h(0)=h(1)=0\right\}$.

Будем доказывать, что D всюду плотно в $D(T')$.

Возьмем произвольную функцию $h(t)\in H_0^1(0;1)$ и срезающую функцию $\xi_\delta(t)$ со свойством

$$\left|\xi_\delta'(t)\right|\le\frac{c}{\varepsilon}\quad\forall t\in[0;1].$$

Согласно теореме о дифференцировании обобщенной производной (см. [5], стр. 118) функция $h_\delta(t)=h(t)\xi_\delta(t)$ имеет обобщенную производную $h_\delta'(t)=h'(t)\xi_\delta(t)+h(t)\xi_\delta'(t)$. Кроме того, ясно, что $h_\delta(t)$ финитна на $[0;1]$ и $h_\delta(t)\in H_0^1(0;1)$. Убедимся, что $\left\|h_\delta(t)-h(t)\right\|_{H^1(0;1)}\to 0$ при $\delta\to 0$. Зададим произвольное число $\varepsilon>0$. Тогда $\exists\delta_0>0$: $\forall\delta,\ 0<\delta<\delta_0$,

$$\left\|h_\delta(t)-h(t)\right\|_{L^2(0;1)}=\int\limits_0^1\left|h(t)\right|^2\left(1-\xi_\delta(t)\right)^2dt\le$$

$$\le\int\limits_0^{2\delta}\left|h(t)\right|^2dt+\int\limits_{1-2\delta}^1\left|h(t)\right|^2dt<\varepsilon^2$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Далее, из формулы Ньютона-Лейбница с учетом условия $h(0)=h(1)=0$ имеем

$$h(t)=\int\limits_0^t h'(\xi)\,d\xi=\int\limits_{1-t}^1 h'(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда помощью неравенства Коши–Буняковского получим:

$$\left|h(t)\right|^2\le t\int\limits_0^t\left|h'(\xi)\right|^2d\xi,$$

$$\left|h(t)\right|^2\le(1-t)\int\limits_t^1\left|h'(\xi)\right|^2d\xi\quad\forall t\in[0;1].$$

С учетом свойств выбранной срезающей функции, формулы для $h_\delta{}'(t)$, абсолютной непрерывности интеграла Лебега и последних неравенств будем иметь

$$\|h_\delta(t)-h(t)\|_{L^2(0;1)} = \left(\int_0^1 \left|h'(t)-h'(t)\xi_\delta(t)-h(t)\xi_\delta{}'(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 |h'(t)|^2 \left(1-\xi_\delta(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |h(t)|^2 \left|\xi_\delta{}'(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_0^{2\delta} |h'(t)|^2 \left(1-\xi_\delta(t)\right)^2 dt + \int_{1-2\delta}^1 |h'(t)|^2 \left(1-\xi_\delta(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int_\delta^{2\delta} t\left(\int_0^t |h'(\xi)|^2 d\xi\right)\frac{c^2}{\delta^2} dt + \int_{1-2\delta}^{1-\delta} (1-t)\left(\int_t^1 |h'(\xi)|^2 d\xi\right)\frac{c^2}{\delta^2} dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \varepsilon + c\left(2\int_0^{2\delta} |h'(\xi)|^2 d\xi + 2\int_{1-2\delta}^1 |h'(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < 2\varepsilon$$

$$\forall \delta,\ 0<\delta<\delta_0.$$

Таким образом, получаем оценку $\|h_\delta(t)-h(t)\|_{H^1(0;1)} < 3\varepsilon \quad \forall\delta,\ 0<\delta<\delta_0$.

Зафиксируем одно из таких значений δ и возьмем среднюю функцию $(h_\delta)_h(t)$. Тогда при $h \to 0$ в силу свойств средних функций (см. [5], стр. 113, 117) получим

$$\left\|(h_\delta)_h(t)-h_\delta(t)\right\|_{L^2(0;1)} \to 0, \quad \left\|(h_\delta)'_h(t)-h'_\delta(t)\right\|_{L^2(0;1)} = \left\|(h_\delta)'_h(t)-h'_\delta(t)\right\|_{L^2\left(\frac{\delta}{2};1-\frac{\delta}{2}\right)} \to 0,$$

поэтому

$$\left\|(h_\delta)_h(t)-h_\delta(t)\right\|_{H^1(0;1)} < \varepsilon \quad \forall h, \quad 0<h<h_0<\delta.$$

Таким образом, $\|h_\delta(t)-h(t)\|_{H^1(0;1)} \to 0$.

Т.к. G всюду плотно в D, т.е. $\overline{G}=D$, а D всюду плотно в $D(T')$, т.е. $\overline{D}=D(T')$, то $\overline{G}=D(T')$ и тем самым лемма доказана.

Лемма 5. Пусть пара $T',\{T'_k\}$ определена формулами (26), (30) и (31), а множество G — формулой (32). Тогда для любого $g \in G$ имеет место соотношение

$$T'_k g \to T'g.$$

Доказательство. Пусть $g_0 \in G$. Тогда найдется номер k_0 такой, что

$$g_0(t) = a_i^0 t + b_i^0,\ t\in\Delta_i,\ i=1,2,\ldots,2^{k_0}. \tag{34}$$

Из (34) следует, что

$$T'g_0(t) = -a_i^0,\ t\in\Delta_i,\ i=1,2,\ldots,2^{k_0}. \tag{35}$$

Теперь возьмем произвольный интервал $\Delta_{i_0} = \left[t_{i_0-1}, t_{i_0}\right)$ и разобьем его на 2^m равных частей. Обозначим точки деления при этом следующим образом

$$t_{i_0-1} = \overline{t_0} < \overline{t_1} < \overline{t_2} < \ldots < \overline{t_{2^m-1}} < \overline{t_{2^m}} = t_{i_0},$$

а полуинтервалы через $\Delta_{i_0 j}$, где $\Delta_{i_0 j} = \left[\overline{t_{j-1}}, \overline{t_j}\right)$, $j=1,2,\ldots,2^m$ и $\overline{t_j}-\overline{t_{j-1}} = 2^{-(k_0+m)}$.

Из (34) следует, что

$$P_{k_0+m}g_0(t) = \left\{ a_{i_0}^0 \cdot \frac{\overline{t_j} + \overline{t_{j-1}}}{2} + b_{i_0}^0 : t \in \Delta_{i_0 j} \right\}. \tag{36}$$

Из (30), (31) и (36) следует, что

$$T'_{k_0+m}g_0(t) = -a_{i_0}^0,\ t \in \Delta_i \setminus \left(a_{i_0 1} \cup a_{i_0 2^m} \right). \tag{37}$$

Пусть $\overline{a_0} = \max_i \left\{ \left| a_i^0 \right| : i = 1, 2, \ldots, 2^{k_0} \right\}$, тогда

$$\left\| T'g_0 - T'_{k_0+m}g_0 \right\| \le \frac{\overline{a_0}^2}{2^{m-5}}. \tag{38}$$

Из соотношений (38) следует, что $T'_{k_0+m}g_0 \to T'g_0$ при $m \to \infty$.

Лемма 6. Пусть пара $T, \{T_k\}$ определена формулами (25) и (28), а n — произвольное натуральное число. Тогда последовательность операторов $\{T_k^n\}$ является T^n-полной.

Доказательство. Будем доказывать лемму по индукции.

Пусть $n = 1$ и u_0 — произвольный элемент из $D(T)$. Тогда, обозначив элемент Tu_0 через v_0^1, построим последовательность $\{v_k^1\}$ следующим образом:

$$v_k^1 = P_k v_0^1,$$

где P_k — оператор метрического проектирования пространства $L_2[0,1]$ на U_k, $v_k^1 \in U_k$, а подпространство U_k определено формулой (20).

Из (22) следует, что $v_k^1 \to v_0^1$.

Тогда по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ можно указать номер k_0 такой, что $\left\| v_{k_0}^1 - v_0^1 \right\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Теперь выберем число m_0 такое, что функция $\overline{v}_{k_0}^1(t)$, определенная следующим образом

$$\overline{v}_{k_0}^1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \dfrac{1}{2^{k_0+m_0}} \\ v_{k_0}^1(t), & t \ge \dfrac{1}{2^{k_0+m_0}} \end{cases}. \tag{39}$$

будет удовлетворять соотношению

$$\left\| \overline{v}_{k_0}^1 - v_0^1 \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{40}$$

Из определения $\overline{v}_{k_0}^1$ следует $\overline{v}_{k_0}^1 \in U_{k_0+m_0}$.

Обозначим через $\overline{u}_{k_0}^1$ элемент, равный $T^{-1}\overline{v}_{k_0}^1$, который будет непрерывен и кусочно линеен, то есть

$$\overline{u}_{k_0}^1 = \left\{ a_i t + b_i : t \in \Delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, 2^{k_0+m_0} \right\}. \tag{41}$$

Из (27) и (40) будет следовать, что

$$\left\| \overline{u}_{k_0}^1 - u_0 \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{42}$$

Теперь каждый из полуинтервалов $\Delta_i = \left[t_{i-1}, t_i\right)$ разобьем на 2^p равных частей, где p — некоторое натуральное число. При этом точки деления обозначим следующим образом:

$$t_{i-1} = \overline{t_0} < \overline{t_1} < \overline{t_2} < \ldots < \overline{t_{2^p}} = t_i ,$$

а соответствующие интервалы через Δ_{ij}, где $\Delta_{ij} = \Delta_i = \left[\overline{t_{j-1}}, \overline{t_j}\right)$, $j = 1,2,\ldots,2^p$ и $\overline{t_j} - \overline{t_{j-1}} = \dfrac{1}{2^{k_0+m_0+p}}$.

По функции $\overline{u}_{k_0}(t)$, определенной формулой (41), построим функцию $\overline{u}_{k_0+m_0+p}(t)$ следующим образом

$$\overline{u}_{k_0+m_0+p}(t) = \left\{\overline{u}_{k_0+m_0+p}(t) = \overline{u}^1_{k_0}\left(\overline{t_j}\right) : t \in \Delta_{ij},\, i = 1,2,\ldots,2^{k_0+m_0},\, j = 1,2,\ldots,2^p\right\}. \tag{43}$$

Из определения оператора T_k (см. (28)) и (39), (43) следует, что $\overline{u}_{k_0+m_0+p}(t) \in U_{k_0+m_0+p} \cap D\left(T_{k_0+m_0+p}\right)$ и

$$T_{k_0+m_0+p}\overline{u}_{k_0+m_0+p} = \overline{v}^1_{k_0}. \tag{44}$$

Так как функция $\overline{u}^1_{k_0}(t)$, определенная формулой (41), непрерывна, то из (43) следует, что

$$\overline{u}_{k_0+m_0+p} \to \overline{u}^1_{k_0} \text{ при } p \to \infty .$$

Таким образом, найдется номер p_0 такой, что для любого $p \ge p_0$

$$\left\|\overline{u}_{k_0+m_0+p} - \overline{u}^1_{k_0}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым для $n = 1$ лемма доказана.

Предположим, что лемма справедлива для $n \le l-1$ такой, что и докажем ее для $n = l$.

Из предположения индукции следует, что для произвольного элемента $u_0 \in D\left(T^l\right)$ найдется последовательность $\{v_k\}$ такая, что для любого k $v_k \in D\left(T_k^{l-1}\right)$ и

$$v_k \to Tu_0 \tag{45}$$

и

$$T_k^{l-1}v_k \to T^l u_0 \tag{46}$$

Из (45) и (46) следует, что по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ найдется номер $\bar{k}_0$ такой, что при $k \ge \bar{k}_0$

$$\left\|v_{\bar{k}_0} - Tu_0\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{47}$$

и

$$\left\|T_k^{l-1}v_k - T^l u_0\right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{48}$$

Обозначим через $u_{\bar{k}_0}$ функцию, равную $T^{-1}v_{\bar{k}_0}$, которая будет непрерывной и кусочно-линейной, то есть

$$u_{\bar{k}_0}(t) = \left\{\overline{a}_i t + \overline{b}_i : t \in \Delta_i,\, i = 1,2,\ldots,2^{\bar{k}_0}\right\}. \tag{49}$$

Из (27) и (47) будет следовать, что

$$\hat{C}\left\|u_{\bar{k}_0} - u_0\right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{50}$$

Как и в начале доказательства каждый полуинтервал Δ_i разобьем на 2^p равных частей и вновь полученные полуинтервалы обозначим через Δ_{ij}, а затем в как в (42) определим кусочно-постоянную функцию

$$\bar{u}_{\bar{k}_0+p}(t) = \left\{\hat{u}_{\bar{k}_0+p}(t) = \bar{u}_{\bar{k}_0}\left(\bar{t}_j\right) : t \in \Delta_{ij},\ i = 1,2,\ldots,2^{k_0},\ j = 1,2,\ldots,2^p\right\}. \tag{51}$$

Из (28) и (51) будет следовать, что $\hat{u}_{\bar{k}_0+p}(t) \in D\left(T_{\bar{k}_0+p}\right)$ и

$$T_{\bar{k}_0+p}\hat{u}_{\bar{k}_0+p} = v_{\bar{k}_0+p}. \tag{52}$$

Так как функция $\bar{u}_{\bar{k}_0+p}(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то следую (51)

$$\hat{u}_{\bar{k}_0+p} \to \bar{u}_{\bar{k}_0} \text{ при } p \to \infty. \tag{53}$$

Из (53) следует, что найдется p_0 такой, что для любого $p \ge p_0$

$$\left\|\hat{u}_{\bar{k}_0+p} - \bar{u}_{\bar{k}_0}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{54}$$

Из (47), (48), (52) и (54) следует утверждение леммы.

Следуя (6) метод регуляризации n-го порядка приближенного решения интегрального уравнения первого рода заключается в сведении последнего к вариационной задаче

$$\inf\left\{\begin{array}{l}\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 K(s,t)u(s)\,ds - f_\delta(t)\right]^2 dt + \alpha\int\limits_0^1\left[\dfrac{d^n u(t)}{dt^n}\right]dt : \\ u,\ u^{(n)} \in L_2[0,1],\ u(0) = 0, u'(0) = 0,\ldots,u^{(n-1)}(0) = 0\end{array}\right\}. \tag{55}$$

Вариационная задача (55) разрешима единственным образом. Решение этой задачи обозначим через $u_\delta^\alpha(s)$.

Конечноразностная аппроксимация вариационной задачи (54) заключается в сведении последней к ее конечноразностному аналогу

$$\inf\left\{\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k}\left[\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k}K_{ij}u_i - f_\delta^j\right]^2 + \alpha\left\|T_k^n u\right\| : u \in D\left(T^n\right)\right\}, \tag{56}$$

где $P_k f_\delta(t) = \left\{f_\delta^j : t \in \Delta_j,\ i = 1,2,\ldots,2^k\right\}$, $u \in U_k$, $u(s) = \left\{u_i : s \in \Delta_i,\ i = 1,2,\ldots,2^k\right\}$.
Вариационная задача (56) имеет единственное решение u_δ^α такое, что $u_\delta^\alpha(k) \to u_\delta^\alpha$ при $k \to \infty$.

Заключение

В статье рассмотрен метод построения последовательности конечномерных задач, решения которых последовательно сходятся к регуляризованному решению исходной некорректно поставленной задачи. Конечная размерность построенных задач позволяет решать их при помощи компьютера. Существенным отличием от фундаментальной работы [1] является замена условий слабой замкнутости пары операторов исходной и аппроксимирующих задач на требование A и T^n одновременной полноты последовательностей $\{A_k\}$ и $\{T_k^n\}$, приближающих оператор исходной задачи и оператор стабилизатора соответственно. Выполнимость данных условий проверить значительно легче.

В дальнейшем полученные результаты могут быть применены при решении некорректных задач, возникающих в различных отраслях науки и техники.

Литература

1. Танана, В.П. Конечномерная аппроксимация метода регуляризации / В.П. Танана // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 6. — С. 65–69.
2. Васин, В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов / В.В. Васин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1979. — Т. 19, вып. 1, — С. 11–21.
3. Тихонов, А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. — Доклады АН СССР — 1963 — СТ.153, №1, С. 49–52.
4. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана — М.: Наука, 1981. — 158 с.
5. Осипов, Ю.С. Основы метода динамической регуляризации / Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов — Изд-во МГУ, 1999. — 237 с.

Танана Виталий Павлович, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), tananavp@susu.ac.ru.

Бельков Сергей Игоревич, ассистент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), sergey_belkov@mail.ru.

Поступила в редакцию 1 января 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computational Mathematics and Software Engineering"
2015, vol. 4, no. 1, pp. 86–98

DOI: 10.14529/cmse150108

THE FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION FOR THE TIKHONOV REGULARIZATION METHOD OF THE N-TH ORDER

V.P. Tanana, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)
`tananavp@susu.ac.ru`,
S.I. Belkov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)
`sergey_belkov@mail.ru`

This article is a natural extension of the work by A.N. Tikhonov, where the idea of a finite-dimensional approximation of the regularization problem was first formulated. However, the conditions, offered for operators, are difficult to verify. In the present work we offer other conditions, which are easier to use in practice, and use it to prove the theorem of convergence of the finite-dimensional approximation for the Tikhonov regularization method. Application of the described method is demonstrated by the example with the Fredholm equation of the first kind.

Keywords: inverse problem, regularization, finite difference approximation, ill-posed problem, integral equation.

References

1. Tanana V.P. Finite-dimensional approximation of the regularization method // Soviet Math. (Iz. VUZ.). 1986. Vol. 30, No. 7. P. 89–94.
2. Vasin V.V. .Discrete convergence and finite-dimensional approximation of regularizing algorithms // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1979. Vol. 19, No. 1. P. 8–19.
3. Tikhonov A.N. O regulyarizatsii nekorrektno postavlennih zadach [About regularization of ill-posed problems]. Doklad AN SSSR [Reports of Academy of Sciences USSR]. 1963. Vol. 153, No. 1. P. 49–52.
4. Tanana V.P. Metody resheniya operatornih uravneniy [Methods for solving the operator equations]. Moscow, «Science», 1981. 158 p.
5. Osipov Y.S., Vasiliev F.P., Potapov M.M. Osnovy metoda dinamicheskoj regulyarizatsii [Bases of the Dynamical Regularization Method]. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 1999. 237 p.

Received January 1, 2015.