

Е. А. БЕГОВАТОВ

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В данной работе находится асимптотика  $N(\lambda)$ -числа собственных значений, не превосходящих  $\lambda$ , операторной задачи Штурма — Лиувилля. Приводится пример, на котором проверяются налагаемые на операторные коэффициенты условия.

Рассмотрим гильбертово пространство  $H_1$  интегрируемых по Бохнеру функций  $f(x)$  со значениями из сепарабельных гильбертовых пространств  $H(x)$ . Скалярное произведение в  $H_1$  определяется обычным образом  $(f, g)_1 = \int (f(x), g(x)) dx$ . Пусть в  $H_1$  задан дифференциальный оператор

$$L_\mu \varphi = \left[ \frac{d^2}{dx^2} - \{Q(x) + \mu^2 I\} \right] \varphi, \quad (1)$$

определенный на множестве функций со значениями из  $D(x)$  ( $D$  — область определения оператора  $Q$ ) и имеющих сильно непрерывную вторую производную, принадлежащую  $H(x)$ . Будем предполагать, что выполняются следующие условия:  $\alpha_1$ ) Существует гильбертово пространство  $H$  и сильно непрерывное семейство ограниченных проекционных операторов  $P(x)$ , такое, что  $H(x) = P(x)H$  и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} v = 0; \quad v \in D(x). \quad (2)$$

$\alpha_2$ ) Можно определить семейство обратимых, ограниченных операторов  $S(x, y)$ , отображающих  $H(y)$  в  $H(x)$ , при этом  $D(y)$  переходит в  $D(x)$ . Существуют сильные производные  $S'_x(x, y)v$  и  $S''_{xx}(x, y)v$  ( $v \in D(y)$ ), для которых область значений оператора  $S'_x(x, y)F(x, y, \mu)$  принадлежит  $D(x)$  и  $(n + k \leq 2)$

$$\|S^{(n)}(x, y)\chi^k(y)F(x, y, \mu)\| \leq C|x - y|^{1+\varepsilon-n-k} \exp\{K|x - y|\}. \quad (3)$$

Здесь  $\chi(x) = \{Q(x) + \mu^2 I(x)\}^{1/2}$ ;  $F(x, y, \mu) = \frac{1}{2}\chi^{-1}(y) \exp\{-|x - y|\chi(y)\}$ .

β) Замкнутый линейный оператор  $Q(x)$  имеет плотную область определения  $D(x)$ , и при любом  $\lambda \geq 0$  оператор  $Q(x) + \lambda I(x)$  имеет в  $H(x)$  ограниченный обратный.

Оператор  $Q(x)$  равномерно ограничен снизу

$$\operatorname{Re}(Q(x)\varphi, \varphi) \geq \sigma(x)(\varphi, \varphi); \quad \sigma(x) > 0, \quad \varphi \in D(x).$$

γ) Существуют постоянные  $C$  и  $K$ , такие, что

$$\|Q(x)\tilde{Q}_x(y)\| \leq C \exp\{K|x-y|\},$$

и оператор  $Q(x)$  удовлетворяет условию Гёльдера:

$$\| [Q(x) - \tilde{Q}_x(y)] Q^{-1}(x) \| \leq C|x-y|^{\varepsilon-1}$$

$$\| Q^{-1-\delta}(x) [Q(x) - \tilde{Q}_x(y)] \| \leq C|x-y|^{\varepsilon-1}.$$

Здесь

$$|x-y| < 1; \quad \varepsilon > 0, \quad 0 < \delta < \varepsilon, \quad \tilde{A}_x(y) = S(x, y)A(y)S(y, x).$$

Приведенные выше условия позволили показать [2], что резольвента оператора  $L_\mu$  при достаточно большом  $\mu$  — интегральный оператор, ядром которого служит операторная функция Грина  $G(x, y, \mu)$ , для которой справедливо представление

$$G(x, y, \mu) = S(x, y)F(x, y, \mu) + \int S(x, z)F(x, z, \mu) \Phi(z, y, \mu) dz, \quad (4)$$

где  $\Phi(z, y, \mu)$  — операторная резольвента. Для функции Грина и операторной резольвенты справедливы оценки ( $\gamma > 0; \alpha < 1$ )

$$\| Q^\alpha(x) G(x, y, \mu) \| \leq C|x-y|^{-2\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} \exp\{-\gamma\mu|x-y|\} \quad (5)$$

$$\| Q^\alpha(x) \Phi(x, y, \mu) \| \leq C|x-y|^{-2\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} \exp\{-\gamma\mu|x-y|\}. \quad (6)$$

Если оператор  $Q^{-k}(x)$  вполне непрерывен в  $H(x)$  при некотором  $k$  и  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \|Q^{-1}(x)\| = 0$ , то резольвента — вполне непрерывный оператор в  $H_1$  [2].

**Теорема.** Если выполняются условия  $\alpha \div \gamma$ , оператор  $Q^{-1}(x) \in G_p$  ( $p < \frac{3}{2}$ ) и  $\int \|Q^{-1}(x)\|_p^2 dx < \infty$ , то резольвента оператора  $L_\mu$  есть оператор Гильберта — Шмидта. Если оператор  $S(x, y)$  выбран так, что  $(S(x, y)\varphi_i(y), S(x, y)\varphi_j(y))_1 = \delta_{ij}$ , где  $\varphi_i(y)$  — собственные функции оператора  $Q(y)$ , образующие базис в  $H(y)$  и  $\sum_i \int \alpha_i^{-3/2}(x) dx < \infty$ , то

$$\int (\lambda + \mu)^{-2} dN(\lambda) = \sum \int (\alpha(x) + \mu)^{-3/2} dx (1 + O(\mu^{-\varepsilon})). \quad (7)$$

Если, кроме того, выполняются условия (3.3) [3], то

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha_i(x) < \lambda} \int [\lambda - \alpha_i(x)]^{1/2} dx. \quad (8)$$

Первое утверждение теоремы доказывается аналогично [1], [4]. Для доказательства остальных рассмотрим представление (которое следует из (4)) резольвенты оператора  $L_\mu^{-1} f \equiv Gf = \int G(x, y, \mu) f(y) dy$  в виде  $G = F(I + \Phi)$ , где  $\Phi f = \int \Phi(x, y, \mu) f(y) dy$  и  $Ff = \int S(x, y) F(x, y, \mu) f(y) dy$ ; а также формально определенный оператор  $F = G(I + T)$ , где  $T = \Phi(I + \Phi)^{-1}$ . Норму оператора  $\Phi$  в  $H_1$  можно оценить с помощью (6)  $\|\Phi\|_1 \leq C_\mu^{-\varepsilon}$ , поэтому оператор  $T$  существует при достаточно большом  $\mu$  и для него справедлива оценка  $\|T\|_1 \leq C\mu^{-\varepsilon}$ . Таким образом, для операторов  $G$  и  $F$  справедливы оценки ( $\|\cdot\|_2$  — норма Гильберта — Шмидта)

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &\leq \|F\|_2 (1 + \|\Phi\|_1) \leq \|F\|_2 (1 + C\mu^{-\varepsilon}), \\ \|F\|_2 &\leq \|G\|_2 (1 + \|T\|_1) \leq \|G\|_2 (1 + C\mu^{-\varepsilon}) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|G\|_2 = \|F\|_2 (1 + O(\mu^{-\varepsilon})).$$

Теперь асимптотику (7) получить нетрудно

$$\|G\|_2 = \int (\lambda + \mu)^{-2} dN(\lambda) = \sum_{i,j} \int \int (S(x, y) F(x, y, \mu) \varphi_j(y), S(x, y) F(x, y, \mu) \varphi_i(y)) dy dx$$

$$\begin{aligned} (1 + O(\mu^{-\varepsilon})) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int \int (\mu + |x - y| \alpha_j(y))^{-1/2} (\mu + |x - y| \alpha_i(y))^{-1/2} \\ &\exp\{-(\mu + |x - y| \alpha_j(y))^{1/2} - (\mu + |x - y| \alpha_i(y))^{1/2}\} (S(x, y) \varphi_j(y), \\ &S(x, y) \varphi_i(y)) \end{aligned}$$

$$dy dx (1 + O(\mu^{-\varepsilon})) = \frac{1}{4} \sum_j \int (\mu + \alpha_j(y))^{-3/2} dy (1 + O(\mu^{-\varepsilon})).$$

Чтобы получить асимптотику (8), необходимо применить тауберову теорему, но для этого необходимо наложить дополнительные условия. Например, можно взять условия (3.3) из [3].

Приведем пример, на котором проверяются вышенеречисленные условия. Этот пример позволяет определить требова-

ния, при которых спектр оператора Шредингера дискретен в областях с бесконечными границами.

Пусть  $\Omega_x$  семейство ограниченных открытых областей  $m$ -мерного пространства с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ .  $P$  — область:  $P = \{(x, \xi) \in P: \xi \in \Omega_x, x \in R\}$ . Рассмотрим в  $\Omega_x$  эллиптический оператор

$$Q(x)V = a_{ik} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i \partial \xi_k} + a_i(x, \xi) \frac{\partial V}{\partial \xi_i} + a(x, \xi)V,$$

область определения которого состоит из функций пространства  $W_2^{(2)}(\Omega_x)$ , обращающихся в нуль на границе. При достаточно гладких коэффициентах оператора справедлива оценка [5]

$$\int_{\Omega_x} u^2 dx \leq C_0 \text{mes}^{2/m} \Omega_x \left( \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_x} u^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_x} (\Delta u)^2 dx \right) \text{ и если } a(x, \xi) =$$

$= \varphi(x) + \psi(x, \xi)$ , где  $\psi(x, \xi)$  непрерывна и равномерно ограничена,  $\text{Re } \varphi(x) > \delta$ , то нетрудно получить оценку  $\|Q^{-1}(x)\| \leq C \text{mes}^{1/m} \Omega_x (1 + (\text{mes}^{1/m} \Omega_x) \varphi)^{-1}$ , а отсюда и проверить условие  $\beta$ . Предположим, что существует гомеоморфизм области  $\Omega_y$  на  $\Omega_x$ , с достаточно гладким якобианом  $D(\xi, x, y)/D(\eta, x, y)$ . Определим отображение  $g(\eta, x, y) = S(x, y)f = = f(\xi, \eta, x, y)\sqrt{T}$ . Если якобиан достаточно слабо зависит от  $x$  и  $y$ , то выполняются условия  $\alpha$  (см. также [4]). Условие (2) проверяется известным образом [6]. Для выполнения условия  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|Q^{-1}(x)\| = 0$  достаточно либо  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ , либо

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \text{mes } \Omega_x = 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Исследования функции Грина уравнения Штурма — Лиувилля с операторным коэффициентом. — *Мат. сб.*, 1968, т. 76(118), № 2, с. 239—270.
2. Беговатов Е. А. Исследование функции Грина сильно эллиптических уравнений второго порядка в нецилиндрических областях. — В кн.: *Исследования по прикладной математике*. Казань, Изд-во КГУ, 1975, с. 14—35.
3. Костюченко А. Г., Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма — Лиувилля. — *„Функциональный анализ и его приложения“*. М., 1967, № 1, с. 96.
4. Беговатов Е. А. Спектральные свойства несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка в гильбертовом пространстве. — В кн.: *Приложение функционального анализа к приближенным вычислениям*. Казань, Изд-во КГУ, 1974, с. 15—20.
5. Ладыженская О. А., Уральцева Н. И. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. М., 1964.
6. Крейн С. Г., Лаптев Г. И. Абстрактная схема рассмотрения параболических задач в нецилиндрических областях. — *„Диф. уравнения“*, 5(1969), № 8, с. 1458—1469.