Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 2

МЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело, закрепленное в одной точке. Допустим, что с этим телом связана некоторая ось, вокруг которой может вращаться однородный маховик. Принимая обычные в динамике твердого тела обозначения и называя через λ, μ, ν проекции момента количества движения маховика на подвижные оси, запишем уравнения движения рассматриваемого твердого тела (гиростата) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr + (\nu q - \mu r) = Mg(\zeta\gamma' - \eta\gamma''),\\ &B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp + (\lambda r - \nu p) = Mg(\xi\gamma'' - \zeta\gamma),\\ &C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq + (\mu p - \lambda q) = Mg(\eta\gamma - \xi\gamma'); \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d\gamma}{dt} + q\gamma'' - r\gamma' = 0,\\ &\frac{d\gamma'}{dt} + r\gamma - p\gamma'' = 0,\\ &\frac{d\gamma''}{dt} + p\gamma' - q\gamma = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В настоящей статье мы имеем в виду указать два частных случая интегрируемости этих уравнений. Первый случай связан с гироскопом Горячева — Чаплыгина ($A = B = 4C$, $\eta = \zeta = 0$, $\xi \neq 0$), второй — со случаем Аппельрота: $\eta = 0$, $A(B-C)\xi^2 - C(A-B)\zeta^2 = 0$.

2. Для гироскопа Горячева — Чаплыгина уравнения (1) записываются так:

$$\begin{aligned} &4\frac{dp}{dt} - 3qr + (\nu q - \mu r) = 0,\\ &4\frac{dq}{dt} + 3rp + (\lambda r - \nu p) = a\gamma'',\\ &\frac{dr}{dt} + (\mu p - \lambda q) = -a\gamma', \end{aligned} \tag{3}$$

где λ, μ, ν обозначают прежние величины λ, μ, ν, но деленные на C, и

$$a = \frac{Mg}{C}\xi.$$

Покажем, что если λ и μ равны нулям, то уравнения (3) будут иметь, помимо интеграла живых сил

$$4(p^2 + q^2) + r^2 + 2a\gamma = h,$$

еще один интеграл, зависящий от произвольной константы, если постоянная площадей m в интеграле о моменте количества движения равна нулю:

$$4(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''+\nu\gamma''=0. \qquad (4)$$

Этим новым интегралом будет

$$(r-\nu)(p^2+q^2)-ap\gamma''=k, \qquad (5)$$

где k есть произвольное постоянное число. Для проверки этого утверждения обозначим через S левую часть предыдущего равенства.

Пользуясь уравнениями (1) и (2), легко найти, что:

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{4}aq\,[4(p\gamma+q\gamma')+(r+\nu)\gamma''],$$

но, в силу равенства (4), которое имеет место во все время движения, правая часть этого уравнения обращается в нуль, и мы получаем интеграл (5) с произвольной константой k.

Обозначим через u и v две вспомогательные функции времени и введем в рассмотрение два следующих многочлена третьей степени:

$$U=u(u-\nu)^2-hu-4k,$$
$$V=v(v+\nu)^2-hv+4k.$$

С помощью этих многочленов искомые неизвестные p, q, r, γ, γ', γ'' найдутся по формулам, обобщающим формулы Чаплыгина [1]:

$$8ap=\sqrt{(U+2au)(2av-V)}-\sqrt{(2au-U)(V+2av)},$$
$$8aq=\sqrt{(U+2au)(V+2av)}+\sqrt{(2au-U)(2av-V)},$$
$$r=u-v-\nu,$$
$$2a\gamma=h-(u-v-\nu)^2-uv,$$
$$2a\gamma'=-\frac{\sqrt{4a^2u^2-U^2}-\sqrt{4a^2v^2-V^2}}{u+v},$$
$$2a\gamma''=\frac{\sqrt{(U+2au)(2av-V)}+\sqrt{(2au-U)(V+2av)}}{u+v}.$$

Функции u, v находятся интегрированием уравнений:

$$\frac{du}{\sqrt{4a^2u^2-U^2}}-\frac{dv}{\sqrt{4a^2v^2-V^2}}=0, \qquad \frac{2u\,du}{\sqrt{4a^2u^2-U^2}}+\frac{2v\,dv}{\sqrt{4a^2v^2-V^2}}=dt.$$

Из этих уравнений неизвестные функции u, v найдутся через тэта-функции двух переменных.

3. Вернемся к общим уравнениям (1) и (2) и положим в них $\eta=0$, $\mu=0$. Тогда система уравнений (1) запишется так:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr+\nu q=Mg\,\zeta\gamma',$$
$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp+(\lambda r-\nu p)=Mg\,(\xi\gamma''-\zeta\gamma),$$
$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq-\lambda q=-Mg\,\xi\gamma'.$$

Исключая из двух крайних уравнений неизвестное γ', получаем:

$$\frac{d}{dt}(A\xi p+C\zeta r)+q\,[(B-A)\zeta p+(C-B)\xi r+(\nu\xi-\lambda\zeta)]=0.$$

Отсюда следует, что если между главными моментами инерции и координатами центра тяжести гиростата будет существовать условие Аппельрота [2]

$$A(B-C)\xi^2-C(A-B)\zeta^2=0,$$

то уравнения движения будут иметь следующий частный интеграл:

$$(A-B)\zeta p+(B-C)\xi r+(\lambda\zeta-\nu\xi)=0.$$

Присоединяя к тому интегралу два других интеграла:

$$\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+Mg(\xi\gamma+\zeta\gamma'')=h,$$

$$(Ap+\lambda)\gamma+Bq\gamma'+(Cr+\nu)\gamma''=k,$$

мы получаем возможность привести решение задачи о движении гиростата к интегрированию уравнения Риккати.

Опишем из точки опоры сферу радиуса единица и назовем через V точку пересечения восходящей вертикали с поверхностью сферы; через a, b, c обозначим точки пересечения главных осей инерции тела со сферой. На дуге большого круга ac будет лежать точка G встречи поверхности сферы с прямой, идущей из точки опоры в центр тяжести; обозначим дугу aG через α и отметим, что $\xi=l\cos\alpha$, $\zeta=l\sin\alpha$, где l есть расстояние от точки опоры до центра тяжести. Назовем через θ дугу VG, а через φ — угол между продолжением дуги VG и дугой большого круга Gb. Возьмем далее на сфере какой-нибудь большой круг VK в качестве начального и будем измерять от него угловое расстояние ψ между дугой VK и подвижной дугой VG ([3]). При этих обозначениях будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$(1-u^2)\frac{d\psi}{dt}=k+\left(\frac{\nu\sin\alpha}{C-B}-\frac{\lambda\cos\alpha}{B-A}\right)u,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\left(h-\frac{2Mgl}{B}u\right)(1-u^2)-\left[k+\left(\frac{\nu\sin\alpha}{C-B}-\frac{\lambda\cos\alpha}{B-A}\right)u\right]^2,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}+u\frac{d\psi}{dt}=D+E\left(\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}\sqrt{1-u^2}-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dt}\right),$$

где

$$u=\cos\theta,\quad D=\frac{2(\nu\cos\alpha-\lambda\sin\alpha)}{(A-C)\sin 2\alpha},\quad E=\frac{2(A-B)(B-C)}{B(A-C)\sin 2\alpha}.$$

Первые два уравнения показывают, что прямая линия, идущая из точки опоры в центр тяжести гиростата, перемещается в пространстве совершенно так же, как и ось гироскопа Лагранжа. Последнее уравнение дает угол собственного вращения φ; оно может быть приведено к уравнению Риккати и затем к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с двоякопериодическими коэффициентами.

В том частном случае, когда имеет место соотношение $\nu\xi-\lambda\zeta=0$, движение гиростата может быть описано так же наглядно, как и движение локсодромического маятника Гесса ([4]).

Поступило
20 XII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке, Сочинения, 1, М., 1948, стр. 118. [2] В. В. Голубев, Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953, стр. 264. [3] E. J. Routh, The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, 6-th ed., London, 1955, § 212. [4] Н. Е. Жуковский, Локсодромический маятник Гесса, Сочинения, 1, М., 1948, стр. 257.