Ф. Е. Ломовцев, Граничные задачи для полных квазигиперболических дифференциальных уравнений с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов. I,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 258–267

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 258–267

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛНЫХ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ. I

© 2005 г. **Ф. Е. Ломовцев**

Полные квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения четных порядков с постоянными областями определения изучались в работах [1, 2]. Квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения четных порядков с переменными областями определения в случае двухчленной главной части рассматривались в [3]. Полные гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения исследованы в [4, 5]. В настоящей работе обобщаются и улучшаются результаты всех указанных выше работ и изучаются полные квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения четных порядков с переменными областями определения. В приложениях такими уравнениями являются гиперболические уравнения с гладко зависящими от времени коэффициентами в уравнениях и в граничных условиях [3], сингулярные гиперболические уравнения [4] и "гиперболические" уравнения переменных высших порядков по пространственным переменным, приведенные в части II настоящей работы.

1. Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ на ограниченном интервале $]0,T[$ рассматриваются граничные задачи

$$L_m(\lambda_m)u \equiv (-1)^{m-1}\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}} + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{d^k}{dt^k}A_{2k+1}(t)\frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{d^k}{dt^k}A_{2k}(t)\frac{d^k u}{dt^k} + \lambda_m A_0(t)u = f, \quad (1)$$

$$d^i u/dt^i|_{t=0} = d^j u/dt^j|_{t=T} = 0, \quad 0 \le i \le m, \quad 0 \le j \le m-2, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad (2)$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $\lambda_m \ge 1$ – числовой параметр. На линейные неограниченные замкнутые операторы $A_s(t)$ в H с зависящими от t областями определения $D(A_s(t))$, $s = \overline{0, 2m-1}$, налагаются следующие условия.

I. При всех $t \in [0,T]$ операторы $A_0(t)$ самосопряжены в H, удовлетворяют неравенству $(A_0(t)u,u) \ge c_0(t)|u|^2$ $\forall u \in D(A_0(t))$, $c_0(t) > 0$, и их обратные $A_0^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, где $\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$ – множество всех ограниченных по $t \in [0,T]$ и по норме линейных непрерывных операторов в $\mathcal{L}(H)$, имеют в H сильную производную по t [6, с. 22] $dA_0^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, для которой выполняется неравенство

$$-((dA_0^{-1}(t)/dt)g, g) \le c_0^{(1)}(A_0^{-1}(t)g, g) \quad \forall g \in H. \quad (3)$$

Для формулировки ограничений на $A_s(t)$, $s > 0$, введем необходимые пространства. Известно [6], что при каждом $t \in [0,T]$ для $A_0(t)$ определены дробные степени $A_0^{\gamma}(t)$, $|\gamma| \le 1$, с областями определения $D(A_0^{\gamma}(t))$. Наделяя $D(A_0^{\alpha/(2m)}(t))$ эрмитовыми нормами $|v|_{\alpha,t} = |A_0^{\alpha/(2m)}(t)v|$, получаем гильбертовы пространства $W^{\alpha}(t)$, $|\alpha| \le 2m$, $W^0(t) = H$.

II. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $dA_0^{-1}(t)/dt$ имеют в H сильные производные по t $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, $2 \le j \le m+1$, удовлетворяющие неравенствам

$$|((d^j A_0^{-1}(t)/dt^j)g, v)| \le c_0^{(j)}|g|_{-(m+1-j),t}|v|_{-m,t} \quad \forall g, v \in H. \quad (4)$$

III. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A_s(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(W^{2m-s}(t), H))$, $s > 0$, удовлетворяют неравенствам

$$|(A_s(t)u, v)| \le c_s |u|_{m-[(s+1)/2],t} |v|_{m-[s/2],t} \quad \forall u, v \in D(A_0(t)), \tag{5}$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа, и имеют сильные производные по t [7]

$$d^i A_s(t)/dt^i \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(W^{2m-s+\tau}(t), H)), \quad \tau > 0, \quad 1 \le i \le [s/2], \quad s > 0.$$

При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A_{2k}(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, симметричны на $D(A_0(t))$ в H и для $A_s(t)$, $s > 0$, выполняются неравенства

$$(-1)^{[(s+1)/2]} \operatorname{Re}((d^i A_s(t)/dt^i)u, u) \le c_s^{(i)} |u|^2_{m-[(s+1)/2],t} \quad \forall u \in D(A_0(t)), \tag{6}$$

где $i = 1$ для $s = 2k$, $k = \overline{1, m-1}$, и $i = 0$ для $s = 2k+1$, $k = \overline{0, m-1}$.

Применяем следующее понятие сильной производной по параметру t от переменных неограниченных операторов $A(t)$ с переменными областями определения $D(A(t))$ в H (см. [7]).

Определение 1. Операторы $A(t)$ назовем сильно дифференцируемыми по t в $t_0 \in [0,T]$ на $u(t_0) \in D(A(t_0))$, если найдутся $u(t) \in D(A(t))$, $t \ne t_0$, такие, что существуют производные

$$u'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \{(u(t_0 + \Delta t) - u(t_0))/\Delta t\} \in D(A(t_0)),$$

$$h'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \{(A(t_0 + \Delta t)u(t_0 + \Delta t) - A(t_0)u(t_0))/\Delta t\} \in H$$

в сильном смысле в H и пределы $u'(t_0)$ и $h'(t_0)$ не зависят от выбора $u(t)$. Значением сильной производной $A'(t_0)$ операторов $A(t)$ в t_0 на $u(t_0)$ назовем $A'(t_0)u(t_0) = h'(t_0) - A(t_0)u'(t_0)$. Совокупность всех таких $u(t_0)$ образует область определения $D(A'(t_0)) \subset D(A(t_0))$ оператора производной $A'(t_0)$. Операторы $A(t)$ назовем сильно дифференцируемыми по t в $[0,T]$ на $D(A'(t))$, если они сильно дифференцируемы по t в каждой $t_0 \in [0,T]$ и на каждой $u(t_0) \in \in D(A'(t_0))$.

IV. При каждом $t \in [0,T]$ все операторы $A_s(t)$, $s > 0$, удовлетворяют неравенству

$$|(A_s(t)A_0^{-1}(t)g, v)| \le \tilde{c}_s^{(0)} |g|_{-[(s+1)/2],t} |v|_{-[s/2],t} \quad \forall g, v \in H, \tag{7}$$

включению $A_s(t)(d^j A_0^{-1}(t)/dt^j) \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H))$, $1 \le j \le [(s+1)/2]$, неравенствам

$$|(A_s(t)(d^j A_0^{-1}(t)/dt^j)g, v)| \le \tilde{c}_s^{(j)} |g|_{-[(s+1)/2]+j,t} |v|_{-[s/2]-1,t} \quad \forall g, v \in H, \quad 2 \le j \le [(s+1)/2], \tag{8}$$

и еще либо неравенству (8) при $j = 1$, либо неравенству

$$|(A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g, v)| \le \tilde{c}_s^{(1)} |g|_{-[(s-1)/2],t} |v|_{-[s/2],t} \quad \forall g, v \in H, \tag{9}$$

неравенству (8) при $j = 2$ с $\tilde{c}_s^{(j)} |g|_{-[(s+1)/2]+1,t} |v|_{-[s/2],t}$ в его правой части, включению $(dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt) \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H))$, неравенству

$$|((dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt)g, v)| \le \bar{c}_s^{(1)} |g|_{-[(s-1)/2],t} |v|_{-[s/2],t} \quad \forall g, v \in H, \tag{10}$$

в случае $s = 2k > 0$ еще неравенству

$$(-1)^k \operatorname{Re}(A_{2k}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g, g) \le \bar{c}_{2k}^{(0)} |g|^2_{-k,t} \quad \forall g \in H \tag{11}$$

и в случае $s = 2k+1 > 0$ операторы $A_{2k+1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)$ симметричны на $D(A_{2k+1}(t))$ в H. При каждом $t \in [0,T]$ для операторов $A_{2k}(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, выполняются неравенства

$$(-1)^k \operatorname{Re}[(A_{2k}(t)u, A_0(t)v) - (A_0(t)u, A_{2k}(t)v)] \le \tilde{c}_{2k} |u|_{2m-k-1,t} |v|_{2m-k,t} \quad \forall u, v \in D(A_0(t)) \tag{12}$$

и для операторов $A_{2k+1}(t)$, $k=\overline{0,m-1}$, выполняются неравенства

$$(-1)^{k+1}\operatorname{Re}(A_{2k+1}(t)u, A_0(t)u)\le \tilde c_{2k+1}|u|^2_{2m-k-1,t}\quad \forall u\in D(A_0(t)). \tag{13}$$

В неравенствах (3)–(13) все постоянные $c_0^{(j)}, c_s, c_s^{(i)}, \tilde c_s^{(j)}, \bar c_s^{(i)}, \tilde c_s \ge 0$ не зависят от g, u, v и t.

В настоящей работе доказывается корректная разрешимость в сильном смысле граничных задач (1), (2) при $\lambda_m\ge\tilde\lambda_m$ в случае полных уравнений высших порядков. Доказательства проводятся модификацией и обобщением известного метода энергетических неравенств работы [8], в отличие от которой сначала выводятся априорные оценки сильных решений задач (1), (2) с помощью сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$, а затем устанавливается плотность множеств значений операторов задач (1), (2) в пространствах правых частей с помощью леммы 8 из [9]. В уравнения (1) входят только его главные члены, и корректность граничных задач для уравнений с дополнительными младшими членами обсуждается в замечании 2.

2. Интерполяционные неравенства. В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения. Непрерывности производной $dA^{-1}(t)/dt$ в соответствующей паре гильбертовых шкал пространств $\{W^q(t)\}$, $|q|\le 2m$, посвящена

Лемма 1. *Пусть $A(t)$ – линейные самосопряженные положительные операторы в гильбертовом пространстве H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$. Если их обратные $A^{-1}(t)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$ при всех t имеют в H сильную производную $dA^{-1}(t)/dt\in$ $\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H,W^{2m(1-\beta)}(t)))\bigcap\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(W^{-2m}(t),W^{-2m\beta}(t)))$, $0\le\beta\le1$, то имеет место оценка*

$$|A^{1-\beta-\alpha}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^\alpha(t)x|\le\mathcal{M}|x|\quad\forall x\in D(A^\alpha(t)),\quad 0\le\alpha\le1, \tag{14}$$

где $\mathcal{M}=\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\{\|A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)\|_{\mathcal{L}(H)},\|\overline{A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)}\|_{\mathcal{L}(H)}\}$ и черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в H.

Доказательство. Операторы $\mathcal{A}=\mathcal{B}=A^{\beta-1}(t)$ и $\mathcal{T}=A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$ в $H_1=H$ при всех t удовлетворяют замечанию 7.1 из [6, с. 177–179] и, в частности, неравенству $|\mathcal{BT}x|\le$ $\le\mathcal{M}|\mathcal{A}x|$ $\forall x\in H$. Применяя к ним неравенство Гайнца (7.6) из [6, с. 178], получаем оценки (14) при всех t и всех $0\le\alpha\le1-\beta$. Операторы $\mathcal{A}=\mathcal{B}=A^\beta(t)$ и $\mathcal{T}=A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$ также удовлетворяют указанному замечанию 7.1 и, аналогично применяя к ним неравенство Гайнца (7.6) из [6, с. 178], получаем оценки (14) при всех t и всех $1-\beta\le\alpha\le1$. Лемма 1 доказана.

Имеет место следующее обобщение теоремы Далецкого [6, с. 231] на самосопряженные операторы с переменными областями определения.

Лемма 2. *В предположениях леммы 1 операторы $A^{-\gamma}(t)$, $\beta\le\gamma<1$, при каждом $t\in[0,T]$ имеют в H сильную производную*

$$\frac{dA^{-\gamma}(t)}{dt}=\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}s^{-\gamma}A(t)R(-s)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)R(-s)\,ds,\quad \beta\le\gamma<1,\quad R(-s)=(A(t)+s)^{-1},$$

и справедливы оценки

$$|A^{\gamma-\beta}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)x|\le\mathcal{M}_\gamma|x|\quad\forall x\in H,\quad \beta\le\gamma<1, \tag{15}$$

$$|A^{-\beta}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)A^\gamma(t)x|\le\mathcal{M}_\gamma|x|\quad\forall x\in D(A^\gamma(t)),\quad \beta\le\gamma<1. \tag{16}$$

Доказательство. Интегральное представление производной $dA^{-\gamma}(t)/dt$ получается дифференцированием интегрального представления отрицательных дробных степеней $A^{-\gamma}(t)$ [6, с. 137] для $\gamma>\beta$ в силу равенства $dR(-s)/dt=A(t)R(-s)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)R(-s)$, оценок $\|A^\beta(t)R(-s)\|_{\mathcal{L}(H)}\le N_\beta/(1+s)^{1-\beta}$, $s>0$, $0\le\beta<1$, и ограниченности операторов $A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$ и для $\gamma=\beta$ в силу доказанных ниже оценок (15).

Если $Q=A^\gamma(t)R(-s)A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)R(-s)$ и $x,y\in D(A(t))$, то при всех t имеем

$$|(Qx,y)|=|(A^{1-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1-\gamma)/2}(t)A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x,A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y)|\le$$

$$\leq \|\overline{A^{1-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1-\gamma)/2}(t)}\|_{\mathcal{L}(H)}|A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x\|A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y|,$$

где черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в H. Воспользовавшись неравенствами (14) для $\alpha \leq 1-\beta$ и спектральным разложением операторов $A(t)$, по аналогии с работой [6, с. 230] придем к оценкам (15) с постоянными $\mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}c_\gamma$, где $c_\gamma = (1/3)\int_0^{+\infty} \sigma^{-\gamma}(1+\sigma)^{-2}\,d\sigma$.

Если $Q = A(t)R(-s)A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{1+\gamma}(t)R(-s)$ и $x, y \in D(A(t))$, то при всех t

$$|(Qx,y)| = |(A^{-\beta+(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1+\gamma)/2}(t)A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x, A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y)| \leq$$

$$\leq \|\overline{A^{-\beta+(1-\gamma)/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{(1+\gamma)/2}(t)}\|_{\mathcal{L}(H)}|A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)x||A^{(1+\gamma)/2}(t)R(-s)y|,$$

где черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в H. Здесь воспользуемся неравенствами (14) для $0 \leq \alpha \leq 1$, спектральным разложением операторов $A(t)$ и по аналогии с работой [6, с. 230] придем к оценкам (16). Лемма 2 доказана.

Производная $dA^{-\gamma}(t)/dt$ также непрерывна в подходящей паре гильбертовых шкал пространств $\{W^q(t)\}$, $|q| \leq 2m$.

Лемма 3. *В предположениях леммы 1 при каждом $t \in [0,T]$ имеют место оценки*

$$|A^{\gamma-\beta-\alpha}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)A^\alpha(t)x| \leq \mathcal{M}_\gamma|x| \quad \forall x \in D(A^\alpha(t)), \quad \beta \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \gamma. \qquad (17)$$

Доказательство. На основании оценок (15) и (16) достаточно применить лемму 1 к операторам $A^\gamma(t)$ вместо операторов $A(t)$. Лемма 3 доказана.

Нам понадобятся интерполяционные неравенства в отрицательной гильбертовой шкале пространств $\{\mathcal{H}^q\}$, $-m \leq q \leq 0$, где $\mathcal{H}^q = L_2(]0,T[, W^q(t))$, с эрмитовыми нормами $\|\cdot\|_q$. Пространство $\mathcal{H}^q$ – множество всех функций $u : [0,T] \ni t \to u(t) \in H$, для которых $u(t) \in D(A^{q/(2m)}(t))$, $t \in [0,T]$, и функции $h(t) = A^{q/(2m)}(t)u(t) \in \mathcal{H}^0 = \mathcal{H} = L_2(]0,T[, H)$.

Лемма 4. *В предположениях леммы 1 при $\beta = 1/(2m)$ $\forall w \in \mathcal{W}^m$, $\mathcal{W}^m = \{w \in \mathcal{H} : d^kw/dt^k \in \mathcal{H},\ 1 \leq k \leq m;\ (d^iw/dt^i)|_{t=0} = (d^jw/dt^j)|_{t=T} = 0,\ 0 \leq i \leq m-1,\ 0 \leq j \leq m-2\}$, справедливы неравенства*

$$\left\|\frac{d^iw}{dt^i}\right\|^2_{-i} \leq \tau\left\|\frac{d^mw}{dt^m}\right\|^2_{-m} + c^{(i)}_{2m}(\tau)\|w\|^2_0, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \qquad (18)$$

$$\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^iw}{dt^i}\right|^2_{-i,t} dt \leq \tau\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^mw}{dt^m}\right|^2_{-m,t} dt + \tilde{c}^{(i)}_{2m}(\tau)\int_0^T (T-t)|w|^2 dt, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \qquad (19)$$

где постоянные $c^{(i)}_{2m}(\tau), \tilde{c}^{(i)}_{2m}(\tau) > 0$ не зависят от w и t.

Доказательство. Оценки (18) и (19) устанавливаются индукцией по i с помощью интегрирования по частям, оценок (17) и δ-неравенства $2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$ $\forall \delta > 0$.

При выводе априорных оценок решений граничных задач (1), (2) нам понадобятся интерполяционные неравенства в положительной гильбертовой шкале пространств $\{\mathcal{H}^q\}$, $0 \leq q \leq m$, порожденной самосопряженными операторами с переменными областями определения.

Лемма 5. *В предположениях леммы 1 при $\beta = 1/(2m)$ $\forall u \in E^m$ (пространства E^m определены ниже в начале п. 3) справедливы неравенства*

$$\left\|\frac{d^iu}{dt^i}\right\|^2_{m-i} \leq \tau\left\|\frac{d^mu}{dt^m}\right\|^2_0 + c^{(i)}_{2m+1}(\tau)\|u\|^2_m, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \qquad (20)$$

$$\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{m-i,t} dt \leq \tau\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^mu}{dt^m}\right|^2 dt + \tilde{c}^{(i)}_{2m+1}(\tau)\int_0^T (T-t)|u|^2_{m,t}dt, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m, \qquad (21)$$

где постоянные $c^{(i)}_{2m+1}(\tau), \tilde{c}^{(i)}_{2m+1}(\tau) > 0$ не зависят от u и t.

Доказательство. При $\forall \varepsilon > 0$ операторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t) = A(t)(I + \varepsilon A(t))^{-1}$ с областями определения $D(\mathcal{A}_\varepsilon(t)) = H$ ограничены, самосопряжены и положительны в H. Непосредственно проверяется, что при всех t

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le \mathcal{M}, \quad \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le \mathcal{M}. \tag{22}$$

Применяя неравенство Гайнца (7.6) из работы [6, с. 178] к операторам $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{A}_\varepsilon^{\beta-1}(t)$ и $\mathcal{T} = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)$, при всех t получаем неравенства

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\alpha}(t)x| \le \mathcal{M}|x| \quad \forall x \in H, \quad 0 \le \alpha \le 1-\beta. \tag{23}$$

Дифференцируя интегральное представление положительных дробных степеней $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$ [6, с. 140], при всех t имеем

$$\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)}{dt}x = \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} s^\gamma R_\varepsilon(-s)\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon(t)}{dt}R_\varepsilon(-s)x\,ds \quad \forall x \in D(A(t)), \quad 0 < \gamma < 1-\beta,$$

где $R_\varepsilon(-s) = (\mathcal{A}_\varepsilon(t)+s)^{-1}$. Если $Q = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)R_\varepsilon(-s)$ и $x, y \in D(A(t))$, то при всех t

$$|(Qx,y)| = |(\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x, \mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y)| \le$$
$$\le \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}|\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x||\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y|.$$

В силу неравенств (23) и спектральных разложений операторов $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ при всех t получаем

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)x| \le \mathcal{M}_{-\gamma}|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \le \gamma \le 1-\beta. \tag{24}$$

Если $Q = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)R_\varepsilon(-s)$ и $x, y \in D(A(t))$, то при всех t

$$|(Qx,y)| = |(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x, \mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y)| \le$$
$$\le \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+(1-\gamma)/2}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-(1-\gamma)/2}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}|\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)x||\mathcal{A}_\varepsilon^{(1-\gamma)/2}(t)R_\varepsilon(-s)y|.$$

Ввиду неравенств (23) и спектральных разложений операторов $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ при всех t имеем

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)x| \le \mathcal{M}_{-\gamma}|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \le \gamma \le 1-\beta. \tag{25}$$

В силу оценок (24) и (25) операторы $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$ удовлетворяют неравенствам (22) с постоянными $\mathcal{M}_{-\gamma}$ вместо $\mathcal{M}_\gamma$ и при всех t выполняются неравенства (23) с $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$ вместо $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$:

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma+\alpha}(t)x| \le \mathcal{M}_{-\gamma}|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \le \gamma \le 1-\beta, \quad 0 \le \alpha \le \gamma-\beta. \tag{26}$$

Операторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ удовлетворяют половине предположений леммы 1, т.е. при всех t $\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)/dt)\|_{\mathcal{L}(H)} \le \mathcal{M}$ и, следовательно, по леммам 2 и 3

$$\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)}{dt} = \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} s^{-\gamma}\mathcal{A}_\varepsilon(t)R_\varepsilon(-s)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\mathcal{A}_\varepsilon(t)R_\varepsilon(-s)\,ds, \quad \beta \le \gamma < 1,$$

для $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ выполняются неравенства (15) и соответствующая им половина неравенств (17):

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{\gamma-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha(t)x| \le \mathcal{M}_\gamma|x| \quad \forall x \in H, \quad \beta \le \gamma < 1, \quad 0 \le \alpha \le \gamma-\beta. \tag{27}$$

С помощью интегрирования по частям, оценок (26) и (27), неравенства Шварца и δ-неравенства индукцией по i для $\forall u \in D(L_m)$ устанавливаются неравенства

$$\left\| \mathcal{A}_\varepsilon^{(m-i)/(2m)}(t) \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_0^2 \leq \tau \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_0^2 + c_{2m+1}^{(i)}(\tau) \|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(t) u\|_0^2, \quad \tau > 0, \quad 0 < i < m,$$

где постоянные $c_{2m+1}^{(i)}(\tau) > 0$ не зависят от u, ε и t. Устремив здесь ε к нулю, согласно известному из [9] свойству (29), получим неравенства (17), которые затем распространяются предельным переходом со множеств $D(L_m)$, указанных ниже в начале п. 3, на E^m.

Неравенства (21) доказываются аналогично. Лемма 5 доказана.

3. Единственность сильных решений. Сначала введем пространства и дадим определение сильных решений. В качестве пространств сильных решений граничных задач (1), (2) возьмем гильбертовы пространства E^m – пополнения множеств

$$D(L_m) = \left\{ u \in \mathcal{H} : \ u(t) \in D(A_0(t)), \ t \in]0,T[; \ \frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, \frac{d^s u}{dt^s}, \frac{d^{[s/2]}}{dt^{[s/2]}} A_s(t) \frac{d^{[(s+1)/2]}u}{dt^{[(s+1)/2]}} \in \mathcal{H}, \right.$$

$$\left. s = \overline{0, 2m-1}; \ \frac{d^k u}{dt^k} \in \mathcal{H}^{m-k}, \ k = \overline{1, m-1}; \ \left.\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^j u}{dt^j}\right|_{t=T} = 0, \ i = \overline{0,m}, \ j = \overline{0, m-2} \right\}$$

по эрмитовым нормам $|||u|||_m = (\|d^m u/dt^m\|_0^2 + \|u\|_m^2)^{1/2}$. В качестве пространств правых частей уравнений (1) возьмем банаховы пространства $\hat{F}^{-(m-1)}$ – пополнения множества $\mathcal{H}$ по нормам $\langle\|f\|\rangle_{-(m-1)} = \sup\limits_{v \in \hat{E}^{m-1}} \{| \int_0^T (f, v)\, dt| / \langle\|v\|\rangle_{m-1}\}$, где гильбертовы пространства $\hat{E}^{m-1}$ – пополнения множеств

$$\hat{\mathcal{D}}^m = \{ v \in \mathcal{H} : \ d^k v/dt^k \in \mathcal{H}^{m-k}, \ 0 \leq k \leq m, \ (d^i v/dt^i)|_{t=0} = (d^i v/dt^i)|_{t=T} = 0, \ 0 \leq i \leq m-1 \}$$

по эрмитовым нормам $\langle\|v\|\rangle_{m-1} = (\sum_{k=0}^{m-1} \|(T-t)^{-1} d^k v/dt^k\|_{m-1-k}^2)^{1/2}$. Граничным задачам (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m(\lambda_m) : \ E^m \supset D(L_m) \to \hat{F}^{-(m-1)}$ с плотными областями определения $D(L_m)$. В дальнейшем будем предполагать, что множества $\hat{\mathcal{D}}^m$ плотны в $\mathcal{H}$, а здесь ограничимся одним из достаточных условий этой плотности.

Лемма 6. *Если обратные операторы $A_0^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H))$ положительных самосопряженных операторов $A_0(t)$ при всех t имеют в H сильные производные $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H, W^{m-j}(t)))$, $1 \leq j \leq m$, то множества $\hat{\mathcal{D}}^m$ плотны в $\mathcal{H}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 в [9].

Замечание 1. Плотность $\hat{\mathcal{D}}^m$ в $\mathcal{H}$ нужна для построения полноценной дуальной пары $\hat{E}^{m-1} \subset \mathcal{H} \subset \hat{F}^{-(m-1)}$ в смысле представления значений функционалов из $\hat{F}^{-(m-1)}$ через скалярное произведение в $\mathcal{H}$. В приложениях к краевым задачам плотность $\hat{\mathcal{D}}^m$ в $\mathcal{H}$ почти всегда имеет место без дополнительных требований гладкости на $A_0^{-1}(t)$, так как множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, как правило, всегда содержится в $\hat{\mathcal{D}}^m$ и, очевидно, плотно в $\mathcal{H}$.

В дальнейшем будем предполагать замыкаемость операторов $L_m(\lambda_m)$, т.е. из того, что для $u_n \in D(L_m)$, $u_n \to 0$ в E^m и $L_m(\lambda_m) u_n \to f$ в $\hat{F}^{-(m-1)}$ при $n \to \infty$, следует, что $f = 0$, а здесь ограничимся одним из достаточных условий их замыкаемости.

Лемма 7. *Пусть выполняются условия леммы 5 при $m > 1$ и леммы 6, операторы $A_s(t)$ удовлетворяют неравенствам (5) и производные $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H, W^{2m-j}(t)))$, $1 \leq j \leq m-1$. Тогда каждый оператор $L_m(\lambda_m)$ допускает замыкание.*

Доказательство. После интегрирования по частям значения антилинейного непрерывного функционала $f \in (\hat{E}^{m-1})'$ на $\forall v \in \mathcal{D}^m = \{ \hat{v} \in \hat{\mathcal{D}}^m : \ \hat{v}(t) \in D(A_0(t)), \ t \in [0,T]; \ A_0(t)\hat{v} \in \mathcal{H} \}$

$$f(v) = \lim_{n \to \infty} \int_0^T (L_m(\lambda) u_n, v) dt = \lim_{n \to \infty} \left\{ - \int_0^T \left(\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^m v}{dt^m} \right) dt + \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T \left(A_{2k+1}(t) \frac{d^{k+1} u_n}{dt^{k+1}}, \frac{d^k v}{dt^k} \right) dt + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^T\left(A_{2k}(t)\frac{d^ku_n}{dt^k},\frac{d^kv}{dt^k}\right)dt+\lambda_m\int_0^T(u_n,A_0(t)v)dt\Bigg\}=0,\quad u_n\in D(L_m),$$

в силу неравенств (5) и (20).

Докажем плотность $\mathcal{D}^m$ в $\hat{E}^{m-1}$. Пусть для некоторой функции $w\in\hat{E}^{m-1}$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^T(T-t)^{-2}\left(A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t)\frac{d^kv}{dt^k},A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t)\frac{d^kw}{dt^k}\right)dt=0\quad\forall v\in\mathcal{D}^m.$$

Здесь полагаем $v=A_\varepsilon^{-1}(t)h=(I+\varepsilon A_0(t))^{-1}h\in\mathcal{D}^m$, $\varepsilon>0$, где $d^kh/dt^k\in\mathcal{H}$, $0\le k\le m$, и $(d^ih/dt^i)|_{t=0}=(d^ih/dt^i)|_{t=T}=0$, $0\le i\le m-1$, распространяем полученные равенства предельным переходом на все $h\in\mathcal{H}$ такие, что $(T-t)^{-1}d^kh/dt^k\in\mathcal{H}$, $0\le k\le m-1$, и $(d^ih/dt^i)|_{t=0}=(d^ih/dt^i)|_{t=T}=0$, $0\le i\le m-2$, берем $h=w$ и получаем равенства

$$\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^T(T-t)^{-2}\left(A_\varepsilon^{-1}(t)A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t)\frac{d^kw}{dt^k},A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t)\frac{d^kw}{dt^k}\right)dt=$$

$$=-\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{k}C_k^j\int_0^T(T-t)^{-2}\left(A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t)\frac{d^jA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt^j}\frac{d^{k-j}w}{dt^{k-j}},A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t)\frac{d^kw}{dt^k}\right)dt.$$

Здесь и далее символом C_p^j обозначено число сочетаний из p элементов по j. В этих равенствах предельный переход при $\varepsilon\to0$ в силу (29) дает $\langle\|w\|\rangle_{m-1}^2=0$, т.е. $w=0$. Ввиду плотности $\mathcal{D}^m$ в $\hat{E}^{m-1}$ имеем $f=0$. Лемма 7 доказана.

Затем строим замыкания $\overline{L_m}(\lambda_m):E^m\supset D(\overline{L_m})\to\hat{F}^{-(m-1)}$ операторов $L_m(\lambda_m)$. К областям определения $D(\overline{L_m})$ операторов $\overline{L_m}(\lambda_m)$ относим все те функции $u\in E^m$, для каждой из которых существуют такая последовательность $u_n\in D(L_m)$ и такой функционал $f\in\hat{F}^{-(m-1)}$, что $|||u_n-u|||_m\to0$ и $\langle\|L_m(\lambda_m)u_n-f\|\rangle_{-(m-1)}\to0$ при $n\to\infty$. При этом полагаем $\overline{L_m}(\lambda_m)u=\lim\limits_{n\to\infty}L_m(\lambda_m)u_n=f$.

Определение 2. Решения операторных уравнений $\overline{L_m}(\lambda_m)u=f$, $f\in\hat{F}^{-(m-1)}$, $m=1,2,\ldots$, называются сильными решениями граничных задач (1), (2).

Выведем априорные оценки, из которых следуют единственность и устойчивость решений.

Теорема 1. *Если выполняются условия I и III, производная*

$$dA_0^{-1}(t)/dt\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H,W^{2m-1}(t)))\bigcap\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(W^{-2m}(t),W^{-1}(t)))$$

при $m>1$, $\hat{\mathcal{D}}^m$ плотны в $\mathcal{H}$ и операторы $L_m(\lambda_m)$ допускают замыкания $\overline{L_m}(\lambda_m)$, то существуют не зависящие от u постоянные $c_0(m)>0$ и множества $\hat{\Lambda}_1=[1,+\infty[$ при $m=1$ и $\hat{\Lambda}_m=[\hat{\lambda}_m,+\infty[$ при $m>1$ такие, что

$$|||u|||_m\le c_0(m)\langle\|\overline{L_m}(\lambda_m)u\|\rangle_{-(m-1)}\quad\forall u\in D(\overline{L_m}),\quad\forall\lambda_m\in\hat{\Lambda}_m,\quad m=1,2,\ldots\tag{28}$$

Доказательство. В пространстве H рассмотрим операторы сглаживания $A_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon A_0(t))^{-1}$, $\varepsilon>0$, со значениями в $D(A_0(t))$. Они обладают следующими свойствами [9]:

1) ограничены равномерно по ε и t нормы $\|A_\varepsilon^{-\alpha}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\le1$, $0\le\alpha\le1$, и при $\varepsilon\to0$

$$\|A_\varepsilon^{-\alpha}(t)v-v\|_0\to0\quad\forall v\in\mathcal{H},\quad0\le\alpha\le1;\tag{29}$$

2) операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)$ имеют в H сильную производную $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$.

Интегрируя один раз по частям в $L_m(\lambda_m)$ только слагаемое, содержащее $A_0(t)$, получаем

$$2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(-1)^{m-1}\left(\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u\right)dt+$$

$$+2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left[\frac{d^k}{dt^k}A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt}+\frac{d^k}{dt^k}A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u\right)dt+$$

$$+2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{du}{dt}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u\right)dt+(2m-1)\lambda_m\int_0^T e^{c(T-t)}(A_0(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u)\,dt=$$

$$=2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(L_m(\lambda)u, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u)\,dt+$$

$$+\lambda_m\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\Phi_\varepsilon(u,u)dt \quad \forall u\in D(L_m),\quad m=1,2,\ldots, \tag{30}$$

где $J(t)=(T-t)(d/dt)+(m-1)$ и $\Phi_\varepsilon(u,u)=((d(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt)u,u)-c(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u)$. В форме $\Phi_\varepsilon(u,u)$ воспользуемся формулой

$$d(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt=-A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)$$

из [9], неравенствами (3), первым свойством операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ и найдем, что

$$\Phi_\varepsilon(u,u)\le (c_0^{(1)}-c)|A_0^{1/2}(t)A_\varepsilon^{-1/2}(t)u|^2. \tag{31}$$

Если в (30) воспользоваться оценкой (31) и в полученном неравенстве, учитывая свойство (29), устремить ε к нулю, то при $\forall c\ge c_0^{(1)}$ придем к неравенствам

$$2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(-1)^{m-1}\left(\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, J(t)u\right)dt+2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{du}{dt}, J(t)u\right)dt+$$

$$+2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left[\frac{d^k}{dt^k}A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt}+\frac{d^k}{dt^k}A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k}, J(t)u\right)dt+$$

$$+(2m-1)\lambda_m\int_0^T e^{c(T-t)}(A_0(t)u,u)\,dt\le 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(L_m(\lambda_m)u, J(t)u)\,dt.$$

Отсюда, интегрируя по частям m раз в первом интеграле и k раз в третьем интеграле и используя симметричность операторов $A_{2k}(t)$, $k=\overline{1,m-1}$, получаем неравенства

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left[\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2+(A_0(t)u,u)\right]dt\le 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(L_m(\lambda)u, J(t)u)\,dt+$$

$$+2\operatorname{Re}\sum_{i=0}^{m-3} C_{m-1}^{i}\int_0^T\left(\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[\frac{d^{m-1-i}e^{c(T-t)}}{dt^{m-1-i}}\frac{d^i J(t)u}{dt^i}\right]\right)dt+$$

$$+(2m-2)\operatorname{Re}\int_0^T \frac{d^2 e^{c(T-t)}}{dt^2}\left(\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^{m-2}J(t)u}{dt^{m-2}}\right)dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\left\{2\operatorname{Re}\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\int_0^T\frac{d^{k-i}e^{c(T-t)}}{dt^{k-i}}\left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt}+A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^i J(t)u}{dt^i}\right)dt+\right.$$

$$+(2m-2-2k)\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt}+A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k u}{dt^k}\right)dt-$$

$$\left.-\int_0^T\frac{de^{c(T-t)}(T-t)}{dt}\left(A_{2k}(t)\frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k u}{dt^k}\right)dt-\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{dA_{2k}(t)}{dt}\frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k u}{dt^k}\right)dt\right\}-$$

$$-\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\cdot 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k+1}(t)\frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}}, \frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}}\right)dt-$$

$$-(2m-2)\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{du}{dt}, u\right)dt-(2m-1)c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2 dt+$$

$$+[1-(2m-1)\lambda_m]\int_0^T e^{c(T-t)}(A_0(t)u,u)\,dt. \tag{32}$$

При $m=1$ правая часть неравенства (32) без первого интеграла оценивается сверху в силу неравенств (6) при $s=1$ и $i=0$, примененных в восьмом интеграле правой части, величиной

$$(2c_1-c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt+(1-\lambda_1)\int_0^T e^{c(T-t)}(A_0(t)u,u)\,dt,$$

которая неположительна при $\forall c\ge c_2=\max\{c_0^{(1)}, 2c_1\}$ и $\forall\lambda_1\ge 1$.

При $m>1$ правые части неравенств (32) без первого интеграла оцениваются сверху в силу неравенств (5), примененных в четвертом, пятом, шестом и девятом интегралах, и (6) – в седьмом и восьмом интегралах правых частей, величинами

$$\sum_{i=0}^{m-1}c_{2m+2}^{(i)}\int_0^T(T-t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|dt+\sum_{i=0}^{m-2}c_{2m+3}^{(i)}\int_0^T\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}c_{2m+4}^{(k,i)}\int_0^T(T-t)\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{m-k,t}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{m-i,t}dt+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}c_{2m+5}^{(k,i)}\int_0^T\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{m-k,t}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{m-i,t}dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}c_{2m+6}^{(k)}\int_0^T(T-t)\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|^2_{m-k,t}dt+\sum_{k=1}^{m-1}c_{2m+7}^{(k)}\int_0^T\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|^2_{m-k,t}dt+$$

$$+[2c_{2m-1}-(2m-1)c]\int\limits_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{d^mu}{dt^m}\right|^2dt+[1-(2m-1)\lambda_m]\int\limits_0^T e^{c(T-t)}|u|^2_{m,t}\,dt, \qquad (33)$$

где постоянные $c^{(i)}_{2m+p}, c^{(k,i)}_{2m+p}\geq 0$ зависят лишь от c, T, m, $c^{(i)}_s$ и c_s. В первых двух суммах этих величин воспользуемся δ-неравенством, интерполяционными неравенствами

$$\left\|\frac{d^iu}{dt^i}\right\|^2_0\leq\tau^{1-i/m}\frac{i}{m}\left\|\frac{d^mu}{dt^m}\right\|^2_0+\tau^{-i/m}\left(1-\frac{i}{m}\right)\|u\|^2_0, \quad \tau>0, \quad 0<i<m, \qquad (34)$$

$$\int\limits_0^T(T-t)\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2dt\leq\tau^{1-i/m}\frac{i}{m}\int\limits_0^T(T-t)\left|\frac{d^mu}{dt^m}\right|^2dt+\tau^{-i/m}\left(1-\frac{i}{m}\right)\int\limits_0^T(T-t)|u|^2dt, \quad \tau>0, \quad 0<i<m,$$

из [3], а в остальных суммах – δ-неравенством, неравенствами (20) и (21) и

$$|u|\leq\|A_0^{-1}(t)\|^{\alpha}_{\mathcal{L}(H)}|A_0^{\alpha}(t)u| \quad \forall u\in D(A_0^{\alpha}(t)), \quad 0\leq\alpha\leq 1, \qquad (35)$$

при $\alpha=1/2$ и найдем сначала постоянные $c_{2m+8}\geq\max\{c_0^{(1)}, 2c_{2m-1}/(2m-1)\}$, а затем $\hat{\lambda}_m\geq 1$ такие, что при $c=c_{2m+8}$ и $\forall\lambda_m\geq\hat{\lambda}_m$ выражения (33) оцениваются сверху величинами $(1-c_{2m+9})|||u|||^2_m, c_{2m+9}>0$.

Итак, оценивая левые части неравенств (32), взятых при $c=c_2$ и $\forall\lambda_1\geq 1$ для $m=1$ и при $c=c_{2m+8}$ и $\forall\lambda_m\geq\hat{\lambda}_m$ для $m>1$, снизу через $|||u|||^2_m$ и приводя подобные члены, в результате элементарных оценок имеем неравенства

$$c_{2m+9}|||u|||_m\leq 2\sup_{v\in E^m}\left\{\left|\int\limits_0^T(L_m(\lambda_m)u, e^{c_{2m+8}(T-t)}J(t)v)dt\right|/|||v|||_m\right\}.$$

Так как, согласно неравенствам

$$\left\|(T-t)^{-1}\frac{d^kv}{dt^k}\right\|^2_{m-1-k}\leq 8\left\|\frac{d^{k+1}v}{dt^{k+1}}\right\|^2_{m-k-1}+8(\mathcal{M}_{1/(2m)}+\mathcal{M}_{-(m-k)/(2m)})^2\left\|\frac{d^kv}{dt^k}\right\|^2_{m-k}, \quad 0\leq k\leq m-1,$$

доказательство которых аналогично доказательству леммы 5, и неравенствам (20), (34) и (35), нормы $\langle\|e^{c_{2m+8}(T-t)}J(t)v\|\rangle_{m-1}\leq c_{2m+10}|||v|||_m$, то отсюда получаем неравенства (28) с постоянными $c_0(m)=2c_{2m+10}/c_{2m+9}$, которые распространяются предельным переходом с $D(L_m)$ на сильные решения граничных задач (1), (2). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 6. С. 991–999.
2. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 9. С. 1581–1586.
3. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 8. С. 1412–1425.
4. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 4. С. 542–548.
5. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 276–278.
6. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
7. *Ломовцев Ф.Е.* // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 1. С. 13–15.
8. *Юрчук Н.И.* Метод энергетических неравенств в исследовании дифференциально-операторных уравнений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
9. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873–886.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
19.03.2004 г.