Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Yu. L. Ershov, Computable enumerations of morphisms,
Algebra Logika, 1971, Volume 10, Number 3, 247–308

https://www.mathnet.ru/eng/al1297

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.85
December 16, 2025, 15:55:53

Алгебра и логика, 10, № 3 (1971), 247-308.

УДК 517.11:518:5

ВЫЧИСЛИМЫЕ НУМЕРАЦИИ МОРФИЗМОВ

Ю.Л.ЕРШОВ

В настоящей статье вводится и довольно детально изучается понятие вычислимой нумерации семейств морфизмов из одного нумерованного множества в другое. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями и теоремами теории нумераций в объеме книги [2]. Это понятие естественным образом обобщает известное понятие вычислимой нумерации для рекурсивно перечислимых множеств (р.п.множеств), частично рекурсивных функций (ч.р.ф.) и общерекурсивных функций (о.р.ф.) [4]. Естественность этого понятия подтверждается хорошей связью с основными категорными свойствами категории $\mathfrak{N}$ нумерованных множеств. Весьма полезным оказывается понятие представимости функтора (теорема 1 указывает на тесную связь представимости одного естественного функтора с решением основной проблемы существования главной вычислимой нумерации семейства всех морфизмов). Основным приложением полученных здесь результатов является определение понятия частичных вычислимых функционалов всех конечных типов, отличающееся от других известных определений отсутствием каких-либо дополнительных условий типа непрерывности, монотонности и т.п. Детальное изучение этих функционалов составит содержание последующей статьи. Отметим, что все результаты § 5 - основного параграфа настоящей работы - получены зимой 1967-1968 гг.

§ 1. Предварительные сведения

Предполагается, что читатель знаком с такими основными понятиями теории категорий, как ковариантный и контравариантный функтор. Важными для нас примерами категорий являются категория $\mathfrak{N}$ - нумерованных множеств (см. [2]) и категория $\mathcal{S}et$ - всех мно-

жеств.

Примеры функторов:

1. Функтор $Mor\,(\lambda\gamma_0\,\lambda\gamma_1\,Mor\,(\gamma_0,\gamma_1))$ - здесь, как и для функций, используются удобные λ -обозначения - точнее, бифунктор из категории $\mathfrak{N}$ в категорию Set, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму.

Для любых нумерованных множеств γ_0, γ_0', γ_1 и γ_1' и морфизмов $\mu_0 : \gamma_0' \to \gamma_0$ и $\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_1'$ существует отображение

$$Mor\,(\mu_0,\mu_1) : Mor\,(\gamma_0,\gamma_1) \to Mor\,(\gamma_0',\gamma_1'),$$

определенное так: для $\mu \in Mor\,(\gamma_0,\gamma_1)$

$$Mor\,(\mu_0,\mu_1)\mu \rightleftharpoons \mu_1\mu\mu_0\,(\in Mor\,(\gamma_0',\gamma_1')).$$

2. Функтор (бифунктор) $\oplus$ из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$, ковариантный по обоим аргументам:

Пусть $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_1, \gamma_1'$ - нумерованные множества и $\mu_0 : \gamma_0 \to \gamma_0'$, $\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_1'$ - морфизмы, тогда морфизм $\mu_0 \oplus \mu_1 : \gamma_0 \oplus \gamma_1 \to \gamma_0' \oplus \gamma_1'$ определяется так: пусть $i_0 : \gamma_0 \to \gamma_0 \oplus \gamma_1$, $i_1 : \gamma_1 \to \gamma_0 \oplus \gamma_1$, $i_0' : \gamma_0' \to \gamma_0' \oplus \gamma_1'$ и $i_1' : \gamma_1' \to \gamma_0' \oplus \gamma_1'$ - канонические вложения (существующие по определению прямой суммы); для пары морфизмов $i_0'\mu_0 : \gamma_0 \to \gamma_0' \oplus \gamma_1'$ и $i_1'\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_0' \oplus \gamma_1'$ существует и притом единственный морфизм $\mu : \gamma_0 \oplus \gamma_1 \to \gamma_0' \oplus \gamma_1'$ такой, что $\mu i_0 = i_0'\mu_0$ и $\mu i_1 = i_1'\mu_1$. Этот морфизм μ и обозначим $\mu_0 \oplus \mu_1$.

3. Функтор (бифунктор) $\times$ из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$, ковариантный по обоим аргументам:

Пусть γ_0, γ_0', γ_1 и γ_1' - нумерованные множества, $\mu_0 : \gamma_0 \to \gamma_0'$ и $\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_1'$ - морфизмы. Морфизм $\mu_0 \times \mu_1 : \gamma_0 \times \gamma_1 \to \gamma_0' \times \gamma_1'$ определяется так: пусть $p_0 : \gamma_0 \times \gamma_1 \to \gamma_0$, $p_1 : \gamma_0 \times \gamma_1 \to \gamma_1$, $p_0' : \gamma_0' \times \gamma_1' \to \gamma_0'$ и $p_1' : \gamma_0' \times \gamma_1' \to \gamma_1'$ - канонические проекции; для двух морфизмов $\mu_0 p_0 : \gamma_0 \times \gamma_1 \to \gamma_0'$ и $\mu_1 p_1 : \gamma_0 \times \gamma_1 \to \gamma_1'$ существует и притом единственный морфизм $\mu : \gamma_0 \times \gamma_1 \to \gamma_0' \times \gamma_1$ такой, что $p_0'\mu = \mu_0 p_0$ и $p_1'\mu = \mu_1 p_1$, этот морфизм и есть по определению $\mu_0 \times \mu_1$.

4. Функтор LE из $\mathfrak{N}$ в Set, ковариантный, определен в [2] на стр. 59 (это - функтор даже в категорию дистрибутивных решеток). Этот функтор сопоставляет всякому нумерованному множеству семейство всех его e -подмножеств (включая пустое).

5. Функтор F_π из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$ (даже в $\mathfrak{N}_\pi$), ковариантный, - это

функтор пополнения, определен в [2] на стр. 113.

Напомним еще несколько понятий теории категорий. Пусть F_0 и F_1 – два ковариантных функтора из категории $\mathfrak{K}_0$ в категорию $\mathfrak{K}_1$. Естественным преобразованием η функтора F_0 в F_1 назовем класс $\mathfrak{K}_1$-морфизмов $\{\eta_A: F_0(A) \to F_1(A) \mid A$ – объект категории $\mathfrak{K}_0\}$ такой, что для любого морфизма $\mu: A \to B$ категории $\mathfrak{K}_0$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_0(A) & \xrightarrow{\eta_A} & F_1(A) \\ {\scriptstyle F_0(\mu)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_1(\mu)} \\ F_0(B) & \xrightarrow{\eta_B} & F_1(B) \end{array}$$

коммутативна, то есть $F_1(\mu)\eta_A = \eta_B F_0(\mu)$. Аналогично определяется естественное преобразование контравариантных функторов.

Функторы F_0 и F_1 называются естественно изоморфными, если существует такое естественное преобразование η F_0 в F_1, что для любого $A \in \mathfrak{K}_0$ $\eta_A: F_0(A) \to F_1(A)$ есть эквивалентность в категории $\mathfrak{K}_1$ (то есть существует $\mathfrak{K}_1$-морфизм $\mu: F_1(A) \to F_0(A)$ такой, что $\mu\eta_A = 1_{F_1(A)}$ и $\eta_A\mu = 1_{F_0(A)}$). В частности, функторы естественно изоморфны, если существуют такие естественные преобразования η^0 и η^1 F_0 в F_1 и F_1 в F_0, соответственно, что для любого $A \in \mathfrak{K}_0$ $\eta^1_A \eta^0_A = 1_{F_0(A)}$ и $\eta^0_A \eta^1_A = 1_{F_1(A)}$.

Для категории $\mathfrak{N}$ следующие пары функторов естественно изоморфны (понятие изоморфизма легко распространяется и на многоместные функторы):

$$\lambda\gamma_0\lambda\gamma_1(\gamma_0 \oplus \gamma_1) \quad \text{и} \quad \lambda\gamma_0\lambda\gamma_1(\gamma_1 \oplus \gamma_0);$$
$$\lambda\gamma_0\lambda\gamma_1(\gamma_0 \times \gamma_1) \quad \text{и} \quad \lambda\gamma_0\lambda\gamma_1(\gamma_1 \times \gamma_0);$$
$$\lambda\gamma_0\lambda\gamma_1\lambda\gamma_2(\gamma_0 \oplus (\gamma_1 \times \gamma_2)) \quad \text{и} \quad \lambda\gamma_0\lambda\gamma_1\lambda\gamma_2[(\gamma_0 \oplus \gamma_1) \times (\gamma_0 \oplus \gamma_2)].$$

Ковариантный (контравариантный) функтор $F: \mathfrak{K}_0 \to Set$ называется представимым, если существует такой объект $A \in \mathfrak{K}_0$, что функтор F естественно изоморфен функтору

$$\lambda B\, Mor(A,B) \quad (\lambda B\, Mor(B,A)).$$

Без особого труда доказывается, что если функтор представим, то объект, существование которого утверждается, единствен с точностью до эквивалентности.

В качестве примера докажем, что функтор LE представим. Пусть K - креативное множество, $\nu_K : N \to \{0,1\}$ - нумерация, определенная так:

$$\nu_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K; \\ 0, & \text{если } x \notin K, \end{cases}$$

нумерованное множество $(\{0,1\}, \nu_K)$ обозначим через γ_K.

Докажем теперь, что функторы LE и $\lambda\gamma\, Mor(\gamma, \gamma_K)$ естественно изоморфны. Определим отображение $\eta_\gamma : Mor(\gamma, \gamma_K) \to LE(\gamma)$ так: для $\mu \in \gamma \to \gamma_K$, $\eta_\gamma(\mu) \rightleftharpoons \mu^{-1}(1)$. Так как 1 - ν_K - вполне перечислимо, то $\mu^{-1}(1)$ - e -подмножество γ. Следовательно, η_γ есть отображение из $Mor(\gamma, \gamma_K)$ в $LE(\gamma)$. Далее, используя полноту γ_K, нетрудно показать, что η_γ есть отображение на, и, наконец, так как морфизм μ однозначно определяется множеством $\mu^{-1}(1)$, то η_γ есть взаимо однозначное отображение $Mor(\gamma, \gamma_K)$ на $LE(\gamma)$, то есть η_γ есть эквивалентность категории Set. То, что семейство $\{\eta_\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{N}\}$ образует естественное преобразование, проверяется без труда.

Обозначим через $\mathbb{1}$ одноэлементное нумерованное множество, через $\mathbb{2} \rightleftharpoons \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$, через $\mathbb{3} \rightleftharpoons \mathbb{2} \oplus \mathbb{1}$ и т.д. Имеют место эквивалентности следующего вида:

$$\mathbb{2} \oplus \mathbb{3} \approx \mathbb{5}, \quad \mathbb{2} \times \mathbb{4} \approx \mathbb{8} \qquad \text{и т.п.}$$

Далее,

$$\mathbb{1} \times \gamma \approx \gamma \qquad \text{для любого } \gamma \in \mathfrak{N};$$

$$\mathbb{2} \times \gamma \approx \gamma \oplus \gamma;$$

$$\mathbb{3} \times \gamma \approx \gamma \oplus \gamma \oplus \gamma;$$

$$\mathbb{1} \oplus \mathbb{N} \approx \mathbb{N}, \ \mathbb{2} \oplus \mathbb{N} \approx \mathbb{N}, \ldots, \mathbb{N} \oplus \mathbb{N} \approx \mathbb{N};$$

$$\mathbb{1} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}, \ \mathbb{2} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}, \ldots, \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}.$$

Отметим для дальнейшего в явном виде морфизмы, осуществляющие эквивалентность $\mathbb{1} \times \gamma \approx \gamma$. Пусть $\mathbb{1} = (\{0\}, \tilde{\nu})$, $i : \gamma \to \mathbb{1} \times \gamma$ - морфизм, определенный так $i(s) \rightleftharpoons \langle 0, s \rangle$ для $s \in S$; $i^{-1} : \mathbb{1} \times \gamma \to \gamma$ - морфизм, определенный так $i^{-1}(\langle 0, s \rangle) \rightleftharpoons s$ для $s \in S$; тогда, очевидно, $i i^{-1} = 1_{\mathbb{1} \times \gamma}$, $i^{-1} i = 1_\gamma$.

Докажем теперь одно утверждение, которое понадобится в даль -

нейшем.

ЛЕММА 1. Пусть γ_0 и γ_1 - произвольные нумерованные множества, $(\gamma_0 \oplus \gamma_1, i_0, i_1)$ - прямая сумма γ_0 и γ_1, а $(\gamma_0 \times \gamma_1, p_0, p_1)$ - прямое произведение; тогда существуют такие морфизмы $\mu_0 : \gamma_0 \oplus \gamma_1 \to \gamma_0$, $\mu_1 : \gamma_0 \oplus \gamma_1 \to \gamma_1$, $\mu^0 : \gamma_0 \to \gamma_0 \times \gamma_1$ и $\mu^1 : \gamma_1 \to \gamma_0 \times \gamma_1$, что $\mu_0 i_0 = 1_{\gamma_0}$, $\mu_1 i_1 = 1_{\gamma_1}$, $p_0 \mu^0 = 1_{\gamma_0}$ и $p_1 \mu^1 = 1_{\gamma_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in S_0$, $b \in S_1$ - произвольные выбранные элементы. Определим $\mu_a : \gamma_1 \to \gamma_0$ так: $\mu_a(s_1) \leftrightharpoons a$ для всех $s_1 \in S_1$; $\mu_b : \gamma_0 \to \gamma_1$ так $\mu_b(s_0) = b$ для всех $s_0 \in S_0$. Очевидно, что μ_a и μ_b - морфизмы. Положим далее $\mu_0 \leftrightharpoons 1_{\gamma_0} \oplus \mu_b$ и $\mu_1 \leftrightharpoons \mu_a \oplus 1_{\gamma_1}$. Равенства $\mu_0 i_0 = 1_{\gamma_0}$ и $\mu_1 i_1 = 1_{\gamma_1}$ легко проверяются.

Определим морфизмы $\mu^0 : \gamma_0 \to \gamma_0 \times \gamma_1$ и $\mu^1 : \gamma_1 \to \gamma_0 \times \gamma_1$ так:

$$\mu^0(s_0) \leftrightharpoons \langle s_0, b \rangle \text{ для всех } s_0 \in S_0;$$

$$\mu^1(s_1) \leftrightharpoons \langle a, s_1 \rangle \text{ для всех } s_1 \in S_1,$$

тогда, очевидно, имеем $p_0 \mu^0 = 1_{\gamma_0}$ и $p_1 \mu^1 = 1_{\gamma_1}$. Лемма доказана.

Используя другую терминологию, можно сказать в соответствии с леммой 1, что всякое нумерованное множество является ретрактом прямой суммы (и прямого произведения) его с любым другим нумерованным множеством.

§ 2. Основное определение

Пусть $\gamma_0 = (S_0, \nu_0)$ и $\gamma_1 = (S_1, \nu_1)$ - два нумерованных множества. Отображение ν множества N натуральных чисел на некоторое подмножество M из $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ назовем вычислимой нумерацией семейства морфизмов M из γ_0 в γ_1, если отображение $\hat{\nu} : N \times S_0 \to S_1$, определенное как

$$\hat{\nu}(x, s) \leftrightharpoons [\nu(x)](s), \; x \in N, \; s \in S_0 \; (\nu(x) \in M \subseteq Mor(\gamma_0, \gamma_1)),$$

является морфизмом из $N \times \gamma_0$ в γ_1.

СЛЕДСТВИЕ. Отображение

$$\nu : N \xrightarrow{\text{на}} M \, (\subseteq Mor(\gamma_0, \gamma_1))$$

является вычислимой нумерацией, ес-

ли и только если существует двуместная о.р.ф. f такая, что для всех $x, y \in N$

$$[\nu(x)](\gamma_0(y)) = \nu_1 f(x,y).$$

Главной проблемой, которой посвящена большая часть статьи, является проблема P для пары (γ_0, γ_1) нумерованных множеств: существует ли вычислимая нумерация $\tilde{\nu}: N \longrightarrow Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ множества всех морфизмов из γ_0 в γ_1, такая, что для любой вычислимой нумерации $\nu: N \to M$ $(\subseteq Mor(\gamma_0, \gamma_1))$ любого семейства морфизмов из γ_0 в γ_1, $\nu \leq \tilde{\nu}$ (ν -сводится к $\tilde{\nu}$, то есть существует о.р.ф. g такая, что $\nu = \tilde{\nu} g$) ?

Проблема P разрешима для пары (γ_0, γ_1), если существует такая нумерация $\tilde{\nu}$, которую будем называть главной вычислимой нумерацией множества $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$. В противном случае проблема P неразрешима для пары (γ_0, γ_1).

В случае разрешимости проблемы P для (γ_0, γ_1) нумерованное множество $(Mor(\gamma_0, \gamma_1), \tilde{\nu})$, где $\tilde{\nu}$ - главная вычислимая нумерация, будем обозначать $\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$ (заметим, что главная вычислимая нумерация $\tilde{\nu}$, если существует, то определяется однозначно с точностью до эквивалентности, так, что и нумерованное множество $\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$ определено однозначно с точностью до эквивалентности).

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть $\gamma_0 = \gamma_1 = \mathbb{N}$. Тогда семейство $Mor(\gamma_0, \gamma_1) = Mor(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ естественным образом отождествляется с семейством одноместных о.р.ф. Используя следствие, легко проверить, что отображение $\nu: N \to M (\subseteq Mor(\mathbb{N}, \mathbb{N}))$ есть вычислимая нумерация тогда и только тогда, когда ν есть вычислимая нумерация соответствующего семейства о.р.ф. в хорошо известном смысле [4].

Далее, известно, что семейство всех одноместных о.р.ф. не имеет ни одной вычислимой нумерации, так что проблема P для пары $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ неразрешима.

ПРИМЕР 2. Для любого нумерованного множества γ проблема P разрешима для пар $(\gamma, \mathbb{1})$ и $(\mathbb{1}, \gamma)$. Читателю предоставляется возможность проверить следующие эквивалентности:

$$\mathfrak{M}or(\gamma, \mathbb{1}) \approx \mathbb{1} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}or(\mathbb{1}, \gamma) \approx \gamma.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим пару $(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{N}))$, тогда морфизмы из $\mathcal{N}$ в $F_\pi(\mathcal{N})$ легко отождествляются с одноместными частично рекурсивными функциями, и нумерация $\nu : \mathcal{N} \to M\,(\subseteq Mor(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{N}))$ будет вычислимой, если и только если соответствующая нумерация ч.р.ф. будет вычислимой в обычном смысле. Отсюда легко вытекает, что проблема P разрешима для пары $(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{N}))$ и имеет место эквивалентность

$$\mathfrak{M}or(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{N})) \approx \mathcal{K}.$$

ПРИМЕР 3. Как в примере 3, морфизмы из $\mathcal{N}$ в $F_\pi(\mathcal{Z})$ отождествляются с одноместными частично рекурсивными функциями, принимающими только значение 0 и 1, а вычислимые нумерации этих морфизмов с вычислимыми нумерациями соответствующих функций. Как известно, существует главная вычислимая нумерация для семейства всех одноместных частично рекурсивных функций, принимающих только значения 0 и 1.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим пару $(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{A}))$. Из определения функтора F_π легко вытекает, что $F_\pi(\mathcal{A}) \approx \mathcal{J}_\mathcal{K}$ (см. предыдущий параграф). Морфизмы из $\mathcal{N}$ в $F_\pi(\mathcal{A})$ отождествляются легко с рекурсивно перечислимыми множествами, и вычислимость нумерации некоторого семейства из $Mor(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{A}))$ равносильна вычислимости нумерации соответствующих р.п.множеств (в обычном смысле). Тогда проблема P разрешима для пары $(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{A}))$, и имеет место эквивалентность

$$\mathfrak{M}or(\mathcal{N}, F_\pi(\mathcal{A})) \approx \Pi.$$

Пример 1 показывает, что проблема P может быть неразрешимой. Пример 3 подсказывает введение следующего важного понятия.

Частичным морфизмом из $\mathcal{J}_0$ в $\mathcal{J}_1$ назовем либо пустое отображение, либо произвольный морфизм из $\mathcal{C}$-подобъекта $\mathcal{J}_0$ в $\mathcal{J}_1$. Пусть $(\mathcal{J}, \mu)$ – $\mathcal{C}$-подобъект $\mathcal{J}_0$ и $\mu_0 : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$, тогда $(\mathcal{J}, \mu)$ называется областью определения частичного морфизма μ_0. Два частичных морфизма из $\mathcal{J}_0$ в $\mathcal{J}_1$ равны, если они либо пусты одновременно, либо они имеют вид $\mu : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$, $\mu' : \mathcal{J}' \to \mathcal{J}_1$, где $(\mathcal{J}, \mu_0)$ и $(\mathcal{J}', \mu_0')$ – $\mathcal{C}$-подобъекты $\mathcal{J}_0$, их области определения эквивалентны, то есть существует морфизм $\bar{\mu} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}'$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \gamma \arrow[rr, "\bar{\mu}"] \arrow[dr, "\mu_0"'] & & \gamma' \arrow[dl, "\mu'_0"] \\ & \gamma_0 & \end{tikzcd}$$

коммутативна (такой морфизм $\bar{\mu}$, если существует, то единственный), и имеет место равенство $\mu = \mu'\bar{\mu}$, то есть диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \gamma \arrow[dl, "\mu_0"'] \arrow[dr, "\mu"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & \\ \gamma_0 & & \gamma_1 \\ & \gamma' \arrow[ul, "\mu'_0"] \arrow[ur, "\mu'"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Равенство частичных морфизмов μ и μ' будем обозначать $\mu \simeq \mu'$. Семейство всех частичных морфизмов из γ_0 в γ_1 (с указанным отождествлением) будем обозначать $Mor_p(\gamma_0, \gamma_1)$.

Частичные морфизмы из γ в N назовем частично рекурсивными функционалами на γ. Таким образом, частично рекурсивные функционалы на γ отождествляются с морфизмами из γ в $F_\pi(N)$.

ЛЕММА 2. Имеет место естественный изоморфизм функторов (из $\mathfrak{N}^2$ в $\mathcal{S}et$):

$$\lambda\gamma_0\lambda\gamma_1 Mor_p(\gamma_0, \gamma_1) \text{ и } \lambda\gamma_0\lambda\gamma_1 Mor(\gamma_0, F_\pi(\gamma_1)).$$

Оставляя детали проверки читателю, укажем только отображение $\eta_{\gamma_0,\gamma_1} : Mor(\gamma_0, F_\pi(\gamma_1)) \longrightarrow Mor_p(\gamma_0, \gamma_1)$. Пусть $\mu : \gamma_0 \longrightarrow F_\pi(\gamma_1)$, так как (γ_1, η) – e – подобъект $F_\pi(\gamma_1)$, то существует e –подмножество в γ_0, являющееся μ –прообразом множества $\eta(S_1)$; если оно непусто, то этим определен некоторый e –подобъект γ_0 и легко задать морфизм из него в γ_1, это и будет

$$\eta_{\gamma_0,\gamma_1}(\mu) \in Mor_p(\gamma_0, \gamma_1).$$

Если же прообраз пуст, то $\eta_{\gamma_0,\gamma_1}(\mu)$ – нигде не определенное отображение, которое также принадлежит $Mor_p(\gamma_0, \gamma_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В ситуации леммы 2 также можно говорить о некоторой представимости бифунктора Mor_p функтором F_π.

Лемма 2 подсказывает и естественное определение вычислимости нумерации некоторого семейства частичных морфизмов из γ_0 в γ_1. Примеры 1 и 3 показывают, что проблему нахождения главной вычис –

лимой нумерации для семейства всех частичных морфизмов иногда "легче" решить, чем проблему нахождения главной вычислимой нумерации для семейства всех морфизмов.

Заметим, что имеется естественное вложение $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ в $Mor_P(\gamma_0, \gamma_1)$ (будем даже считать, что $Mor(\gamma_0, \gamma_1) \subseteq Mor_P(\gamma_0, \gamma_1)$), причём если $\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$ и $\mathfrak{M}or_P(\gamma_0, \gamma_1)$ ($\leftrightharpoons \mathfrak{M}or(\gamma_0, F_\pi(\gamma_1))$) существуют, то это вложение есть морфизм. Более того, если проблема P разрешима для пары $(\gamma_0, F_\pi(\gamma_1))$, то проблема P разрешима для пары (γ_0, γ_1) тогда и только тогда, когда $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ есть главное подмножество в $\mathfrak{M}or_P(\gamma_0, \gamma_1)$.

Докажем теперь лемму, необходимую в доказательстве теоремы 1 и имеющую определенный самостоятельный интерес.

ЛЕММА 3. Пусть проблема P разрешима для пары (γ_0, γ_1), тогда отображение композиции $\lambda : S_0 \times Mor(\gamma_0, \gamma_1) \longrightarrow S_1$ (определенное так $\lambda(s_0, \mu) \leftrightharpoons \mu(s_0)$, $s_0 \in S_0$, $\mu \in Mor(\gamma_0, \gamma_1)$) является морфизмом из $\gamma_0 \times \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$ в γ_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\nu} : N \longrightarrow M (\subseteq Mor(\gamma_0, \gamma_1))$ - вычислимая нумерация, тогда существует двуместная о.р.ф. $h_{\bar{\nu}}$ такая, что для $x, y \in N$ $[\bar{\nu}(x)](\nu_0(y)) = \nu_1 h_{\bar{\nu}}(x, y)$. Заметим, что

$$\lambda(\langle \nu_0(y), \bar{\nu}(x) \rangle) = [\bar{\nu}(x)](\nu_0(y)).$$

Если $\bar{\nu}$ - главная вычислимая нумерация, то имеем соотношение

$$\lambda(\langle \nu_0(y), \bar{\nu}(x) \rangle) = \nu_1 h_{\bar{\nu}}(x, y);$$

отсюда и следует лемма. Заметим, что доказано больше:

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\nu : N \longrightarrow M (\subseteq Mor(\gamma_0, \gamma_1))$ - вычислимая нумерация, тогда ограничение отображения композиции λ на $S_0 \times M$ есть морфизм из $\gamma_0 \times (M, \nu)$ в γ_1.

В заключение параграфа докажем теорему, которая показывает "категорную естественность" введенных основных понятий. Эта теорема будет полезна и в дальнейших параграфах.

ТЕОРЕМА 1. Для любой пары нумерованных множеств $\gamma_0 = (S_0, \nu_0)$ и $\gamma_1 = (S_1, \nu_1)$ следующие два утверждения эквива -

лентны:

1) Для пары (γ_0, γ_1) разрешима проблема P ;

2) Функтор $\lambda\gamma Mor(\gamma\times\gamma_0, \gamma_1) : \mathfrak{N} \rightsquigarrow Set$ представим.

При выполнении этих условий $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$ является решением проблемы представления указанного функтора, то есть функторы

$$\lambda\gamma Mor(\gamma\times\gamma_0, \gamma_1) \quad \text{и} \quad \lambda\gamma Mor(\gamma, \mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1))$$

естественно изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ 2). Для этого достаточно установить сформулированный выше изоморфизм функторов (по предположению $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$ существует). Для любого нумерованного множества $\gamma = (S, \nu)$ построим подходящее отображение

$$\varepsilon_\gamma : Mor(\gamma\times\gamma_0, \gamma_1) \longrightarrow Mor(\gamma, \mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1))$$

(нижний индекс γ далее часто будем опускать).

Пусть $\mu : S\times S_0 \longrightarrow S_1$ - отображение, которое есть морфизм из $\gamma\times\gamma_0$ в γ_1. Определим отображение $\varepsilon(\mu) : S \longrightarrow Map(S_0, S_1)$ так: $\varepsilon(\mu)(s) \leftrightharpoons \lambda s_0 \mu(s, s_0)$, $s\in S$, s_0 пробегает S_0. Нужно проверить, что для каждого $s\in S \longrightarrow \varepsilon(\mu)(s) \in Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ и что $\varepsilon(\mu) : S \longrightarrow Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ есть морфизм из γ в $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$. Так как μ есть морфизм из $\gamma\times\gamma_0$ в γ_1, то существует двуместная о.р.ф. g такая, что $\mu(\nu(x), \nu_0(y)) = \nu_1 g(x, y)$ для всех $x, y\in N$. Пусть $s\in S$ и $x\in N$ таково, что $\nu(x) = s$, тогда для отображения $\mu_s : S_0 \longrightarrow S_1$, определенного так $\mu_s \leftrightharpoons \lambda s_0 \mu(s, s_0)$, и функции $g_x \leftrightharpoons \lambda y g(x, y)$ имеем:

$$\mu_s \nu_0(y) = \mu(s, \nu_0(y)) = \mu(\nu(x), \nu_0(y)) = \nu_1 g(x, y) = \nu_1 g_x(y).$$

Следовательно, для любого $s\in S$ отображение $\mu_s : S_0 \longrightarrow S_1$ есть морфизм из γ_0 в γ_1. Итак, $\varepsilon(\mu)$ есть отображение из S в $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$. Покажем, что $\varepsilon(\mu)$ - морфизм из γ в $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$. Рассмотрим отображение $(\nu\times 1_{S_0}) : N\times S_0 \longrightarrow S\times S_0$, которое, очевидно, является морфизмом из $N\times\gamma_0$ в $\gamma\times\gamma_0$, следовательно, и отображение

$$\mu(\nu\times 1_{S_0}) : N\times S_0 \longrightarrow S_1$$

является морфизмом из $N\times\gamma_0$ в γ_1 (заметим, кстати, что

$$\mu(\nu\times 1_{S_0})(x, \nu_0(y)) = \mu(\nu(x), \nu_0(y)) = \nu_1 g(x, y)).$$

Тогда отображение $n \rightsquigarrow \lambda s_0 \mu(\nu(n), s_0)$ $(N \to Mor(\gamma_0, \gamma_1))$ есть вычислимая нумерация (по определению!) некоторого семейства морфизмов из $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$. Если $\tilde{\nu}$ – нумерация нумерованного множества $\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$, то существует о.р.ф. h такая, что $\lambda s_0 \mu(\nu(n), s_0) = \tilde{\nu} h(n)$ для любого $n \in N$. Теперь имеем

$$\varepsilon(\mu)\nu(x) = \mu_{\nu(x)} = \lambda s_0 \mu(\nu(x), s_0) = \tilde{\nu} h(x),$$

следовательно, $\varepsilon(\mu)$ – морфизм из γ в $\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$.

Докажем, что семейство отображений $\{\varepsilon_\gamma, \ \gamma \in \mathfrak{N}\}$ определяет естественное преобразование функтора $\lambda\gamma\, Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1)$ в функтор $\lambda\gamma\, Mor(\gamma, \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1))$. Проверка этого не представляет никаких трудностей. Покажем, например, что если $\mu' : \gamma \to \gamma'$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
Mor(\gamma' \times \gamma_0, \gamma_1) & \xrightarrow{\varepsilon_{\gamma'}} & Mor(\gamma', \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle Mor(\mu' \times 1_{\gamma_0}, 1_{\gamma_1})} & & \Big\downarrow {\scriptstyle Mor(\mu', 1_{\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)})} \\
Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1) & \xrightarrow{\varepsilon_\gamma} & Mor(\gamma, \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1))
\end{array}$$

коммутативна. Действительно, пусть $\mu : \gamma' \times \gamma_0 \to \gamma_1$ – морфизм. Тогда $[Mor(\mu', 1)\varepsilon_{\gamma'}(\mu)](s) = \varepsilon_{\gamma'}(\mu)(\mu'(s)) = \lambda s_0 \mu(\mu'(s), s_0)$ и $[[\varepsilon_\gamma Mor(\mu' \times 1, 1)](\mu)](s) = \varepsilon_\gamma[\mu(\mu', 1)](s) = \lambda s_0 \mu(\mu'(s), s_0))$. Следовательно, $Mor(\mu', 1)\varepsilon_{\gamma'} = \varepsilon_\gamma Mor(\mu' \times 1, 1)$, что и нужно.

Построим теперь обратное преобразование η. Пусть $\gamma = (S, \nu)$ – произвольное нумерованное множество и $\mu \in Mor(\gamma, \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1))$. Тогда отображение $\eta(\mu) : S \times S_0 \to S_1$ определяется так: $\eta(\mu)(s, s_0) \rightleftharpoons [\mu(s)](s_0)$. Нужно проверить, что это отображение есть морфизм из $\gamma \times \gamma_0$ в γ_1. Так как μ – морфизм, то существует о.р.ф. h такая, что $\mu\nu = \tilde{\nu} h$. Далее, по лемме 3 отображение λ:

$$S_0 \times Mor(\gamma_0, \gamma_1) \to S_1,$$

определенное так $\lambda(s_0, \mu) \rightleftharpoons \mu(s_0)$, есть морфизм из $\gamma_0 \times \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$ в γ_1 и, следовательно, существует двуместная о.р.ф. g такая, что $\lambda(\nu_0(x), \tilde{\nu}(y)) = \nu_1 g(x, y)$. Теперь имеем

$$\eta(\mu)(\nu(x), \nu_0(y)) = [\mu\nu(x)](\nu_0(y)) = [\tilde{\nu} h(x)](\nu_0(y)) =$$

$$= \lambda(\nu_0(y), \tilde{\nu} h(x)) = \nu_1 g(y, h(x)).$$

Следовательно, для $G(x, y) \rightleftharpoons g(y, h(x))$ имеем

$$\eta(\mu)(\nu(x), \nu_0(y)) = \nu_1 G(x,y),$$

и $\eta(\mu)$ - морфизм из $\gamma \times \gamma_0$ в γ_1, а η - отображение из

$Mor(\gamma, \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1))$ в $Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1)$.

Так же без труда проверяется, что $\{\eta_\gamma, \gamma \in \mathfrak{N}\}$ есть естественное преобразование функторов. Проверим теперь, что ε и η взаимно обратные отображения. Пусть $\mu \in Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1)$, тогда

$$\eta\varepsilon\mu(s,s_0) = \eta\mu_s(s_0) = \mu_s(s_0) = \mu(s,s_0) \text{ и } \eta\varepsilon\mu = \mu.$$

Пусть $\mu \in Mor(\gamma, \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1))$, тогда

$$[\varepsilon\eta\mu(s)](s_0) = \varepsilon([\mu(s)](s_0)) = [\mu(s)](s_0) \text{ и } \varepsilon\eta\mu(s) = \mu(s)$$

и $\varepsilon\eta\mu = \mu$. Таким образом, изоморфизм функторов $\lambda\gamma Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1)$ и $\lambda\gamma Mor(\gamma, \mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1))$ (в предположении существования $\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1)$) доказан.

2) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что функтор $\lambda\gamma Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1): \mathfrak{N} \to \mathfrak{Set}$ представим, пусть $\bar{\gamma} = (\bar{S}, \bar{\nu})$ - такой объект $\mathfrak{N}$, что функторы $\lambda\gamma Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1)$ и $Mor(\gamma, \bar{\gamma})$ эквивалентны, а

$$\varepsilon_\gamma : Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1) \to Mor(\gamma, \bar{\gamma}), \quad \gamma \in \mathfrak{N},$$

и

$$\eta_\gamma : Mor(\gamma, \bar{\gamma}) \to Mor(\gamma \times \gamma_0, \gamma_1), \quad \gamma \in \mathfrak{N},$$

- соответствующие взаимно обратные естественные преобразования этих функторов.

Напомним, что $\mathbb{1} = (\{0\}, \hat{\nu})$ - это нумерованное множество, состоящее из единственного элемента 0. Для каждого натурального числа $n \in N$ определим морфизм $\bar{n}: \mathbb{1} \to \mathbb{N}$ так $\bar{n}(0) \rightleftharpoons n$. Рассмотрим множества $Mor(\mathbb{N} \times \gamma_0, \gamma_1)$, $Mor(\mathbb{1} \times \gamma_0, \gamma_1)$, $Mor(\mathbb{N}, \bar{\gamma})$ и $Mor(\mathbb{1}, \bar{\gamma})$. Морфизм $\bar{n}: \mathbb{1} \to \mathbb{N}$ индуцирует отображения:

$$Mor(\bar{n} \times 1_{\gamma_0}, 1_{\gamma_1}): Mor(\mathbb{N} \times \gamma_0, \gamma_1) \to Mor(\mathbb{1} \times \gamma_0, \gamma_1)$$

и

$$Mor(\bar{n}, 1_{\bar{\gamma}}): Mor(\mathbb{N}, \bar{\gamma}) \to Mor(\mathbb{1}, \bar{\gamma}).$$

Для простоты оба эти отображения обозначим ϑ_n. Таким образом, имеем: для $\mu \in Mor(\mathbb{N} \times \gamma_0, \gamma_1)$ $[\vartheta_n \mu]\langle 0, s_0\rangle = \mu(n, s_0)$

для любого $s_0 \in S_0$; для $\mu \in Mor(N, \bar{\gamma})$ $[\vartheta_n \mu](0) = \mu(n)$.
Далее, отображение $i : S_0 \to \{0\} \times S_0$, определенное так $i(s_0) \leftrightharpoons \leftrightharpoons \langle 0, s_0 \rangle$, есть, очевидно, морфизм (даже эквивалентность) из γ_0 в $\mathbb{1} \times \gamma_0$; соответствующее индуцированное отображение

$$Mor(i, 1_{\gamma_1}) : Mor(\mathbb{1} \times \gamma_0, \gamma_1) \to Mor(\gamma_0, \gamma_1)$$

обозначим через α . Итак, для $\mu : \mathbb{1} \times \gamma_0 \to \gamma_1$ и $s_0 \in S_0$ имеем

$$[\alpha\mu](s_0) = \mu(\langle 0, s_0 \rangle).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму (для любого $n \in N$):

$$\begin{tikzcd}
Mor(N \times \gamma_0, \gamma_1) \arrow[r, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, "\vartheta_n"'] & Mor(N, \bar{\gamma}) \arrow[l, shift left, "\eta"] \arrow[d, "\vartheta_n"] & ; \\
Mor(\mathbb{1} \times \gamma_0, \gamma_1) \arrow[r, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"'] & Mor(\mathbb{1}, \bar{\gamma}) \arrow[l, shift left, "\eta"] & ; \\
Mor(\gamma_0, \gamma_1) & &
\end{tikzcd}$$

Нумерация $\bar{\nu} : N \to \bar{S}$ множества $\bar{S}$ является морфизмом из N в $\bar{\gamma}$, так что можно считать, что $\bar{\nu} \in Mor(N, \bar{\gamma})$. Определим отображение $\nu^* : N \to Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ следующим образом: $\nu^*(n) \leftrightharpoons \alpha\eta\vartheta_n(\bar{\nu})$ для любого $n \in N$.

Пока нельзя утверждать, что ν^* есть нумерация множества $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$, но ν^* есть нумерация некоторого семейства $(\nu^*(N))$ морфизмов из γ_0 в γ_1 . Покажем, что ν^* - вычислимая нумерация этого семейства. Для этого (по определению) нужно показать, что отображение: $\mu : N \times S_0 \to S_1$, определенное так $\mu(n, s_0) \leftrightharpoons [\nu^*(n)](s_0)$, для $n \in N$, $s_0 \in S_0$ есть морфизм из $N \times \gamma_0$ в γ_1 . Рассмотрим морфизм $\eta(\bar{\nu}) : N \times \gamma_0 \to \gamma_1$ и покажем, что $\mu = \eta(\bar{\nu})$. Пусть $n \in N$, $s_0 \in S_0$.

$$[\eta(\bar{\nu})](n, s_0) = [\vartheta_n \eta(\bar{\nu})](0, s_0) = [\alpha\vartheta_n \eta(\bar{\nu})](s_0) = [\alpha\eta\vartheta_n(\bar{\nu})](s_0) = [\nu^*(n)](s_0) = \mu(n, s_0).$$

Желаемое равенство доказано.

Покажем теперь, что если ν - любая вычислимая нумерация некоторого семейства морфизмов из γ_0 в γ_1 , то существует о.р.ф. g такая, что $\nu = \nu^* g$. Отсюда легко следует, что ν^* - нумерация множества $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ (так как любое одноэлементное подмножество из $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ имеет вычислимую нумерацию) и, более того, что ν^* есть решение проблемы P .

Пусть ν - вычислимая нумерация некоторого семейства морфизмов из γ_0 в γ_1. Тогда отображение $\mu : N \times S_0 \longrightarrow S_1$, определенное так $\mu(n, s_0) \rightleftharpoons [\nu(n)](s_0)$, для $n \in N$, $s_0 \in S_0$ есть морфизм из $N \times \gamma_0$ в γ_1, то есть $\mu \in Mor(N \times \gamma_0, \gamma_1)$. ε - образ μ $\varepsilon\mu \in Mor(N, \bar{\gamma})$, следовательно, существует о.р.ф. g такая, что $\varepsilon\mu = \bar{\nu} g$. Пусть $n \in N$, $s_0 \in S_0$. Имеем следующие равенства:

$$[\nu(n)](s_0) = \mu(n, s_0) = [\vartheta_n \mu](0, s_0) = [\alpha \vartheta_n \mu](s_0) =$$

$$= [\alpha \eta \gamma_n (\varepsilon\mu)](s_0) = [\alpha \eta \gamma_n \bar{\nu} g](s_0) = [\alpha \eta \gamma_{g(n)}, \bar{\nu}](s_0) = [\nu^* g(n)](s_0).$$

Итак, $\gamma = \nu^* g$. Утверждение, а вместе с ним и теорема доказаны.

§ 3. Функторные свойства

В этом параграфе будет показано, что объект $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$ (когда он определен) ведет себя "вполне хорошо" по отношению к общекатегорным отображениям. Теорема 1, доказанная в предыдущем параграфе, вместе с утверждением единственности (конечно, с точностью до эквивалентности) решения проблемы представления будет весьма полезна в доказательствах этого параграфа. Заметим, что лемма 3 и её следствие, доказанные в предыдущем парграфе, также указывают на функторные свойства $\mathfrak{Mor}$.

Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_0', \gamma_1'$ - нумерованные множества такие, что для пар (γ_0, γ_1) и (γ_0', γ_1') разрешима проблема P, то есть существуют нумерованные множества $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\mu_0 : \gamma_0' \to \gamma_0$ и $\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_1'$ - морфизмы, то отображение

$$Mor(\mu_0, \mu_1) : Mor(\gamma_0, \gamma_1) \longrightarrow Mor(\gamma_0', \gamma_1')$$

есть морфизм из $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$ в $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$. Более того:

1) если μ_0 - эпиморфизм, μ_1 - мономорфизм, то $Mor(\mu_0, \mu_1)$ - мономорфизм;

2) если μ_0 - факторизация, а (γ_1, μ_1) - главный подобъект γ_1', то $(\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1), Mor(\mu_0, \mu_1))$ - главный подобъект $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$;

3) если μ_0 и μ_1 - эквивалентности, то и $Mor(\mu_0, \mu_1)$ - также эквивалентность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что отображение $Mor(\mu_0,\mu_1)$ определяется так: для $\mu\in Mor(\gamma_0,\gamma_1)$ $[Mor(\mu_0,\mu_1)](\mu)=\mu_1\mu\mu_0$. Пусть $\bar{\nu}: N\to Mor(\gamma_0,\gamma_1)$ – нумерация $\mathfrak{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$, тогда отображение $\bar{\mu}: N\times S_0\to S_1$, определенное так: $\bar{\mu}(x,s_0)=[\bar{\nu}(x)](s_0)$, для $x\in N$, $s_0\in S_0$ есть морфизм из $N\times\gamma_0$ в γ_1. Отображение

$$1_N\times\mu_0: N\times S_0'\to N\times S_0 \quad ([1_N\times\mu_0](x,s_0')=(x,\mu_0(s_0')))$$

есть морфизм из $N\times\gamma_0'$ в $N\times\gamma_0$. Рассмотрим последовательность нумерованных множеств и их отображений (морфизмов)

$$N\times\gamma_0' \xrightarrow{1_N\times\mu_0} N\times\gamma_0 \xrightarrow{\bar{\mu}} \gamma_1 \xrightarrow{\mu_1} \gamma_1'.$$

Композиция этих морфизмов $\bar{\mu}'\leftrightharpoons\mu_1\bar{\mu}(1_N\times\mu_0)$ есть морфизм из $N\times\gamma_0'$ в γ_1'. Тогда если $\bar{\nu}'$ – нумерация $\mathfrak{M}or(\gamma_0',\gamma_1')$, то должна существовать о.р.ф. g такая, что для любого $x\in N$, $\lambda s_0'\bar{\mu}'(x,s_0')=\bar{\nu}'g(x)$, но $\lambda s_0'\bar{\mu}'(x,s_0')=\lambda s_0'\mu_1\bar{\mu}(1_N\times\mu_0)(x,s_0')=\lambda s_0'\mu_1\bar{\mu}(x,\mu_0(s_0'))=$ $=\lambda s_0'\mu_1[\bar{\nu}(x)](\mu_0(s_0'))=\mu_1[\bar{\nu}(x)]\mu_0=[Mor(\mu_0,\mu_1)]\,\bar{\nu}(x)$.
Итак, $[Mor(\mu_0,\mu_1)]\bar{\nu}=\bar{\nu}'g$, следовательно, $Mor(\mu_0,\mu_1)$ есть морфизм из $\mathfrak{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$ в $\mathfrak{M}or(\gamma_0',\gamma_1')$.

Проверим теперь остальные утверждения предложения. Утверждение 1) очевидно, так как понятия эпиморфизма и мономорфизма в категории $\mathfrak{N}$ совпадают с понятиями отображения на и одно-однозначного отображения (являющегося, конечно, морфизмом) (см. [2]), а соответствующее свойство для отображений хорошо известно.

Утверждение 3) также легко проверить. Пусть $\mu_0': \gamma_0\to\gamma_0'$ и $\mu_1': \gamma_1'\to\gamma_1$ – морфизмы, обратные соответственно морфизмам μ_0 и μ_1 (таковые существуют в предположении, что μ_0 и μ_1 – эквивалентности в категории $\mathfrak{N}$). Тогда $Mor(\mu_0',\mu_1')$ есть морфизм из $\mathfrak{M}or(\gamma_0',\gamma_1')$ в $\mathfrak{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$, причем, как нетрудно проверить, обратный к морфизму $Mor(\mu_0,\mu_1)$. Остается проверить утверждение 2). Пусть μ_0 – факторизация, а μ_1 – такой морфизм из γ_1 в γ_1', что (γ_1,μ_1) – главный подобъект γ_1'. По утверждению 1) $Mor(\mu_0,\mu_1)$ есть мономорфизм, так что $(\mathfrak{M}or(\gamma_0,\gamma_1), Mor(\mu_0,\mu_1))$ есть подобъект $\mathfrak{M}or(\gamma_0',\gamma_1')$. Нужно показать, что это главный подобъект. Пусть γ_2 – произвольное нумерованное множество и μ_2 – морфизм из γ_2 в $\mathfrak{M}or(\gamma_0',\gamma_1')$ такой, что $\mu_2(S_2)\subseteq Mor(\mu_0,\mu_1)(Mor(\gamma_0,\gamma_1))$. Рассмотрим отображение $\bar{\mu}_2=\eta(\mu_2): S_2\times S_0'\to S_1'$, определенное так: $\bar{\mu}_2(s_2,s_0')\leftrightharpoons[\mu_2(s_2)](s_0')$ для любых $s_2\in S_2$ и $s_0'\in S_0'$. По

теореме 1 $\eta(\mu_2)=\bar{\mu}_2$ - морфизм из $\gamma_2\times\gamma_0'$ в γ_1'. Так как $\mu_2(S_2)\subseteq$ $\subseteq Mor(\mu_0,\mu_1)(Mor(\gamma_0,\gamma_1))$, то $\bar{\mu}_2(S_2\times S_0')\subseteq\mu_1(S_1)$. По условию (γ_1,μ_1) - главный подобъект γ_1', поэтому существует морфизм $\bar{\mu}_1:\gamma_2\times\gamma_0'\to\gamma_1$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\gamma_1 \arrow[rr, "\mu_1"] & & \gamma_1' \\
& \gamma_2\times\gamma_0' \arrow[ul, "\bar{\mu}_1"] \arrow[ur, "\bar{\mu}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Рассмотрим морфизм $1_{\gamma_0}\times\mu_0:\gamma_2\times\gamma_0'\longrightarrow\gamma_2\times\gamma_0$. Этот морфизм является, очевидно, факторизацией, так как 1_{γ_0} и μ_0 - факторизации. Проверим, что если $s,s'\in S_0'$ таковы, что $\mu_0(s)=\mu_0(s')$, то для любого $s_2\in S_2$ $\bar{\mu}_1(s_2,s)=\bar{\mu}_1(s_2,s')$. Так как μ_1 - мономорфизм, то достаточно проверить равенство $\mu_1\bar{\mu}_1(s_2,s)=\mu_1\bar{\mu}_1(s_2,s')$ или $\bar{\mu}_2(s_2,s)=$ $=\bar{\mu}_2(s_2,s')$, ввиду коммутативности диаграммы.

$$\bar{\mu}_2(s_2,s)=[\mu_2(s_2)](s),\ \mu_2(s_2)\in Mor(\mu_0,\mu_1)(Mor(\gamma_0,\gamma_1)),$$

поэтому существует $\mu\in Mor(\gamma_0,\gamma_1)$ такой, что $\mu_2(s_2)=\mu_1\mu\mu_0$. Тогда

$$\bar{\mu}_2(s_2,s)=[\mu_2(s_2)](s)=\mu_1\mu\mu_0(s)=\mu_1\mu\mu_0(s')=[\mu_2(s_2)](s')=\bar{\mu}_2(s_2,s').$$

Только что доказанное свойство отображения $\bar{\mu}_1$ и основное свойство факторизации показывают, что существует морфизм $\tilde{\mu}_1:\gamma_2\times\gamma_0\longrightarrow\gamma_1$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\gamma_1 \arrow[rr, "\mu_1"] & & \gamma_1' \\
\gamma_2\times\gamma_0 \arrow[u, "\tilde{\mu}_1"] & & \gamma_2\times\gamma_0' \arrow[ul, "\bar{\mu}_1"'] \arrow[ll, "1_{\gamma_2}\times\mu_0"] \arrow[u, "\bar{\mu}_2"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Морфизм $\tilde{\mu}_1:\gamma_2\times\gamma_0\longrightarrow\gamma_1$ индуцирует морфизм (см. теорему 1) $\varepsilon(\tilde{\mu}_1):\gamma_2\longrightarrow\mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$, определенный так: $\varepsilon(\tilde{\mu}_1)(s_2)=$ $=\lambda s_0\tilde{\mu}_1(s_2,s_0)$. Проверим, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1) \arrow[rr, "Mor(\mu_0,\mu_1)"] & & \mathcal{M}or(\gamma_0',\gamma_1') \\
& \gamma_2 \arrow[ul, "\varepsilon(\tilde{\mu}_1)"] \arrow[ur, "\mu_2"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Для любых $s_2 \in S_2$, $s_0' \in S_0'$ имеем

$$[\mu_2(s_2)](s_0') = \bar{\mu}_2(s_2, s_0') = \mu_1\bar{\mu}_1(s_2, s_0') = \mu_1\tilde{\mu}_1(1_{\gamma_2} \times \mu_0)(s_2, s_0') =$$

$$= \mu_1\tilde{\mu}_1(s_2, \mu_0 s_0') = \mu_1[\varepsilon(\tilde{\mu}_1)(s_2)](\mu_0 s_0') = (Mor(\mu_0, \mu_1)[\varepsilon(\tilde{\mu}_1)(s_2)])(s_0').$$

Следовательно, $\mu_2 = Mor(\mu_0, \mu_1)\,\varepsilon(\tilde{\mu}_0)$. Отсюда и следует, что $(\mathfrak{M}or(\gamma_0, \gamma_1), Mor(\mu_0, \mu_1))$ – главный подобъект $\mathfrak{M}or(\gamma_0', \gamma_1')$. Предложение доказано.

Рассуждения, приведенные в начале доказательства, достаточны для доказательства следующего утверждения:

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_0', \gamma_1'$ – произвольные нумерованные множества, $\mu_0 : \gamma_0' \to \gamma_0$, $\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_1'$ – морфизмы; тогда для любого вычислимого отображения $\nu : N \to Mor(\gamma_0, \gamma_1)$ (то есть вычислимой нумерации некоторого подмножества), композиция $Mor(\mu_0, \mu_1)\nu : N \to Mor(\gamma_0', \gamma_1')$ есть также вычислимое отображение.

Отметим, что в формулировке следствия не предполагается разрешимость проблемы P для пар (γ_0, γ_1) или (γ_0', γ_1').

ЗАМЕЧАНИЕ. Естественно возникают вопросы о том, когда же отображение $Mor(\mu_0, \mu_1)$ будет эпиморфизмом или факторизацией. Приведем пример, показывающий, что естественные двойственные условия (для утверждений 1) и 2)), вообще говоря, несправедливы.

ПРИМЕР. Пусть A и B –два рекурсивно неотделимых рекурсивно перечислимых множества. Рассмотрим нумерацию $\nu_{A,B}$ трехэлементного множества $\{0, 1, 2\}$, определенную так:

$$\nu_{A,B}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 0 & \text{, если } x \in A; \\ 1 & \text{, если } x \in B; \\ 2 & \text{, в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $\gamma_0 = (\{0,1,2\}, \nu_{A,B})$. Заметим, что γ_0 не имеет нетривиальных вполне рекурсивных подмножеств, то есть таких S, $\emptyset \subset S \subset \{0,1,2\}$, что $\nu_{A,B}^{-1}(S)$ рекурсивно. Действительно, ни одно из множеств A, B, $A \cup B$, $N \setminus A$, $N \setminus B$, $N \setminus (A \cup B)$ не рекурсивно.

Далее, $\gamma_0' = \mathfrak{2} = (\{0,1\}, \nu_{2N})$ $(\nu_{2N}(x) \rightleftharpoons rest(x,2))$, $\mu_0(x) = x$, $x=0,1$; $\mu_0 : \mathfrak{2} \to \gamma_0$; $\gamma_1 = \gamma_1' = \mathfrak{2}$ и $\mu_1 = 1_{\gamma_1}$. Легко проверить, что

1. $(\mathfrak{2}, \mu_0)$ - главный подобъект γ_0.
2. Проблема P для пар $(\gamma_0, \mathfrak{2})$, $(\mathfrak{2}, \mathfrak{2})$ разрешима.
3. $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \mathfrak{2}) \approx \mathfrak{2}$ (то, что множество $Mor(\gamma_0, \mathfrak{2})$ состоит из двух элементов, следует из отсутствия в γ_0 нетривиальных вполне рекурсивных подмножеств; доказать же существование главной вычислимой нумерации для $Mor(\gamma_0, \mathfrak{2})$ и дать её описание можно легко непосредственно или с помощью результатов следующего параграфа).
4. $\mathfrak{Mor}(\mathfrak{2}, \mathfrak{2}) \approx \mathfrak{4}$ - это очевидно.

Итак, μ_0 - мономорфизм (даже $(\mathfrak{2}, \mu_0)$ - главный подобъект) $\mu_1 = 1_{\mathfrak{2}}$ - эпиморфизм (даже факторизация), а отображение

$$Mor(\mu_0, \mu_1) : \mathfrak{Mor}(\gamma_0, \mathfrak{2}) (\approx \mathfrak{2}) \to \mathfrak{Mor}(\mathfrak{2}, \mathfrak{2}) (\approx \mathfrak{4}),$$

очевидно, не может быть эпиморфизмом.

Приведем, однако, одно полезное следствие предложения 1, которое указывает достаточные условия эпиморфности морфизма $Mor(\mu_0, \mu_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если (γ_0', μ_0) - ретракт γ_0, а μ_1 - ретрагирующий эпиморфизм, то есть такой, что существует $\mu_1' : \gamma_1' \to \gamma_1$ со свойством $\mu_1 \mu_1' = 1_{\gamma_1'}$, то $Mor(\mu_0, \mu_1)$ - ретрагирующий эпиморфизм $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$ на $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_0' : \gamma_0 \to \gamma_0'$ - ретрагирующий эпиморфизм, соответствующий μ_0, то есть $\mu_0' \mu_0 = 1_{\gamma_0'}$. Тогда по предложению 1.1) (или 2)) $Mor(\mu_0', \mu_1')$ есть мономорфизм из $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$ в $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$, так как μ_0' - эпиморфизм, а μ_1', очевидно, - мономорфизм. Проверим теперь, что композиция

$$Mor(\mu_0, \mu_1) Mor(\mu_0', \mu_1') : \mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1') \to \mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1'),$$

являющаяся морфизмом, есть тождественное отображение $Mor(\gamma_0', \gamma_1')$ на себя. Пусть $\mu \in Mor(\gamma_0', \gamma_1')$, тогда

$$[Mor(\mu_0, \mu_1) Mor(\mu_0', \mu_1')](\mu) = Mor(\mu_0, \mu_1)[\mu_1' \mu \mu_0'] = (\mu_1 \mu_1') \mu (\mu_0' \mu_0) = 1_{\gamma_1'} \mu 1_{\gamma_0'} = \mu.$$

Утверждение доказано.

Аналогично доказывается двойственное утверждение:

СЛЕДСТВИЕ 3. Если μ_0 – ретрагирующий эпиморфизм, а (γ_1, μ_1) – ретракт γ_1', то $(\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1), Mor(\mu_0, \mu_1))$ – ретракт $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$.

В условии предложения 1 требовалось существование объектов $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$. Однако в условиях следствий 2, 3 можно ограничиться меньшим, а именно: справедлива следующая теорема существования.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для пары нумерованных множеств (γ_0, γ_1) разрешима проблема P. Если (γ_0', μ_0) – ретракт γ_0, а $\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_1'$ – ретрагирующий эпиморфизм, то проблема P для пары (γ_0', γ_1') разрешима, отображение

$$Mor(\mu_0, \mu_1) : Mor(\gamma_0, \gamma_1) \to Mor(\gamma_0', \gamma_1')$$

есть отображение на и фактор-множество $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)/Mor(\mu_0, \mu_1)$ эквивалентно множеству $\mathfrak{Mor}(\gamma_0', \gamma_1')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что отображение $Mor(\mu_0, \mu_1)\bar{\nu} : N \to Mor(\gamma_0', \gamma_1')$ есть вычислимая нумерация некоторого подмножества из $Mor(\gamma_0', \gamma_1')$, здесь $\bar{\nu}$ – нумерация $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1)$. Так как $\bar{\nu}$ – вычислимая нумерация, то отображение

$$\bar{\mu} : N \times S_0 \to S_1, \quad \bar{\mu}(n, s_0) \rightleftharpoons [\bar{\nu}(n)](s_0) \text{ для } n \in N,\ s_0 \in S_0$$

есть морфизм из $N \times \gamma_0$ в γ_1. Тогда $1_N \times \mu_0 : N \times \gamma_0' \to N \times \gamma_0$ есть морфизм, а также отображение $\mu_1 \bar{\mu}(1_N \times \mu_0) : N \times \gamma_0' \to \gamma_1'$ есть морфизм. Этот морфизм определяет вычислимую нумерацию $\bar{\nu}'$ некоторого семейства морфизмов из γ_0' в γ_1', где

$$\bar{\nu}'(n) \rightleftharpoons \lambda s_0 [\mu_1 \bar{\mu}(1_N \times \mu_0)(n, s_0)].$$

Покажем, что $Mor(\mu_0, \mu_1)\bar{\nu} = \bar{\nu}'$. Пусть $n \in N$, $s_0 \in S_0$. Тогда

$$[\bar{\nu}'(n)](s_0) = \mu_1 \bar{\mu}(1_N \times \mu_0)(n, s_0) = \mu_1 \bar{\mu}(n, \mu_0(s_0)) =$$
$$= \mu_1 [\bar{\nu}(n)] \mu_0(s_0) = [Mor(\mu_0, \mu_1)\bar{\nu}(n)](s_0).$$

Итак, $Mor(\mu_0, \mu_1)\bar{\nu} = \bar{\nu}'$ – вычислимая нумерация.

Пусть теперь $\nu^* : N \to S \subseteq Mor(\gamma_0', \gamma_1')$ – произвольная вы-

числимая нумерация некоторого семейства S морфизмов из γ_0' в γ_1', то есть отображение $\mu^*: N\times S_0' \to S_1'$ $(\mu^*(n,s_0') = [\nu^*(n)](s_0'))$ есть морфизм из $N\times\gamma_0'$ в γ_1'.

Из условий теоремы вытекает существование таких морфизмов $\mu_0':\gamma_0\to\gamma_0'$ и $\mu_1':\gamma_1'\to\gamma_1$, что $\mu_0'\mu_0 = 1_{\gamma_0'}$, $\mu_1\mu_1' = 1_{\gamma_1'}$. Рассмотрим последовательность нумерованных множеств и морфизмов:

$$N\times\gamma_0 \xrightarrow{1_N\times\mu_0'} N\times\gamma_0' \xrightarrow{\mu^*} \gamma_1' \xrightarrow{\mu_1'} \gamma_1.$$

Композиция $\mu_1'\mu^*(1_N\times\mu_0')$ - морфизм из $N\times\gamma_0$ в γ_1 определяет вычислимую нумерацию $\tilde\nu$ некоторого множества морфизмов из γ_0 в γ_1 $(\tilde\nu(n) \rightleftharpoons \lambda s_0\mu_1'\mu^*(1_N\times\mu_0')(n,s_0))$. Тогда существует о.р.ф. g такая, что $\tilde\nu = \bar\nu g$. Покажем, что $\nu^* = Mor(\mu_0,\mu_1)\bar\nu g$ Пусть $n\in N$, $s_0'\in S_0'$, тогда

$$[\nu^*(n)](s_0') = \mu^*(n,s_0') = 1_{\gamma_1'}\mu^*(1_N\times 1_{\gamma_0'})(n,s_0') = \mu_1\mu_1'\mu^*(1_N\times\mu_0'\mu_0)\times$$

$$\times(n,s_0') = \mu_1\mu_1'\mu^*(1_N\times\mu_0')(n,\mu_0(s_0')) = \mu_1\bar\nu g(n)\mu_0(s_0') = [Mor(\mu_0,\mu_1)\bar\nu g(n)](s_0),$$

то есть $\nu^* = Mor(\mu_0,\mu_1)\bar\nu g$.

Итак, всякая вычислимая нумерация ν^* сводится к $Mor(\mu_0,\mu_1)\bar\nu$. Отсюда следует, что $Mor(\mu_0,\mu_1)\bar\nu$ есть на самом деле главная вычислимая нумерация множества $Mor(\gamma_0',\gamma_1')$ и что

$$\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)/Mor(\mu_0,\mu_1) \text{ есть } \mathfrak{mor}(\gamma_0',\gamma_1').$$

Отображение $Mor(\mu_0,\mu_1)$ является эпиморфизмом, факторизацией и даже (по следствию 1) ретрагирующим эпиморфизмом $\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ на $\mathfrak{mor}(\gamma_0',\gamma_1')$. Теорема доказана.

Переформулировка (правильная) следствия 2 как некоторой теоремы существования даст ту же самую теорему (с перестановкой γ и γ').

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем будем часто использовать следующее соглашение: вместо слов "проблема P разрешима для пары (γ_0,γ_1) нумерованных множеств" будем писать $P(\gamma_0,\gamma_1)$, а также использовать символы $\Longrightarrow, \&, \vee$ ("если ....., то....", "и", "или").

В этих обозначениях сформулируем два следствия к теореме, первое из которых есть просто переформулировка (упрощенная) теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_0'$ и γ_1' - нумерованные множества; если сущест-

вуют морфизмы $\mu_0 : \gamma_0' \to \gamma_0$ и $\mu_1 : \gamma_1 \to \gamma_1'$ такие, что (γ_0', μ_0) – ретракт γ_0, а μ_1 – ретрагирующий эпиморфизм, то

$$P(\gamma_0, \gamma_1) \Longrightarrow P(\gamma_0', \gamma_1').$$

Если (не совсем точно) говорить "γ' есть ретракт γ", когда существует морфизм $\mu : \gamma' \to \gamma$ такой, что (γ', μ) – ретракт γ, то еще одной переформулировкой теоремы будет

СЛЕДСТВИЕ 2. Если γ_0' – ретракт γ_0 и γ_1' – ретракт γ_1, то

$$P(\gamma_0, \gamma_1) \Longrightarrow P(\gamma_0', \gamma_1').$$

СЛЕДСТВИЕ 3. а) $P(\gamma_1 \oplus \gamma_2, \gamma_0) \Longrightarrow P(\gamma_1, \gamma_0) \,\&\, P(\gamma_2, \gamma_0)$;

б) $P(\gamma_0, \gamma_1 \times \gamma_2) \Longrightarrow P(\gamma_0, \gamma_1) \,\&\, P(\gamma_0, \gamma_2)$;

в) $P(\gamma_1 \times \gamma_2, \gamma_0) \Longrightarrow P(\gamma_1, \gamma_0) \,\&\, P(\gamma_2, \gamma_0)$.

Это следствие вытекает из предыдущего и того, что γ_1 и γ_2 являются ретрактами $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ и $\gamma_1 \times \gamma_2$ (см. лемму 1).

Следующее предложение покажет, что в следствии 3 стрелки можно обратить. В формулировке этого предложения будет использоваться понятие условной эквивалентности некоторых выражений, содержащих символы $\mathfrak{Mor}$. Под этим будем понимать утверждение, что если хотя бы одна из сторон этой условной эквивалентности имеет смысл (то есть все $\mathfrak{Mor}$ существуют), то и другая сторона тоже имеет смысл и соответствующие объекты категории $\mathfrak{N}$ эквивалентны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любых трех нумерованных множеств γ_0, γ_1 и γ_2 имеют место следующие условные эквивалентности:

1. $\mathfrak{Mor}(\gamma_1 \oplus \gamma_2, \gamma_0) \sim \mathfrak{Mor}(\gamma_1, \gamma_0) \times \mathfrak{Mor}(\gamma_2, \gamma_0)$;
2. $\mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1 \times \gamma_2) \sim \mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_1) \times \mathfrak{Mor}(\gamma_0, \gamma_2)$;
3. $\mathfrak{Mor}(\gamma_1 \times \gamma_2, \gamma_0) \sim \mathfrak{Mor}(\gamma_1, \mathfrak{Mor}(\gamma_2, \gamma_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условные эквивалентности 1 и 2 легко следуют из следствия 3 а), б) теоремы 2, теоремы 1, единственности решения проблемы представления функтора и следующих очевидных (безус-

ловных) естественных изоморфизмов ($\approx$) функторов из $\mathfrak{N}$ в $\mathcal{S}et$:

1. $\lambda\gamma Mor(\gamma\times(\gamma_1\oplus\gamma_2),\gamma_0)\approx\lambda\gamma Mor((\gamma\times\gamma_1)\oplus(\gamma\times\gamma_2),\gamma_0)\approx$
$\approx\lambda\gamma[Mor(\gamma\times\gamma_1,\gamma_0)\times Mor(\gamma\times\gamma_2,\gamma_0)]$;

2. $\lambda\gamma Mor(\gamma\times\gamma_0,\gamma_1\times\gamma_2)\approx\lambda\gamma[Mor(\gamma\times\gamma_0,\gamma_1)\times Mor(\gamma\times\gamma_0,\gamma_2)]$.

Докажем теперь условную эквивалентность 3. Пусть $P(\gamma_1\times\gamma_2,\gamma_0)$, тогда по следствию 3 в) теоремы 2 $P(\gamma_2,\gamma_0)$. Следовательно, существует $\mathfrak{mor}(\gamma_2,\gamma_0)$, и имеют место следующие естественные изоморфизмы функторов (справедливые при условии существования объекта $\mathfrak{mor}(\gamma_2,\gamma_0)$).

$$\lambda\gamma Mor(\gamma\times(\gamma_1\times\gamma_2),\gamma_0)\approx\lambda\gamma Mor((\gamma\times\gamma_1)\times\gamma_2,\gamma_0)\approx\lambda\gamma Mor(\gamma\times\gamma_1,\mathfrak{mor}(\gamma_2,\gamma_0)).$$

Из этих изоморфизмов и вытекает нужное.

Предложение доказано.

Рассмотрим пару нумерованных множеств γ_0 и γ_1. Для любого элемента $s\in S_1$ существует морфизм $\mu^s:\gamma_0\longrightarrow\gamma_1$, определенный так: $\mu^s(s_0)=s$ для всех $s_0\in S_0$. Таким образом, задается отображение $\delta:S_1\longrightarrow Mor(S_0,S_1)$, которое назовем диагональным вложением (очевидно, что δ - одно-однозначное отображение). Оказывается, что если $P(\gamma_0,\gamma_1)$, то δ является морфизмом из γ_1 в $\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)$.

Действительно, отображение δ определяет изоморфизм γ_1 с нумерованным множеством $\bar\gamma\leftrightharpoons(\{\mu^s\}_{s\in S_1},\bar\nu=\delta\nu_1)$. Поэтому достаточно показать, что $\bar\nu$ - вычислимая нумерация морфизмов. Рассмотрим двуместную о.р.ф. f, определенную так: $f(x,y)=x$ для всех $x,y\in N$, тогда

$$[\bar\nu(x)](\nu_0(y))=[\delta\nu_1(x)](\nu_0(y))=\mu^{\nu_1(x)}(\nu_0(y))=\nu_1(x)=\nu_1 f(x,y).$$

Следовательно, $\bar\nu$ - вычислимая нумерация,и вложение множества $\{\mu^s\}_{s\in S_1}$ в $Mor(\gamma_0;\gamma_1)$ есть морфизм из $\bar\gamma$ в $\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)$, но тогда и $\delta:\gamma\longrightarrow\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ есть морфизм.

Многие естественные вопросы, связанные с диагональным вложением δ получат ответ в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. а) Для любого отображения $\sigma:1\longrightarrow\gamma_0$ композиция отображений в следующей последователь -

ности

$$\gamma_1 \xrightarrow{\delta} \mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1) \xrightarrow{i} 1\times \mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1) \xrightarrow{\sigma\times 1_{\mathcal{M}}} \gamma_0 \times \mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1) \xrightarrow{\lambda} \gamma_1$$

есть тождественный морфизм из γ_1 в γ_1.

б) Для любого морфизма $\mu_0:\gamma_0 \longrightarrow \gamma_0'$, если $P(\gamma_0',\gamma_1)$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \gamma_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "1_{\gamma_1}"'] & \mathcal{M}or(\gamma_0',\gamma_1) \arrow[d, "Mor(\mu_0,1_{\gamma_1})"] \\ \gamma_1 \arrow[r, "\delta"] & \mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

в) Для любого морфизма $\mu_1:\gamma_1 \longrightarrow \gamma_1'$, если $P(\gamma_0,\gamma_1')$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} \gamma_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mu_1"'] & \mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1) \arrow[d, "Mor(1_{\gamma_0},\mu_1)"] \\ \gamma_1' \arrow[r, "\delta"] & \mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1') \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство осуществляется прямым вычислением и поэтому оставляется читателю.

В заключение параграфа изучим поведение свойства отделимости при образовании объекта $\mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$. Имеет место следующая

ЛЕММА 4. Если $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и γ_1 – отделимое нумерованное множество, то и $\mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$ – отделимое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_1' \subseteq S_1$ ν_1- вполне перечислимое подмножество, то есть $\nu_1^{-1}(S_1')$ рекурсивно перечислимо. Тогда для любого $s_0 \in S_0$ множество $M_{s_0} \rightleftharpoons \{\mu \mid \mu \in Mor(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mu(s_0) \in S_1'\}$ – $\bar{\nu}$ -вполне перечислимо (где $\bar{\nu}$ – нумерация $\mathcal{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$). На самом деле это справедливо для любой вычислимой нумерации ν семейства морфизмов из γ_0 в γ_1. Докажем это. Пусть $\nu: N \longrightarrow Mor(\gamma_0,\gamma_1)$- вычислимая нумерация некоторого семейства морфизмов, тогда $\lambda: \gamma_0 \times (\nu(N),\nu) \longrightarrow \gamma_1$ – морфизм и $\lambda^{-1}(S_1')$ – вполне перечислимое подмножество в $S_0 \times \nu(N)$. Рассмотрим теперь мор-

физм $i_{S_0}: (\nu(N),\nu) \to \gamma_0 \times (\nu(N),\nu)$, определенный так: $i_{S_0}(\mu) \rightleftharpoons (s_0,\mu)$ $\mu \in \nu(N)$. Тогда $i_{S_0}^{-1}\lambda^{-1}(S_1')$ – ν – вполне перечислимое подмножество $\nu(N)$. Заметим теперь, что

$$i_{S_0}^{-1}\lambda^{-1}(S_1') = M_{S_0} \cap \nu(N).$$

Действительно, пусть $\mu \in M_{S_0} \cap \nu(N)$, тогда $\mu(s_0) \in S_1'$, но $\lambda i_{S_0}(\mu) = \lambda(s_0,\mu) = \mu(s_0)$, поэтому $\mu \in i_{S_0}^{-1}\lambda^{-1}(S_1')$. Наоборот, пусть $\mu \in i_{S_0}^{-1}\lambda^{-1}(S_1')$, тогда $\lambda i_{S_0}\mu \in S_1'$, но $\lambda i_{S_0}(\mu) = \mu(s_0)$.

Итак, сформулированное в начале доказательства утверждение доказано. Завершим теперь доказательство леммы. Пусть

$$\mu_0, \mu_1 \in Mor(\gamma_0,\gamma_1), \quad \mu_0 \neq \mu_1.$$

Тогда существует элемент $s_0 \in S_0$ такой, что $\mu_0(s_0) \neq \mu_1(s_0)$. Так как $\mu_0(s_0) \neq \mu_1(s_0) \in S_1$ и γ_1 – отделимо, то существует вполне перечислимое множество S_1' такое, что $\mu_0(s_0) \in S_1'$ и $\mu_1(s_0) \notin S_1'$ (или наоборот), тогда M_{S_0} – $\bar{\nu}$ – вполне перечислимо и $\mu_0 \in M_{S_0}$, а $\mu_1 \notin M_{S_0}$ (или наоборот). Следовательно, $\mathfrak{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$ отделимо. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве леммы по существу получено и следующее утверждение.

Если $\{S^i\}_{i\in N}$ – отделяющее семейство ν_1 -вполне перечислимых подмножеств S_1, то семейство множеств

$$M_{j,i} \rightleftharpoons \{\mu \mid \mu \in Mor(\gamma_0,\gamma_1), \mu\nu_0(j) \in S^i\}, \quad i,j \in N,$$

является отделяющим семейством вполне перечислимых множеств для $Mor(\gamma_0,\gamma_1)$.

Отсюда как следствие "эффективности" доказательства получаем и следующую лемму.

ЛЕММА 4'. Если $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и γ_1 – эффективно отделимое нумерованное множество, то и $\mathfrak{M}or(\gamma_0,\gamma_1)$ – эффективно отделимое нумерованное множество.

Более удобно свойство отделимости может быть описано в следующих понятиях. Пусть $\mathfrak{N}_{OT}$ – полная подкатегория категории $\mathfrak{N}$ объектами которой являются все отделимые нумерованные множества.

ТЕОРЕМА 3. Существует (ковариантный) функтор $F_{OT}: \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}_{OT}$ (функтор отделения) и естествен-

ное преобразование η тождественного функтора 1 в F_{OT} такие, что

1) для любого γ $\eta:\gamma\to F_{OT}(\gamma)$ есть факторизация;

2) для любых γ и отделимого γ_0 отображение

$$Mor(\eta, 1_{\gamma_0}) : Mor(F_{OT}(\gamma),\gamma_0)\to Mor(\gamma,\gamma_0)$$

взаимно-однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma=(S,\nu)$ - произвольное нумерованное множество. Определим на S отношение эквивалентности $\sim$ так:

$s_0\sim s_1 \Longleftrightarrow$ для любого ν - вполне перечислимого подмножества $S'\subseteq S$ имеет место $(s_0\in S'\Longleftrightarrow s_1\in S')$. Полагаем $F_{OT}(\gamma)\leftrightharpoons\gamma/_\sim$ - факторизация γ по отношению $\sim$. Из определения легко видеть, что $\gamma/_\sim$ отделимо. Через η обозначим морфизм факторизации $\gamma\to\gamma/_\sim$. Докажем теперь, что $\gamma/_\sim$ - "наибольший" отделимый фактор-объект γ, то есть докажем, что для любого отделимого γ_0 и любого морфизма $\mu:\gamma\to\gamma_0$ существует (и притом единственный) морфизм $\tilde\mu:\gamma/_\sim\to\gamma_0$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \gamma \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\eta"'] & \gamma_0 \\ \gamma/_\sim \arrow[ur, "\tilde\mu"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Рассмотрим каноническое разложение морфизма μ:

$$\gamma\xrightarrow{\mu'}\gamma/_\mu\xrightarrow{\mu_1}\gamma_0\ ,$$

где μ' - факторизация, а μ_1 - мономорфзм. Так как $(\gamma/_\mu,\mu_1)$ - подобъект γ_0, а γ_0 отделимо, то и $\gamma/_\mu$ отделимо. Тогда из определения отношения $\sim$ легко следует, что $s_0\sim s_1\Longrightarrow\mu(s_0)=\mu(s_1)$, но тогда существует отображение $\tilde\mu_0: S/_\sim\to S/_{\sim_\mu}$ такое, что $\mu'=\tilde\mu_0\eta$. Так как $\gamma/_\sim$ и $\gamma/_\mu$ - факторизация, то $\tilde\mu_0$ и $\tilde\mu\leftrightharpoons\mu_1\tilde\mu_0$ - морфизмы. Этот (очевидно, единственный) морфизм $\tilde\mu$ и удовлетворяет соотношению $\tilde\mu\eta=\mu$. Итак, доказано свойство: отображение $Mor(\eta,1_{\gamma_0}): Mor(F_{OT}(\gamma),\gamma_0)\to Mor(\gamma,\gamma_0)$ взаимно-однозначно для отделимого γ_0. Доопределим теперь функтор F_{OT}.

Он определен уже на объектах. Пусть $\mu: \gamma_0 \longrightarrow \gamma_1$ – морфизм. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \gamma_0 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\eta\mu"] & F_{OT}(\gamma_0) \arrow[d, dashed, "\tilde{\mu}"] \\ \gamma_1 \arrow[r, "\eta"] & F_{OT}(\gamma_1) \end{tikzcd}$$

Так как $\eta\mu$ есть морфизм из γ_0 в отделимое нумерованное множество $F_{OT}(\gamma_1)$, то по доказанному выше свойству существует и притом единственный морфизм $\tilde{\mu}: F_{OT}(\gamma_0) \longrightarrow F_{OT}(\gamma_1)$, который делает диаграмму коммутативной. Полагаем $F_{OT}(\mu) \leftrightharpoons \tilde{\mu}$. Из определения сразу видно, что F_{OT} – функтор, а η – естественное преобразование 1 в F_{OT}. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если γ_1 отделимо, то для любого γ_0 $P(\gamma_0,\gamma_1) \Longleftrightarrow P(F_{OT}(\gamma_0),\gamma_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если γ_1 отделимо и $P(\gamma_0,\gamma_1)$, то $\mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(F_{OT}(\gamma_0),\gamma_1)$ эквивалентны $(Mor\,\eta, 1_{\gamma_1}): \mathfrak{Mor}(F_{OT}(\gamma_0),\gamma_1) \longrightarrow \mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ –эта эквивалентность).

§ 4. Полезные частные случаи

Рассмотрим сначала случай конечных нумерованных множеств γ и $\bar{\gamma}$. Хотя, по-видимому, существует пара конечных множеств γ и $\bar{\gamma}$ такая, что проблема P для этой пары не разрешима, имеется важный случай, когда эта проблема разрешима.

Пусть $S = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ – конечное множество, на котором задан частичный порядок $\leqslant$. По предложению 5 § 9 книги [2] существует главная вычислимая нумерация ν, допустимая относительно порядка $\leqslant$. Укажем сейчас условие, когда отображение некоторого нумерованного множества в S будет морфизмом в $\gamma = (S, \nu)$. Положим $S_i \leftrightharpoons \{a \mid a \in S,\ a_i \leqslant a\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Нетрудно проверить, что для любой нумерации ν' множества S, допустимой относительно порядка $\leqslant$, все множества S_i будут ν' – вполне перечислимыми. В частности, все S_i являются ν –вполне перечислимыми.

ЛЕММА 5. Пусть $\bar{\gamma}=(\bar{S},\bar{\nu})$ - произвольное нумерованное множество и $\mu:\bar{S}\to S$ - произвольное отображение. Отображение μ будет морфизмом из $\bar{\gamma}$ в $\gamma=(S,\nu)$ тогда и только тогда, когда $\mu^{-1}(S_i)$ - $\bar{\nu}$ - вполне перечислимое подмножество $\bar{S}$ для всех $i=0,1,\ldots,n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость этих условий очевидна (см., например, лемму 6 § 4 книги [2]). Докажем достаточность. Переходя от $\bar{\gamma}$ к фактор-объекту $\bar{\gamma}/\mu$, можно считать, что μ - мономорфизм (и даже тождественное вложение). А тогда условия леммы показывают, что $\bar{\nu}$ - нумерация, допустимая относительно порядка $\leq$ (лемма 6 § 9 книги [2]). Следовательно, вложение есть морфизм (так как ν - главная допустимая относительно $\leq$ нумерация). Лемма доказана.

Пусть $\gamma=(S,\nu)$, как выше, - конечное множество с нумерацией ν - главной допустимой нумерацией относительно некоторого частичного порядка $\preccurlyeq$ на S.

ТЕОРЕМА 4. Для любого конечного нумерованного множества $\bar{\gamma}=(\bar{S},\bar{\nu})$ проблема P для пары $(\bar{\gamma},\gamma)$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $M \leftrightharpoons Mor(\bar{\gamma},\gamma)$ конечно, так как множества $\bar{S}$ и S конечны. Зададим на множестве M частичный порядок $\preccurlyeq$ следующим образом:

для $\mu_0,\mu_1\in M$ $[\mu_0\preccurlyeq\mu_1 \leftrightharpoons \forall a\in\bar{S}\ (\mu_0(a)\leq\mu_1(a))]$.

То, что $\preccurlyeq$ есть частичный порядок на M, легко следует из того, что $\preccurlyeq$ - частичный порядок на S.

Докажем теперь лемму, из которой легко получим и доказательство теоремы.

ЛЕММА 6. Нумерация $\nu':N\to M'(\subseteq M)$ является вычислимой нумерацией семейства морфизмов M' из $\bar{\gamma}$ в γ, если и только если эта нумерация допустима относительно частичного порядка $\preccurlyeq$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону (допустимость любой вычис-

лимой нумерации относительно $\preccurlyeq$) утверждение леммы справедливо и без предложения конечности $\bar{S}$ и S и, по существу, доказано при доказательстве леммы 4 из предыдущего параграфа. Докажем теперь справедливость обратного утверждения. Пусть $\nu': N \longrightarrow M'$ - нумерация, допустимая относительно порядка $\preccurlyeq$. Рассмотрим отображение $\mu(\nu'): N \times \bar{S} \longrightarrow S$, определенное так:

$$[\mu(\nu')](n,\bar{s}) \leftrightharpoons [\nu'(n)](\bar{s}), \quad n \in N, \ \bar{s} \in \bar{S}.$$

Для доказательства вычислимости ν' нужно показать, что $\mu(\nu')$ есть морфизм из $N \times \bar{\gamma}$ в γ . По лемме 5 достаточно проверить, что $[\mu(\nu')]^{-1}(S_i)$ - вполне перечислимое подмножество $N \times \bar{S}$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n$. Имеем следующие эквивалентности:

$$[\mu(\nu')](n, \bar{\nu}(m)) \in S_i \Longleftrightarrow [\nu'(n)](\bar{\nu}(m)) \in S_i \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \mu (\mu \preccurlyeq \nu'(n) \ \& \ \mu(\bar{\nu}(m)) \in S_i) \Longleftrightarrow \exists \mu (\nu'(n) \in M'_\mu \ \&$$

$$\& \ \bar{\nu}(m) \in \mu^{-1}(S_i)) \Longleftrightarrow \bigvee_{\mu \in M} (\nu'(n) \in M'_\mu \ \& \ \bar{\nu}(m) \in \mu^{-1}(S_i)),$$

где $M'_\mu \leftrightharpoons \{\mu' \mid \mu' \in M' \ \& \ \mu \preccurlyeq \mu'\}$.

Так как ν' - допустимая нумерация, то M'_μ ν'- вполне перечислимы, то есть предикат $\nu'(n) \in M'_\mu$ рекурсивно перечислим. Так как μ - морфизм из $\bar{\gamma}$ в γ , то $\mu^{-1}(S_i)$ $\bar{\nu}$- вполне перечислимо и предикат $\bar{\nu}(m) \in \mu^{-1}(S_i)$ рекурсивно перечислим, а так как M - конечное множество, то и предикат $[\mu(\nu')](n, \bar{\nu}(m)) \in S_i$ рекурсивно перечислим, то есть $[\mu(\nu')]^{-1}(S_i)$ - вполне перечислимое подмножество $N \times \bar{S}$. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться предложением 5 § 9 книги [2] и взять нумерацию $\tilde{\nu}$ множества $\mathcal{M}$, которая является главной нумерацией, допустимой относительно частичного порядка $\preccurlyeq$. По доказанной сейчас лемме нумерованное множество $(M, \tilde{\nu}) = (Mor(\bar{\gamma}, \gamma), \tilde{\nu})$ и есть объект $\mathfrak{Mor}(\bar{\gamma}, \gamma)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечность множества $\bar{\gamma}$ использовалась в доказательстве только для того, чтобы заметить конечность множества $Mor(\bar{\gamma}, \gamma)$. Так что на самом деле доказана следующая

ТЕОРЕМА 4 . Если $\gamma = (S, \nu)$ - конечное нумерованное множество, а ν - главная допустимая относительно некоторо-

го частичного порядка на $\mathcal{S}$ нумерация, то для любого нумерованного множества $\bar{\gamma}$ такого, что $Mor(\bar{\gamma},\gamma)$ конечно, проблема P для пары $(\bar{\gamma},\gamma)$ разрешима.

Теперь рассмотрим случай пар вида (N,γ). Если для пары (N,γ) проблема P разрешима, то нумерованное множество $\mathfrak{mor}(N,\gamma)$ будем называть ω - степенью нумерованного множества γ и обозначать так γ^{ω}.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще, вместо обозначения $\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ можно было бы использовать обозначение $\gamma_1^{\gamma_0}$, но в силу громоздкости такое обозначение не будет использоваться, несмотря на его определенную эвристическую ценность $(\gamma_0^{\gamma_1\oplus\gamma_2}\approx\gamma_0^{\gamma_1}\times\gamma_0^{\gamma_2},\ \gamma_0^{\gamma_1\times\gamma_2}\approx$ $\approx(\gamma_0^{\gamma_1})^{\gamma_2}$ и т.п.).

Прямо из определения и некоторых известных эквивалентностей вытекает следующая

ЛЕММА 7. Имеют место следующие условные эквивалентности:

1. $\gamma\times\gamma^{\omega}\approx\gamma^{\omega},\ \gamma\times\gamma\times\gamma^{\omega}\approx\gamma^{\omega},\dots,\gamma^{\omega}\times\gamma^{\omega}\approx\gamma^{\omega},\ (\gamma^{\omega})^{\omega}\approx\gamma^{\omega}.$
2. $\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1^{\omega})\approx\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)^{\omega}.$

Для доказательства нужно воспользоваться предложением 2 и следующими эквивалентностями $1\oplus N\approx N,\ 2\oplus N\approx N,\dots,N\oplus N\approx$ $\approx N,\ N\times N\approx N$. Докажем для примера утверждение 2:

$$\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1^{\omega})=\mathfrak{mor}(\gamma_0,\mathfrak{mor}(N,\gamma_1))\approx\mathfrak{mor}(\gamma_0\times N,\gamma_1)\approx$$
$$\approx\mathfrak{mor}(N\times\gamma_0,\gamma_1)\approx\mathfrak{mor}(N,\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1))=\mathfrak{mor}(\gamma_0,\gamma_1)^{\omega}.$$

Когда ω - степень нумерованного множества γ существует, то можно построить нумерованное множество, которое является в определенном смысле (нумерованным) семейством всех подобъектов γ. А именно, если на множестве $Mor(N,\gamma)$ определить отношение эквивалентности $\sim$ как эквивалентность нумераций, то фактор-множество $L^{0}(\gamma)=Mor(N,\gamma)/_{\sim}$ (см. [2], стр. 35) естественно рассматривать как множество всех подобъектов γ, а нумерованное фактор-множество $\mathfrak{mor}(N,\gamma)_{\sim}=\gamma^{\omega}_{\sim}$ и есть нумерованное множе -

ство $L^0(\gamma)$ с "естественной" нумерацией.

Укажем теперь достаточное условие существования ω -степени.

ТЕОРЕМА 5. Если γ - предполное нумерованное множество, то проблема P разрешима для пары (N,γ), другими словами, существует ω - степень множества γ. Кроме того, γ^ω - предполное нумерованное множество, а если γ - полное, то и γ^ω - полно нумерованное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K^2 - клиниевская универсальная функция. Так как $\gamma=(S,\nu)$ предполно, то существует двуместная о.р.ф. g такая, что

$$\nu g(x,y)=\nu K^2(x,y)\ ,\ \text{если } K^2(x,y) \text{ определено.}$$

Полагаем $\tilde{\nu}: N \longrightarrow Mor(N,\gamma)$ так: $\tilde{\nu}(n) \leftrightharpoons \lambda x \nu g(n,x)$. Очевидно, что $\tilde{\nu}(n)$ - морфизм из N в γ. Покажем, что $\tilde{\nu}$ - вычислимая нумерация, но это очевидно из определения, так как

$$[\tilde{\nu}(n)](x) = \nu g(n,x).$$

Пусть $\nu': N \longrightarrow M' \subseteq Mor(N,\gamma)$ - какая-нибудь вычислимая нумерация семейства M' морфизмов из N в γ. Это означает, что существует двуместная о.р.ф. h такая, что для любых $n,x \in N$

$$[\nu'(n)](x) = \nu h(n,x).$$

По известным свойствам клиниевской универсальной функции существует о.р.ф. t такая, что для любых $n,x \in N$ $h(n,x)=K^2(t(n),x)$, тогда

$$[\nu'(n)](x)=\nu h(n,x)=\nu K^2(t(n),x)=\nu g(t(n),x)=[\tilde{\nu}(t(n))](x).$$

Следовательно, $\nu'=\tilde{\nu}t$. Итак, $\tilde{\nu}$ - главная вычислимая нумерация семейства $Mor(N,\gamma)$ и $(Mor(N,\gamma),\tilde{\nu})$ есть $\mathfrak{Mor}(N,\gamma)=\gamma^\omega$.

Докажем теперь оставшиеся утверждения теоремы.

Рассмотрим произвольную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\gamma_0 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\mu_0"'] & \gamma_1 \arrow[dl, dashed, "\tilde{\mu}"] \\
\gamma^\omega &
\end{tikzcd}$$

и изучим возможность построения морфизма $\tilde{\mu}: \gamma_1 \longrightarrow \gamma^{\omega}$ такого, что $\tilde{\mu}\mu_1 = \mu_0$.

Для этого рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
N \times \gamma_0 \arrow[r, "1_N \times \mu_1"] \arrow[d, "1_N \times \mu_0"'] \arrow[dr, "\bar{\mu}"] & N \times \gamma_1 \arrow[d, dashed, "\mu'"] \\
N \times \gamma^{\omega} \arrow[r, "\lambda"] & \gamma
\end{tikzcd}$$

Если существует морфизм $\mu': N \times \gamma_1 \longrightarrow \gamma$, замыкающий вышеприведенную диаграмму до коммутативной, то существует и искомый морфизм $\tilde{\mu}: \gamma_1 \longrightarrow \gamma^{\omega}$. Действительно, рассмотрим отображение

$$\varphi: Mor(N \times \gamma_1, \gamma) \longrightarrow Mor(\gamma_1, \mathfrak{mor}(N, \gamma))(= Mor(\gamma_1, \gamma^{\omega})),$$

определенное так: если $\mu': N \times \gamma_1 \longrightarrow \gamma$ и $s_1 \in S_1$, то

$$\lambda r[\varphi\mu(s_1)](r) \simeq \lambda r \mu(r, s_1).$$

Тогда если $\tilde{\mu} = \varphi\mu'$, то

$$\tilde{\mu}\mu_1 = \lambda s_0[(\varphi\mu')\mu_1(s_0)] = \lambda s_0[\lambda r[\varphi\mu'\mu_1(s_0)](r)] =$$
$$= \lambda s_0 \lambda r \mu'(r, \mu_1(s_0)) = \lambda s_0 \lambda r[\mu'(1_N \times \mu_1)](r, s_0) = \lambda s_0 \lambda r[\lambda(1_N \times \mu_0)](r, s_0) =$$
$$= \lambda s_0 \lambda r[\lambda(r, \mu_0(s_0))] = \lambda s_0[\lambda r[\mu_0(s_0)](r)] = \lambda s_0 \mu_0(s_0) = \mu_0,$$ то есть $\tilde{\mu}\mu_1 = \mu_0$.

Завершим теперь доказательство. В рассмотренной выше ситуации, если γ_0 и γ_1 есть N, то существование морфизма μ' следует из того, что γ – предполное нумерованное множество, а $N \times N \sim N$. Когда γ – полное нумерованное множество, а (γ_0, μ_1) – e – подобъект γ_1, то $(N \times \gamma_0, 1_N \times \mu_1)$ есть e -подобъект $N \times \gamma_1$ и поэтому существование нужного морфизма μ' следует прямо из полноты нумерованного множества γ. Теорема доказана.

В качестве простого следствия получим решение проблемы 5 из книги [2]. (Заметим, что эта проблема уже была решена в [1]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если γ – полное нумерованное множество, имеющее по крайней мере два различных особых элемента, то γ^{ω} имеет счётное число различных особых элементов.

Это легко вытекает из эквивалентности $\gamma \times \gamma^{\omega} \approx \gamma^{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если γ – предполное (полное) нумерованное множество, $\bar{\gamma}$ – произвольное нумерованное множество и $P(\bar{\gamma},\gamma)$, то $\mathfrak{mor}(\bar{\gamma},\gamma)$ – предполное (полное) нумерованное множество.

Это, по существу, следствие рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы. Здесь только ситуация чуть более сложная. Рассмотрим две диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\gamma_0 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\mu_0"'] & \gamma_1 \arrow[dl, dashed, "\tilde{\mu}"] \\
\mathfrak{mor}(\bar{\gamma},\gamma) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}\times\gamma_0 \arrow[r, "1_{\mathbb{N}}\times\mu_1"] \arrow[d, "\bar{\nu}\times\mu_0"'] \arrow[dr, "\lambda(\bar{\nu}\times\mu_0)"] & \mathbb{N}\times\gamma_1 \arrow[d, dashed, "\mu'"] \arrow[dr, "\bar{\nu}\times 1_{\gamma_1}"] & \\
\bar{\gamma}\times\mathfrak{mor}(\bar{\gamma},\gamma) \arrow[r, "\lambda"] & \gamma & \bar{\gamma}\times\gamma_1 \arrow[l, dashed, "\mu''"]
\end{tikzcd}$$

Далее заметим, что существование морфизма μ', замыкающего правую диаграмму, влечет и существование морфизма μ'' (так как $\bar{\nu}\times 1_{\gamma_1}$ – факторизация, а $\mu'(1_{\mathbb{N}}\times\mu_1) = \lambda(\bar{\nu}\times\mu_0)$). Естественная эквивалентность, переводящая $Mor(\bar{\gamma}\times\gamma_1, \gamma)$ в $Mor(\gamma_1, \mathfrak{mor}(\bar{\gamma},\gamma))$, переводит μ'' в морфизм, который можно взять в качестве $\tilde{\mu}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для предполного нумерованного множества γ и любого нумерованного множества $\bar{\gamma}$ имеет место эквивалентность

$$P(\bar{\gamma},\gamma) \Longleftrightarrow P(\bar{\gamma},\gamma^{\omega}).$$

Это легко вытекает из следствия 2 и условной эквивалентности

$$\mathfrak{mor}(\bar{\gamma},\gamma^{\omega}) \sim \mathfrak{mor}(\bar{\gamma},\gamma)^{\omega}.$$

Применим теперь полученные в этом и предыдущем параграфе результаты для одной полезной редукции. Рассмотрим два полных нумерованных множества $\mathcal{P}_2 \rightleftharpoons F_{\pi}(\mathcal{Z}_0)$ и $\mathcal{P} = F_{\pi}(\mathbb{N})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого нумерованного множества γ имеет место эквивалентность

$$P(\gamma,\mathcal{P}_2) \Longleftrightarrow P(\gamma,\mathcal{P}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $\mathcal{P}_2$ есть ретракт $\mathcal{P}$. Это легко следует из того, что $\mathcal{Z}_0$ есть ретракт $\mathbb{N}$, и того, что

F_π - функтор. Действительно, пусть $\alpha: \mathcal{Z} \to \mathcal{N}$ и $\beta: \mathcal{N} \to \mathcal{Z}$ - морфизмы такие, что $\beta\alpha = 1_{\mathcal{Z}}$, тогда $F_\pi(\alpha): \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}$, $F_\pi(\beta): \mathcal{P} \to \mathcal{P}_2$ такие морфизмы, что

$$F_\pi(\beta) F_\pi(\alpha) = F_\pi(\beta\alpha) = F_\pi(1_{\mathcal{Z}}) = 1_{\mathcal{P}_2},$$

так что $(\mathcal{P}_2, F_\pi(\alpha))$ - ретракт $\mathcal{P}$. Доказанное утверждение дает импликацию

$$P(\gamma, \mathcal{P}) \Longrightarrow P(\gamma, \mathcal{P}_2) \quad \text{(следствие 2 к теореме 2).}$$

Для доказательства обратной импликации вспомним интерпретацию данную нумерованному множеству $\mathcal{M}or(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2)$ во втором параграфе А именно, $\mathcal{P}_2$ можно рассматривать как класс всех одноместных частично рекурсивных функций, принимающих только значения 0 и 1, снабженный главной вычислимой нумерацией. Покажем, что $\mathcal{P}$ является ретрактом нумерованного множества $\mathcal{M}or(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2) = \mathcal{P}_2^\omega$.

Пусть ν_0 - нумерация множества $\mathcal{P}$; $\mathcal{P} = (\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \ldots\}, \nu_0)$. Пусть f_n - о.р.ф., определенная так: $\lambda x f_n(x) \leftrightharpoons \lambda x sg(n \dot{-} x)$. Функция f_n в первых n аргументах принимает значение 1, а в остальных - значение 0. Определим отображение $\mu: \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \ldots,\} \to Mor(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2)$ так: $\mu(\emptyset)$ - нигде не определенная функция, $\mu(\{n\}) \leftrightharpoons f_n$.

Проверим, что μ - морфизм из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{M}or(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2)$. Семейство $\{g_n\}_{n \in N}$ функций, определенных так: $g_n \leftrightharpoons \mu\nu_0(n)$, является вычислимым семейством частично рекурсивных функций, принимающих значение только 0 или 1; тогда если $\bar{\nu}$ - нумерация $\mathcal{M}or(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2)$, то существует о.р.ф. h такая, что $g_n = \bar{\nu} h(n)$ или $\mu\nu_0 = \bar{\nu} h$. Итак, μ - морфизм и, так как, очевидно, μ - одно-однозначное отображение, $(\mathcal{P}, \mu)$ - подобъект $\mathcal{M}or(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2)$. Покажем, что $(\mathcal{P}, \mu)$ - ретракт $\mathcal{P}_2^\omega$. Определим последовательность $\{F_x\}_{x \in N}$ конечных множеств так: для $x \in N$

$$F_x \leftrightharpoons \begin{cases} \{n\}, & \text{если функция } \bar{\nu}(x) \text{ определена в точках } 0, 1, \ldots, n \\ & \text{и принимает значения } \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \text{ соответственно;} \\ \emptyset & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Последовательность $\{F_x\}_{x \in N}$, очевидно, вычислима (ввиду вычислимости нумерации $\bar{\nu}$), и поэтому существует о.р.ф. h такая, что $F_x = \nu_0 h(x)$, но соответствие $\bar{\nu}(x) \rightsquigarrow F_x$ задает отображение

$$\mu^*: Mor(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2) \to \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \ldots\},$$

которое, как только что замечено, является морфизмом из $\mathfrak{Mor}(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2)$ в $\mathcal{P}$.

Остается заметить, что $\mu^*\mu = 1_{\mathcal{P}}$, но это проверяется непосредственно. Итак, $\mathcal{P}$ является ретрактом $\mathcal{P}_2^{\omega} = \mathfrak{Mor}(\mathcal{N}, \mathcal{P}_2)$, поэтому по следствию 2 к теореме 2

$$P(\gamma, \mathcal{P}_2^{\omega}) \Longrightarrow P(\gamma, \mathcal{P}).$$

Но по следствию 3 к теореме 5 $P(\gamma, \mathcal{P}_2^{\omega}) \Longleftrightarrow P(\gamma, \mathcal{P}_2)$. Поэтому $P(\gamma, \mathcal{P}_2) \Longrightarrow P(\gamma, \mathcal{P})$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого конечного нумерованного множества γ проблема P для пары $(\gamma, \mathcal{P})$ разрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если γ – такое нумерованное множество, что множество $Mor(\gamma, \mathcal{P}_2)$ конечно, то проблема P для пары $(\gamma, \mathcal{P})$ разрешима.*

Эти следствия вытекают из предложения 4 и теорем 4 и 4'.

В заключение приведем некоторые проблемы, естественно возникающие после проведенных рассмотрений.

ПРОБЛЕМА 1. Существуют ли конечные нумерованные множества γ_0 и γ_1 такие, что проблема P для пары (γ_0, γ_1) не разрешима?

Ответ, наверное, будет положительным и даже при более сильных ограничениях.

ПРОБЛЕМА 2. Существует ли двухэлементное отделимое нумерованное множество γ такое, что для пары (γ, γ) проблема P не разрешима?

Построение подходящего примера связано с изучением m-сводимости рекурсивно перечислимых множеств.

ПРОБЛЕМА 3. Существует ли не предполное нумерованное множество γ такое, что для пары $(\mathcal{N}, \gamma)$ проблема P разрешима?

По-видимому, такие множества существуют. В связи с этой проблемой может быть полезно следующее предложение, существенно использующее в доказательстве технику построения клиниевской универсальной функции, предложенную А.И.Мальцевым [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если существует хотя бы одна вычислимая нумерация все-*

го множества $Mor(N,\gamma)$, то для пары (N,γ) проблема P разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\nu}: N \longrightarrow Mor(N,\gamma)$ - вычислимая нумерация. Тогда существует двуместная о.р.ф. h такая, что $\mu_{\bar{\nu}}(n,x) \leftrightharpoons [\bar{\nu}(n)](x) = \nu h(x,y)$, где ν - нумерация γ, $\mu_{\bar{\nu}}$ - морфизм из $N \times N$ в γ.

Рассмотрим отображение $\mu: N \times N \longrightarrow S$, определенное так:

$\mu(x,y) \leftrightharpoons [\bar{\nu}(\ell(x))](c(r(x),y)) = \nu h(\ell(x), c(r(x),y))$, здесь c, ℓ, r - канторовские нумерационные функции. Из указанного выше равенства следует, что μ есть морфизм из $N \times N$ в γ. Этот морфизм задает вычислимую нумерацию $\nu^*: N \longrightarrow Mor(N,\gamma)$ (вообще говоря, некоторого подсемейства $Mor(N,\gamma)$, но ниже будет показано, что всего $Mor(N,\gamma)$) так: $\nu^*(n) \leftrightharpoons \lambda x \mu(n,x)$.

Проверим следующее тождество $\mu(c(x,y),z) = \mu_{\bar{\nu}}(x, c(x,y))$

$$\mu(c(x,y),z) = [\bar{\nu}(x)](c(y,z)) = \mu_{\bar{\nu}}(x, c(y,z)).$$

Пусть $\tilde{\nu}: N \longrightarrow \tilde{M} \subseteq Mor(N,\gamma)$ - произвольная вычислимая нумерация семейства $\tilde{M}$ морфизмов из N в γ, тогда отображение $\mu_{\tilde{\nu}}: N \times N \longrightarrow S: \mu_{\tilde{\nu}}(x,y) \leftrightharpoons [\tilde{\nu}(x)](y)$ есть морфизм из $N \times N$ в γ, отображение $\tilde{\mu}: N \longrightarrow S$, определенное так:

$$\tilde{\mu}(x) \leftrightharpoons \mu_{\tilde{\nu}}(\ell(x), r(x)),$$

есть морфизм из N в γ. Так как $\bar{\nu}$ - нумерация всего множества $Mor(N,\gamma)$, то существует n_0 такое, что $\bar{\nu}(n_0) = \tilde{\mu}$. Рассмотрим функцию $g \leftrightharpoons \lambda x c(n_0, x)$, g - о.р.ф. и для любых $x, y \in N$

$$[\tilde{\nu}(x)](y) = \mu_{\tilde{\nu}}(x,y) = \tilde{\mu}(c(x,y)) = [\bar{\nu}(n_0)](c(x,y)) =$$

$$= \mu_{\bar{\nu}}(n_0, c(x,y)) = \mu(c(n_0,x), y) = [\nu^* c(n_0,x)](y) = [\nu^* g(x)](y).$$

Следовательно, $\tilde{\nu} = \nu^* g$, $\tilde{\nu} \leq \nu^*$. Итак, ν^* - главная вычислимая нумерация. Предложение доказано.

В связи с только что доказанным предложением возникает следующая

ПРОБЛЕМА 4. Имеются ли такие пары (γ_0, γ_1) нумерованных множеств, для которых а) проблема P не разрешима, но б) существует вычислимая нумерация всего множества $Mor(\gamma_0, \gamma_1)$?

Заметим, что из положительного решения проблемы 1 (и тем бо-

лее проблемы 2) следует и положительное решение проблемы 4, так как всякое конечное семейство допускает вычислимую нумерацию (таковой будет, например, разрешимая нумерация).

§ 5. sn - подобъекты нумерованного множества Π

Дадим сначала общее определение sn -подобъекта. Пусть $\gamma = (S,\nu)$ - нумерованное множество, подобъект (γ_0,μ) нумерованного множества γ назовем sn - подобъектом γ, если существует о.р.ф. g такая, что

1) $\forall x \in \nu^{-1}\mu(S_0)(\mu\nu_0 g(x) = \nu(x))$;

2) $\forall x \in N(\mu\nu_0 g(x) \leq_\nu \nu(x))$,

где $\leq_\nu$ - это ν - предпорядок на множестве S.

Из условия 1) следует, что всякий sn -подобъект является n - подобъектом. Заметим далее, что более интересно изучать понятия sn - подобъекта для отделимых нумерованных множеств γ (если, напри - мер, $s \leq_\nu s'$ для всех $s, s' \in S$, то понятия sn -подобъекта и n - подобъекта для γ совпадут).

Если $\gamma = (S,\nu)$ - нумерованное множество, $S' \subseteq S$, то назовем S' sn- подмножеством S, если существует такая нумерация ν': $N \to S'$, что $\gamma' = (S',\nu')$ вместе с тождественным вложением является sn -подобъектом γ.

Введенные определения навеяны определением специального стандартного класса рекурсивно перечислимых множеств, введенного А.Лахланом [5], что соответствует понятию sn -подмножества нумеро - ванного множества $\Pi = (P_n, \pi)$, P_n - класс всех рекурсивно перечислимых множеств, а π - главная вычислимая (постовская) нуме - рация этого класса.

Этот частный случай и будет в основном исследоваться. Возможности для такого исследования доставляет следующее важное утверждение, дающее другое описание класса всех sn - подмножеств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (А.Лахлан [5]). Класс $K \subseteq P_n$ рекурсивно перечислимых множеств является sn - подмножеством Π, если и только если существует сильно перечислимый класс Φ конечных мно -

жеств такой, что

1) $\phi \in \Phi$;

2) $R \in K \Longleftrightarrow R \in P_n$ и существует последовательность $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$ множеств из Φ такая, что $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq \ldots$ и $R = \bigcup_{i=0}^{\omega} F_i$

Доказательство этого предложения можно найти в статье [5].

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что Φ , удовлетворяющее условию 2 предложения, обязательно состоит из всех конечных множеств класса K .

Используя это замечание, а также важную теорему Лахлана из статьи [6] , можно дать другую характеризацию sn -подмножеств Π .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6′ . Класс $K \subseteq P_n$ является sn -подмножеством Π тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) Класс K обладает главной вычислимой нумерацией.

2) $\phi \in K$.

3) Семейство всех конечных подмножеств из K сильно перечислимо и плотно в K.

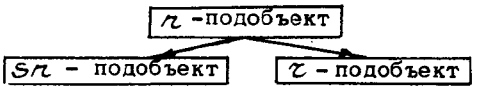
Отметим без доказательства следующие общие факты об sn -подобъектах (доказательства, как в § 4 книги [2]):

Пусть γ_0, γ_1 и γ_2 - нумерованные множества, $\mu_0 : \gamma_0 \longrightarrow \gamma_1$ и $\mu_1 : \gamma_1 \longrightarrow \gamma$ - морфизмы, тогда

I. Если (γ_0, μ_0) - sn - подобъект γ_1 , а (γ_1, μ_1)- sn - подобъект γ_2 , то $(\gamma_0, \mu_1 \mu_0)$ - sn - подобъект γ_2 .

II. Если $(\gamma_0, \mu_1 \mu_0)$ - sn - подобъект γ_2 , то (γ_0, μ_0) - sn - подобъект γ_1 .

Выше уже было отмечено, что всякий sn -подобъект есть n -подобъект. Используя предложение 6, легко получить пример sn -подобъекта, который не является ретрактом, и пример ретракта (и тем более n -подобъекта), который не является sn -подобъектом, так что табличка



учитывает все отношения включения между этими понятиями.

Вернемся к sn -подобъектам Π . В лемме 4 § 8 книги [2] было показано, что нумерованное множество $K=(\Psi_p, \varkappa)$ - класс всех одноместных ч.р.ф. с главной вычислимой (клиниевской) нумерацией $\varkappa$ является n -подобъектом Π . На самом деле внимательный просмотр доказательства этой леммы показывает, что K является sn -подобъектом Π . Здесь важно отметить, что частичный порядок $\leq_\pi$ на P_n совпадает с отношением включения $\subseteq$.

Другим важным примером sn -подобъекта Π является нумерованное множество $\mathcal{P}=(\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \ldots\}, \tilde{\nu})$, так как $\tilde{\nu}$ является главной вычислимой нумерацией семейства множеств $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \ldots\}$.

Из того, что sn -подобъект является n -подобъектом, следует, что sn -подобъект Π является предполным нумерованным множеством, однако из того, что имеется наименьший элемент, легко вытекает, что

всякий sn -подобъект Π является полно нумерованным множеством.

Оказывается, что многие важные теоремы, доказанные для нумерованных множеств Π и K , будут справедливы и для произвольных sn -подобъектов Π .

Пусть $K \subseteq P_n$ - sn -подмножество Π и g - о.р.ф. такая, что

1) $\pi_n \in K \Longrightarrow \pi_n = \pi_{g(n)}$;

2) $\pi_{g(n)} \subseteq \pi_n$ для всех n .

Положим $\nu = \pi g : N \longrightarrow K$; ν - нумерация K и $((K, \nu), 1_K)$ - sn - подобъект Π . Пусть Φ - семейство всех конечных множеств из K и $\nu_0 : N \to \Phi$ - такая нумерация Φ , что $\nu_0 \leq \vartheta$, где ϑ - стандартная нумерация всех конечных множеств. Тогда $((\Phi, \nu_0), 1_\Phi)$ есть подобъект (K, ν) , а предикат $R(x,y) \rightleftharpoons \nu_0(x) \subseteq \nu(y)$ рекурсивно перечислим.

Дадим теперь описание всех ν -вполне перечислимых подмножеств K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Непустое подмножество $K' \subseteq K$ является ν -вполне перечислимым, если и только если существует ν_0 -перечислимое подмножество $\Phi' \subseteq \Phi$ такое, что для $R \in K$:

$$R \in K' \Longleftrightarrow \exists F \in \Phi'(F \subseteq R).$$

Доказательство этого утверждения легко получить, почти дословно повторив доказательство предложения 2 § 8 книги [2]. Единственно, что нужно отметить дополнительно (что в явном виде не содержится в формулировке предложения 6), это следующее утверждение.

ЛЕММА 8. Если $R \in K$ бесконечно, то существует сильно вычислимая (или, что то же, ν_0 - вычислимая) последовательность конечных множеств $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$ из Φ такая, что $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq \ldots$, и $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i = R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ - сильная последовательность конечных множеств такая, что $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = R$. Определим функцию h следующим образом:

$$h(0) \leftrightharpoons \ell[\mu x(\nu_0 \ell(x) \supseteq A_0 \,\&\, \nu_0 \ell(x) \subseteq A_{r(x)})];$$

$$h(n+1) \leftrightharpoons \ell[\mu x(\nu_0 \ell(x) \supseteq A_{n+1} \cup \nu_0 h(n) \,\&\, \nu_0 \ell(x) \subseteq A_{r(x)})].$$

Предикаты, стоящие в круглых скобках рекурсивны, а условие 2 предложения 6 гарантирует существание числа x, удовлетворяющего этим предикатам. Поэтому функция h общерекурсивна, а последовательность конечных множеств

$$F_0 \leftrightharpoons \nu_0 h(0), \quad F_1 \leftrightharpoons \nu_0 h(1), \ldots, F_n \leftrightharpoons \nu_0 h(n), \ldots$$

удовлетворяет, очевидно, заключению леммы. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $R \in K$, F - конечное подмножество R, то существует $F_0 \in \Phi$ такое, что $F \subseteq F_0 \subseteq R$

Предложение 7 будет часто использоваться в дальнейшем изложении. Как было определено в § 2, под частично рекурсивным функционалом над нумерованным множеством γ понимается морфизм из γ в $\mathcal{P}$. Используя предложение 7, докажем аналог теоремы Майхилла-Шефердсона.

Сначала введем одно полезное понятие. Пусть $\gamma = (S, \nu)$ - нумерованное множество. Последовательность $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ подмножеств S назовем ν - вычислимой, если предикат R

$R(x,y) \leftrightharpoons \nu(y) \in S_x$ рекурсивно перечислим.

ЛЕММА 9. Если $\mathcal{Y}=(S,\nu)$ и $\overline{\mathcal{Y}}=(\overline{S},\overline{\nu})$ - нумерованные множества, $\mu:\mathcal{Y}\longrightarrow\overline{\mathcal{Y}}$ - морфизм, а $\{\overline{S}_i\}_{i\in N}$ - $\overline{\nu}$ - вычислимая последовательность, то последовательность $\{S_i\}_{i\in N}$, $S_i \leftrightharpoons \mu^{-1}(\overline{S}_i)$, $i\in N$, ν - вычислима.

Это утверждение очевидно (см. лемму 6 § 4 книги [2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $((K,\nu), 1_K)$ - $\mathfrak{sn}$ - подобъект Π, Φ - семейство всех конечных множеств из K и $\nu_0: N\longrightarrow\Phi$ - ϑ- вычислимая нумерация Φ. Отображение $\mu: K\longrightarrow\{\emptyset,\{0\},\{1\},\dots\}$ будет частично рекурсивным функционалом тогда и только тогда, когда последовательность множеств $\Phi_0,\Phi_1,\dots$ ϑ- вычислима (или, что то же, ν_0 - вычислима), где $\Phi_k \leftrightharpoons \Phi\cap\mu^{-1}(\{k\})$, а само отображение μ - монотонно, то есть из $R_0\subseteq R_1\in K$ следует, что $\mu(R_0)\subseteq\mu(R_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение μ есть морфизм из (K,ν) в $\mathcal{P}$. Рассмотрим композицию морфизмов

$$(\Phi,\nu_0)\xrightarrow{1_\Phi}(K,\nu)\xrightarrow{\mu}\mathcal{P},$$

обозначим её $\mu|\Phi$. Так как $\mu|\Phi$ - морфизм из (Φ,ν_0) в $\mathcal{P}$, а последовательность $\{0\},\{1\},\dots$ $\tilde{\nu}$ - вычислима, то по лемме 9 последовательность $\Phi'_0,\Phi'_1,\dots$, где $\Phi'_k \leftrightharpoons (\mu|\Phi)^{-1}(\{k\})$, - ν_0 - вычислима. Но $\Phi'_k=(\mu|\Phi)^{-1}(\{k\})=\mu^{-1}(\{k\})\cap\Phi=\Phi_k$.

То, что μ монотонно, следует из леммы 5 § 9 книги [2]. Необходимость доказана. Докажем достаточность. Пусть последовательность $\{\Phi_k=\mu^{-1}(\{k\})\cap\Phi\}_{k\in N}$ ν_0 -вычислима. Рассмотрим следующее множество пар натуральных чисел:

$$\Gamma \leftrightharpoons \{\langle x,y\rangle \mid \exists z(\nu_0(z)\in\Phi_y \;\&\; \nu_0(z)\subseteq\nu(x))\}.$$

Из определения Γ видно, что Γ рекурсивно перечислимо. Докажем, что

а) Γ - график;

б) если $\mu(\nu(x))=\emptyset$, то для любого $y\in N$ $\langle x,y\rangle\notin\Gamma$;

в) если $\mu(\nu(x))=\{k\}$, то $\langle x,k\rangle\in\Gamma$.

Заметим, что множества $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ попарно не пересекаются. Пусть $\langle x, y_0 \rangle$, $\langle x, y_1 \rangle \in \Gamma$. Тогда существуют z_0, z_1 такие, что

$$\nu_0(z_0) \in \Phi_{y_0} \;\&\; \nu_0(z_0) \subseteq \nu(x),\; \nu_0(z_1) \in \Phi_{y_1} \;\&\; \nu_0(z_1) \subseteq \nu(x).$$

Так как $\nu_0(z_0) \in \Phi_{y_0}$, то $\mu(\nu_0(z_0)) = \{y_0\}$; из включения $\nu_0(z_0) \subseteq \nu(x)$ и монотонности μ следует, что $\mu\nu(x) = \{y_0\}$. Аналогично, $\mu\nu(x) = \{y_1\}$, и, следовательно, $y_0 = y_1$, и Γ – график. Попутно установлено б) и в).

Пусть g – ч.р.ф., графиком которой является Γ. Так как $\mathcal{P}$ – полно нумерованное множество, то существует о.р.ф. h такая, что

$$\tilde{\nu}h(x) = \begin{cases} \tilde{\nu}g(x), & \text{если } x \in \mathcal{D}_g; \\ \phi, & \text{если } x \notin \mathcal{D}_g. \end{cases}$$

Проверим, что $\mu\nu = \tilde{\nu}h$. Если $x \in \mathcal{D}_g$, то $\mu\nu(x) = \{g(x)\} = \tilde{\nu}g(x) = \tilde{\nu}h(x)$ по пункту в); если $x \notin \mathcal{D}_g$, то по б) $\mu\nu(x) = \phi$, но и $\tilde{\nu}h(x) = \phi$. Итак, $\mu\nu = \tilde{\nu}h$, и, следовательно, μ – морфизм из (K, ν) в $\mathcal{P}$. Предложение доказано.

Обратимся теперь к изучению морфизмов между sn-подобъектами Π. Пусть K_i – sn-подмножество Π, ν_i – главная вычислимая нумерация K_i (так что (K_i, ν_i) – sn-подобъект Π), Φ_i – семейство всех конечных подмножеств из K_i, $\varphi_i : N \to \Phi_i$ – нумерация Φ_i, сводящаяся к стандартной нумерации ϑ всех конечных множеств, где $i = 0, 1$.

Следующее предложение является обобщением предыдущего.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\mu : K_0 \to K_1$ – отображение из K_0 в K_1. Это отображение будет морфизмом из (K_0, ν_0) в (K_1, ν_1) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. μ монотонно, то есть $R_0 \subseteq R_1 \in K_0 \Longrightarrow \mu(R_0) \subseteq \mu(R_1)$.

2. Для любого $R \in K_0$ $\mu(R) = \bigcup\{\mu'F) \mid F \in \Phi_0$ и $F \subseteq R\}$.

3. Множество пар $\Delta_\mu \rightleftharpoons \{\langle x, y \rangle \mid \varphi_1(y) \subseteq \mu\varphi_0(x)\}$ рекурсивно перечислимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – морфизм. Условие 1 тогда очевидно. Предположим, что условие 2 не выполняется для некоторого R_0.

Тогда найдется конечное множество $F_1 \in \Phi_1$, $F_1 \subseteq \mu(R_0)$ такое, что для любого конечного множества $F_0 \in \Phi_0$, $F_0 \subseteq R_0$, $\mu(F_0) \not\supseteq F_1$. Семейство $\bar{K} \leftrightharpoons \{R \mid R \in K_1$ и $R \supseteq F_1\}$ является ν_1 - вполне перечислимым в K_1, тогда и $\mu^{-1}(\bar{K})$ ν_0 - вполне перечислимо, $R_0 \in \mu^{-1}(\bar{K})$. По предложению 7 существует $F_0 \in \Phi_0$, $F_0 \subseteq R_0$ и $F_0 \in \mu^{-1}(\bar{K})$. Но $F_0 \in \mu^{-1}(\bar{K})$ означает, что $\mu(F_0) \supseteq F_1$. Противоречие. Итак, условие 2 также выполнено.

Пусть f - о.р.ф. такая, что $\mu\varphi_0 = \nu_1 f$ (так как $((\Phi_0, y_0), 1_{\Phi_0})$ - подобъект (K_0, ν_0), а μ - морфизм из (K_0, ν_0) в (K_1, ν_1), то ограничение μ на Φ_0 есть морфизм из (Φ_0, φ_0) в (K_1, ν_1)). Имеем следующую эквивалентность

$$<x, y> \in \Delta_\mu \Longleftrightarrow \varphi_1(y) \subseteq \nu_1 f(x).$$

Так как бинарное отношение $\varphi_1(y) \subseteq \nu_1(x)$ рекурсивно перечислимо, то и отношение, стоящее справа в эквивалентности, также рекурсивно перечислимо. Следовательно, множество Δ_μ рекурсивно перечислимо. Условие 3 выполнено. Итак, необходимость условий 1-3 выполнена.

Докажем достаточность. Пусть условия 1-3 выполнены. Рассмотрим следующую последовательность множества $\{R_i\}_{i \in N}$,

$$R_i \leftrightharpoons \cup\{\varphi_1(y) \mid \exists x(\varphi_0(x) \subseteq \nu_0(i) \,\&\, <x, y> \in \Delta_\mu)\}.$$

Из определения этой последовательности видно, что это вычислимая последовательность рекурсивно перечислимых множеств. Докажем, что для любого $i \in N$ $R_i = \mu\nu_0(i)$. Пусть $F_1 \in \Phi_1$ таково, что $F_1 \subseteq \mu\nu_0(i)$, пусть y - φ_1 - номер F_1. Из условий 1, 2 (и того, что всякое множество из K_0 есть объединение возрастающей цепочки множества из Φ_0) вытекает, что существует $F_0 \in \Phi_0$ такое, что $F_0 \subseteq \nu_0(i)$ и $\mu(F_0) \supseteq F_1$; пусть x - φ_0 - номер F_0, тогда $\varphi_0(x) \subseteq \nu_0(i)$ и $\mu\varphi_0(x) \supseteq \varphi_1(y)$, то есть $<x, y> \in \Delta_\mu$. Следовательно, $F_1 \subseteq R_i$. Так как $\mu\nu_0(i)$ есть объединение возрастающей цепочки множеств из Φ_1, то из доказанного следует, что $\mu\nu_0(y) \subseteq R_i$. Пусть $z \in R_i$, а x и y таковы, что $\varphi_0(x) \subseteq \nu_0(i) \,\&\, <x, y> \in \Delta_\mu$ и $z \in \varphi_1(y)$. Но тогда $z \in \varphi_1(y) \subseteq \mu\varphi_0(x) \subseteq \mu\nu_0(i)$. Следовательно, $R_i \subseteq \mu\nu_0(i)$ и $R_i = \mu\nu_0(i)$. Итак, $\{R_i\}_{i \in N}$ - вычислимая последовательность множеств из K_1. Так как ν_1 - главная вычислимая нумерация K_1, то существует о.р.ф. f такая, что для всех $i \in N$ $R_i = \nu_1 f(i)$. Но тогда $\mu\nu_0 = \nu_1 f$ и μ есть морфизм из (K_0, ν_0) в (K_1, ν_1). Предложе -

ние доказано.

Итак, с каждым морфизмом μ из (K_0, ν_0) в (K_1, ν_1) связано рекурсивно перечислимое множество Δ_μ. С помощью множеств Δ_μ можно сформулировать критерий вычислимости нумераций семейства морфизмов из (K_0, ν_0) в (K_1, ν_1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Отображение

$$\nu : N \longrightarrow Mor((K_0, \nu_0), (K_1, \nu_1))$$

является вычислимым тогда и только тогда, когда последовательность рекурсивно перечислимых множеств $\{\Delta_{\nu(i)}\}_{i \in N}$ - вычислима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν - вычислимое отображение, тогда существует двуместная о.р.ф. h такая, что для любых $x, y \in N$ $[\nu(x)]\nu_0(y) = \nu_1 h(x,y)$. Если f_0 - о.р.ф. такая, что $\varphi_0 = \nu_0 f_0$, то

$$\langle x, y \rangle \in \Delta_{\nu(i)} \Longleftrightarrow \varphi_1(y) \subseteq [\nu(i)]\varphi_0(x) \Longleftrightarrow \varphi_1(y) \subseteq [\nu(i)]\nu_0 f_0(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \varphi_1(y) \subseteq \nu_1 h(i, f_0(x)).$$

Отсюда последовательность $\{\Delta_{\nu(i)}\}_{i \in N}$ вычислима.

Наоборот, пусть эта последовательность вычислима. Рассмотрим семейство $\{R_{i,j}\}_{i,j \in N}$ - двойную последовательность, определенную так:

$$R_{i,j} \rightleftharpoons \bigcup\{\varphi_1(y) \mid \exists x(\varphi_0(x) \subseteq \nu_0(j) \,\&\, \langle x, y \rangle \in \Delta_{\nu(i)}\}, \; i, j \in N.$$

Из определения видно, что эта двойная последовательность вычислима. Как в предыдущем предложении, легко доказывается, что

$$R_{i,j} = [\nu(i)]\,\nu_0(j).$$

Следовательно, все $R_{i,j} \in K_1$, и тогда существует двуместная о.р.ф. h такая, что $R_{i,j} = \nu_1 h(i,j)$ для всех $i, j \in N$. Вместе с предыдущим это дает равенство $[\nu(i)]\,\nu_0(j) = \nu_1 h(i,j)$ для $i, j \in N$. Это и показывает вычислимость ν. Предложение доказано.

Изучим теперь вопрос, когда же рекурсивно перечислимое множество пар Δ имеет вид Δ_μ для некоторого морфизма μ из (K_0, ν_0) в (K_1, ν_1). Ответ дает следующая

ЛЕММА 10. Рекурсивно перечислимое множества пар Δ имеет вид Δ_μ для некоторого $\mu:(K_0,\nu_0)\longrightarrow(K_1,\nu_1)$ тогда и только, тогда, когда выполнены условия:

0) если $\varphi_1(y)=\emptyset$, то для любого x $\langle x,y\rangle\in\Delta$;

1) $\langle x,y\rangle\in\Delta\ \&\ \varphi_0(x)\subseteq\varphi_0(x')\implies\langle x',y\rangle\in\Delta$;

2) $\langle x,y\rangle\in\Delta\ \&\ \varphi_1(y')\subseteq\varphi_1(y)\implies\langle x,y'\rangle\in\Delta$;

3) $\langle x,y_0\rangle\in\Delta\ \&\ \langle x,y_1\rangle\in\Delta\implies\exists z(\langle x,z\rangle\in\Delta\ \&$

$\&\ \varphi_1(y_0)\cup\varphi_1(y_1)\subseteq\varphi_1(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ - морфизм, тогда если $\varphi_0(x)\subseteq\varphi_0(x')$ и $\varphi_1(y')\subseteq\varphi_1(y)$ и $\langle x,y\rangle\in\Delta_\mu$, то есть $\varphi_1(y)\subseteq\mu\varphi_0(x)$, имеем $\varphi_1(y')\subseteq\varphi_1(y)\subseteq\mu\varphi_0(x)\subseteq\mu\varphi_0(x')$ и, следовательно, $\langle x',y'\rangle\in\Delta_\mu$. Условия 1) и 2) выполнены. Условие 0) для Δ_μ очевидно. Проверим условие 3). Пусть $\langle x,y_0\rangle\in\Delta_\mu$ и $\langle x,y_1\rangle\in\Delta_\mu$, то есть $\varphi_1(y_0)\subseteq\mu\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(y_1)\subseteq\mu\varphi_0(x)$. Так как $\mu\varphi_0(x)\in K_1$ и $\varphi_1(y_0)\cup\varphi_1(y_1)\subseteq\mu\varphi_0(x)$, то по следствию к лемме 8 существует z такое, что $[\varphi_1(y_0)\cup\varphi_1(y_1)]\subseteq\varphi_1(z)\subseteq\mu\varphi_0(x)$, но тогда $\langle x,z\rangle\in\Delta_\mu$ и $\varphi_1(y_0)\subseteq\varphi_1(z)$ и $\varphi_1(y_1)\subseteq\varphi_1(z)$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть Δ - рекурсивно перечислимое множество пар, удовлетворяющее условиям 0)-3). Определим некоторое отображение μ из K_0 во множество $P(N)$ всех подмножеств N так: для $R\in K_0$

$$\mu(R)\rightleftharpoons\cup\{\varphi_0(y)\mid\exists x(\langle x,y\rangle\in\Delta\ \&\ \varphi_0(x)\subseteq R)\}.$$

Из определения видно, что $\mu(R)$ всегда рекурсивно перечислимо. Докажем, что $\mu(R)\in K_1$ для всех $R\in K_0$.

Множество $L\rightleftharpoons\{y\mid\exists x(\langle x,y\rangle\in\Delta\ \&\ y_0(x)\subseteq R)\}$ рекурсивно перечислимо. Пусть f - о.р.ф., перечисляющая L ($L\neq\emptyset$, так как по условию 0) если $\varphi_1(y)=\emptyset$, то $y\in L$).

Построим функцию g так:

$$g(0)\rightleftharpoons f(0);$$

$$g(n+1)\rightleftharpoons f(\mu x(\varphi_1 g(n)\cup\varphi_1 f(n)\subseteq\varphi_1 f(x))).$$

Покажем, что g всюду определена. Для этого достаточно проверить, что если $y_0, y_1 \in L$, то существует $z \in L$ такое, что $\varphi_1(z) \supseteq \varphi_1(y_0) \cup \varphi_1(y_1)$. Пусть x_0 и x_1 таковы, что $\langle x_0, y_0 \rangle \in \Delta, \langle x_1, y_1 \rangle \in \Delta$ и $\varphi_0(x_0) \subseteq R$, $\varphi_0(x_1) \subseteq R$. По следствию к лемме 8 существует x такое, что $[\varphi_0(x_0) \cup \varphi_0(x_1)] \subseteq \varphi_0(x) \subseteq R$. По условию 1 имеем $\langle x, y_0 \rangle \in \Delta$ и $\langle x, y_1 \rangle \in \Delta$, а по условию 3 тогда существует z такое, что $\langle x, z \rangle \in \Delta$ и $[\varphi_1(y_0) \cup \varphi_1(y_1)] \subseteq \varphi_1(z)$. Итак, g всюду определена и, следовательно, общерекурсивна. Далее, $\varphi_1 g(0) \subseteq \varphi_1 g(1) \subseteq \ldots$ и

$$\bigcup_{n \in \omega} \varphi_1 g(n) = \bigcup_{n \in \omega} \varphi_1 f(n) = \mu(R).$$

Так как $\mu(R)$ есть объединение возрастающей сильно перечислимой последовательности множеств из Φ_1, то $\mu(R) \in K_1$. Далее, как в предыдущих предложениях, доказывается, что последовательность $\{\mu \nu_0(i)\}_{i \in N}$ вычислима. Следовательно, существует о.р.ф. h такая, что $\mu \nu_0 = \nu_1 h$. Итак, μ - морфизм. Остается проверить, что $\Delta_\mu = \Delta$. Включение $\Delta \subseteq \Delta_\mu$ очевидно по построению μ. Пусть $\langle x_0, y_0 \rangle \in \Delta_\mu$, то есть $\varphi_1(y_0) \subseteq \mu \varphi_0(x_0)$. Из определения μ и свойства 1) множества Δ следует, что $\mu \varphi_0(x_0) = \bigcup \{\varphi_1(y) \mid \langle x_0, y \rangle \in \Delta\}$. По доказанному выше существует такая последовательность $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$, что $\langle x_0, z_n \rangle \in \Delta$ и $\varphi_1(z_0) \subseteq \varphi_1(z_1) \subseteq \ldots \subseteq \varphi_1(z_n) \subseteq \ldots$ и $\mu \varphi_0(x_0) = \bigcup_{n \in \omega} \varphi_1(z_n)$. Так как $\varphi_1(y_0) \subseteq \mu \varphi_0(x_0)$, то существует z_n такое, что $\varphi_1(y_0) \subseteq \varphi_1(z_n)$. Но $\langle x_0, z_n \rangle \in \Delta$ и $\varphi_1(y_0) \subseteq \varphi_1(z_n)$; по свойству 2) $\langle x_0, y_0 \rangle \in \Delta$. Итак, $\Delta = \Delta_\mu$. Лемма доказана.

Из предложения 10 и леммы 10 вытекает важное следствие, дающее необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы P для пары sn -подобъектов Π:

ТЕОРЕМА 6. Пусть (K_0, ν_0) и (K_1, ν_1) - два sn -подобъекта Π. Проблема P для пары $((K_0, \nu_0), (K_1, \nu_1))$ разрешима тогда и только тогда, когда семейство всех рекурсивно перечислимых множеств пар Δ, обладающих свойствами 0) - 3) леммы 10, имеет главную вычислимую нумерацию.

Непосредственно следует из предложения 10 и леммы 10.

Теорема 6 позволит привести ряд широких достаточных условий разрешимости проблемы P для пар sn -подобъектов Π .

Для формулировки этих условий введем необходимые новые понятия.

Пусть $\langle M, \leqslant \rangle$ - частично упорядоченное множество, предикатом совместности назовем предикат

$$U(x,y) \leftrightarrows \exists z\,(x \leqslant z \,\&\, y \leqslant z)$$

Любое подмножество $M^0 \subseteq M$ назовем совместным, если $\exists z\, \forall x (x \in M^0 \Longrightarrow x \leqslant z)$. Частично упорядоченное множество назовем парусом (**Partial Upper Semilattice**), если из того, что $U(x,y)$, следует существование наименьшей верхней грани, то есть если на $\langle M, \leqslant \rangle$ выполняется формула

$$\forall xy\,(U(x,y) \Longrightarrow \exists z\, \forall z'\,(x \leqslant z' \,\&\, y \leqslant z' \Longleftrightarrow z \leqslant z')).$$

В этом случае на M можно задать частичную операцию $\cup^*$, $x \cup^* y$ определено тогда и только тогда, когда $U(x,y)$, и в этом случае $x \cup^* y$ есть наименьшая верхняя грань элементов x и y .

Если $\mathbb{M} = \langle M, \leqslant \rangle$ - парус и $\forall xy\, U(x,y)$, то $\mathbb{M}$ - верхняя полурешетка или у с (**Upper Semilattice**).

Пусть K - sn -подмножество Π , $\Phi \subseteq K$ - семейство всех конечных множеств из K , ν - главная вычислимая нумерация K (то есть (K, ν) - sn -подобъект Π), φ - нумерация Φ такая, что $\varphi \leqslant \vartheta$. На Φ имеется естественный частичный порядок - включение. Будем говорить, что (K, ν) обладает свойством:

A_0^* , если предикат совместности для Φ конструктивен, то есть множество пар $\{\langle x,y \rangle \mid U(\varphi(x), \varphi(y))\}$ рекурсивно;

A_0 , если конструктивен общий предикат совместности для Φ , а именно предикат $U(x) \leftrightarrows$

$\exists z\, \forall y\, (y \in \vartheta(x) \Longrightarrow \varphi(y) \subseteq \varphi(z))$; .

A_1 , если Φ - конструктивный парус, то есть если Φ - парус, предикат совместности рекурсивен и частная операция $\cup^*$ рекурсивна. Это означает, что множество троек

$\{\langle x,y,z \rangle \mid \varphi(x) \cup^* \varphi(y) = \varphi(z)\}$

рекурсивно;

A_2 , если Φ - конструктивный ус.

Заметим, что свойства расположены в порядке усиления, то есть $A_2 \Longrightarrow A_1$, $A_1 \Longrightarrow A_0$ и $A_0 \Longrightarrow A_0^*$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть (K_0, ν_0) и (K_1, ν_1) – два sr – подобъекта Π, тогда

1. если (K_0, ν_0) удовлетворяет свойству A_0, а (K_1, ν_1) – свойству A_1,

или

2. если (K_0, ν_0) удовлетворяет свойству A_1,

или

3. если (K_1, ν_1) удовлетворяет свойству A_2,

то проблема P разрешима для пары $((K_0, \nu_0), (K_1, \nu_1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все три случая будут рассматриваться отдельно. Общими будут схема доказательства и отдельные этапы доказательства. Обозначим через Φ_i и φ_i, $i=0,1$, соответственно, семейство всех конечных множеств из K_i и нумерацию Φ_i, сводящуюся к ϑ. Пары натуральных чисел будем отождествлять с их номерами, так что рассматриваемые ниже множества пар являются подмножествами N.

1. Пусть выполнено условие 1. Конечное множество пар

$$A = \{\langle x_i, y_i \rangle \mid i=0,1,\dots,r\}$$

назовем допустимым, если выполнено следующее условие:

(*) из того, что множество $\{\varphi_0(x_{i_1}),\dots,\varphi_0(x_{i_j})\}$ совместно в $\langle \Phi_0, \subseteq \rangle$ следует, что множество $\{\varphi_1(y_{i_1}),\dots,\varphi_1(y_{i_j})\}$ совместно в $\langle \Phi_1, \subseteq \rangle$.

Пустое множество также считается допустимым. Из условия 1 и определения допустимого множества следует, что семейство Φ всех конечных допустимых множеств сильно рекурсивно. Φ порождает sr -подмножество K всех рекурсивно перечислимых множеств, которые можно представить в виде объединения возрастающей цепочки конечных допустимых множеств. Бесконечные множества из K также будем называть допустимыми. На самом деле множество $R \in K$, если и только если выполнено условие (*) для всех конечных множеств пар из R. Каждому множеству R из K поставим в соответствие множество

$\Delta(R)$, которое определяется так:

$\Delta(R)$ – это наименьшее из множеств пар M, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $R \subseteq M$;

2) $\langle x,y\rangle \in M \,\&\, \varphi_0(x) \subseteq \varphi_0(u) \,\&\, \varphi_1(v) \subseteq \varphi_1(y) \Longrightarrow \langle u,v\rangle \in M$;

3) $\varphi_1(y) = \emptyset \Longrightarrow \langle x,y\rangle \in M$;

4) $\langle x,y_0\rangle, \langle x,y_1\rangle \in M \,\&\, \{\varphi_1(y_0), \varphi_1(y_1)\}$ – совместно $\&$

$\&\, \varphi_1(y_0) \cup^* \varphi_1(y_1) = \varphi_1(z) \Longrightarrow \langle x,z\rangle \in M$.

Из определения легко видеть, что $\Delta(R)$ – рекурсивно перечислимое множество и его постовский номер может быть эффективно определен по постовскому номеру множества R.

Докажем, что $\Delta(R)$ – допустимое множество. Для этого достаточно доказать три вспомогательных утверждения:

а) Если $A \leftrightharpoons \{\langle x,y\rangle \mid \varphi_1(y) = \emptyset\}$ и R допустимо, то $R \cup A$ допустимо.

Это утверждение совершенно очевидно.

б) Если R допустимо, $\langle x,y\rangle \in R$, $\varphi_0(x) \subseteq \varphi_0(u)$, $\varphi_1(v) \subseteq \varphi_1(y)$, то множество $R \cup \{\langle u,v\rangle\}$ допустимо.

Действительно, пусть $\langle x_0,y_0\rangle, \ldots, \langle x_n,y_n\rangle \in R$ и $\{\varphi_0(x_0), \ldots, \varphi_0(x_n), \varphi_0(u)\}$ совместно, то есть существует z такое, что $[\varphi_0(x_0) \cup \ldots \cup \varphi_0(x_n) \cup \varphi_0(u)] \subseteq \varphi_0(z)$; так как $\varphi_0(x) \subseteq \varphi_0(u)$, то $[\varphi_0(x_0) \cup \ldots \cup \varphi_0(x_n) \cup \varphi_0(x)] \subseteq \varphi_0(z)$ и множество $\{\varphi_0(x_0), \ldots, \varphi_0(x_n), \varphi_0(x)\}$ совместно, тогда из допустимости R следует, что $\{\varphi_1(y_0), \ldots, \varphi_1(y_n), \varphi_1(y)\}$ совместно в Φ_1, то есть существует t такое, что $[\varphi_1(y_0) \cup \ldots \cup \varphi_1(y_n) \cup \varphi_1(y)] \subseteq \varphi_1(t)$, но так как $\varphi_1(v) \subseteq \varphi_1(y)$, то $[\varphi_1(y_0) \cup \ldots \cup \varphi_1(y_n) \cup \varphi_1(v)] \subseteq \varphi_1(t)$. Следовательно, $\{\varphi_1(y_0), \ldots, \varphi_1(y_n), \varphi_1(v)\}$ совместно. Допустимость $R \cup \{\langle u,v\rangle\}$ проверена.

в) Если R допустимо, $\langle x,z_0\rangle \in R$, $\langle x,z_1\rangle \in R$, то $\varphi_1(z_0)$ и $\varphi_1(z_1)$ совместны и для z такого, что $\varphi_1(z) = \varphi_1(z_0) \cup^* \varphi_1(z_1)$, $R \cup \{\langle x,z\rangle\}$ допустимо.

Совместность $\varphi_1(z_0)$ и $\varphi_1(z_1)$ прямо следует из определения допустимости R. Итак, пусть z таково, что $\varphi_1(z) = \varphi_1(z_0) \cup^* \varphi_1(z_1)$.

Пусть $\langle x_0, y_0\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle \in R$ таковы, что $\{\varphi_0(x_0), \ldots$ $\ldots, \varphi_0(x_n), \varphi_0(x)\}$ совместно, тогда по допустимости R множество

$$\{\varphi_1(y_0), \ldots, \varphi_1(y_n), \varphi_1(z_0), \varphi_1(z_1)\}$$

совместно, то есть существует t такое, что

$$[\varphi_1(y_0) \cup \ldots \cup \varphi_1(y_n) \cup \varphi_1(z_0) \cup \varphi_1(z_1)] \subseteq \varphi_1(t);$$

так как $[\varphi_1(z_0) \cup \varphi_1(z_1)] \subseteq \varphi_1(t)$, то $\varphi_1(z) \subseteq \varphi_1(t)$ потому, что $\varphi_1(z) = \varphi_1(z_0) \cup^* \varphi_1(z_1)$, и поэтому $[\varphi_1(y_0) \cup \ldots \cup \varphi_1(y_n) \cup \varphi_1(z)] \subseteq$ $\subseteq \varphi_1(t)$ и $\{\varphi_1(y_0), \ldots, \varphi_1(y_n), \varphi_1(z)\}$ совместно. Допустимость $R \cup \{\langle x, z\rangle\}$ доказана.

Из утверждений а), б), в) и следует допустимость $\Delta(R)$ для любого допустимого R. Заметим также, что $\Delta(\Delta(R)) = \Delta(R)$, а также то, что если R удовлетворяет условиям:

1) $\varphi_1(y) = \emptyset \Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R$;

2) $\langle x, y\rangle \in R \,\&\, \varphi_0(x) \subseteq \varphi_0(u) \,\&\, \varphi_1(v) \subseteq \varphi_1(y) \Longrightarrow \langle u, v\rangle \in R$;

3) $\langle x, y_0\rangle \in R \,\&\, \langle x, y_1\rangle \in R \Longrightarrow \exists z(\langle x, z\rangle \in R \,\&$
$\& \, \varphi_1(y_0) \subseteq \varphi_1(z) \,\&\, \varphi_1(y_1) \subseteq \varphi_1(z))$,

то $\Delta(R) = R$. Это следует из того, что 2) и 3) вместе показывают справедливость свойства

$$\langle x, y_0\rangle \in R \,\&\, \langle x, y_1\rangle \in R \,\&\, \varphi_1(z) = \varphi_1(y_0) \cup^* \varphi_1(y_1) \Longrightarrow \langle x, z\rangle \in R.$$

Таким образом, Δ является отображением K в себя, а точнее, на семейство допустимых множеств, удовлетворяющих условиям 1)-3), причем это отображение эффективно и является ретрактом. Таким образом, класс $\Delta(K)$ является ретрактом K. Теорема 6 показывает теперь, что проблема P разрешима для пары $((K_0, \nu_0), (K_1, \nu_1))$ и, более того, $\mathfrak{Mor}((K_0, \nu_0), (K_1, \nu_1))$ является ретрактом Sn-подобъекта (K, ν), где ν - главная вычислимая нумерация K. Итак, теорема доказана, если выполнено условие 1.

2. Пусть выполнено условие 2. Конечное множество пар

$$A = \{\langle x_0, y_0\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle\}$$

назовем д о п у с т и м ы м, если выполнены следующие условия:

1) для любого $i \leq n$ существует такое число $\bar{y}_i$, что $\langle x_i, \bar{y}_i\rangle \in A$, и если $\langle x_i, y\rangle \in A$, то $\varphi_1(y) \subseteq \varphi_1(\bar{y}_i)$;

2) если $\varphi_0(x_i) \subseteq \varphi_0(x_j)$, $i,j \leq n$, то $\varphi_1(\bar{y}_i) \subseteq \varphi_1(\bar{y}_j)$;

3) если $\varphi_0(x_i)$ и $\varphi_0(x_j)$, $i,j \leq n$, совместны, то существует $k \leq n$ такое, что $\varphi_0(x_k) = \varphi_0(x_i) \cup^* \varphi_0(x_j)$.

Пустое множество также считается допустимым. Из условия 2 и определения допустимых множеств следует, что семейство Φ всех конечных допустимых множеств сильно рекурсивно. Φ порождает $\mathfrak{sn}$ - подмножество K всех рекурсивно перечислимых множеств, которые являются объединениями возрастающих последовательностей конечных допустимых множеств. Определим теперь отображение Δ из K в семейство подмножеств N так: если $R \in K$, то

$$\Delta(R) \leftrightharpoons \{\langle x,y\rangle \mid \varphi_1(y) = \phi$$

или $\exists u,v\,(\langle u,v\rangle \in R \,\&\, \varphi_0(u) \subseteq \varphi_0(x) \,\&\, \varphi_1(y) \subseteq \varphi_1(v)\}$.

$\Delta(R)$ очевидно рекурсивно перечислимо, и его постовский номер может быть эффективно найден по постовскому номеру R.

Покажем, что $\Delta(R)$ также принадлежит K. Пусть $F \subseteq \Delta(R)$ - конечное подмножество. F можно представить в виде объединения $F = F_0 \cup F_1$, $F_0 \cap F_1 = \phi$ так, что $\langle x,y\rangle \in F_0 \Longrightarrow \varphi_1(y) = \phi$ и

$$\langle x,y\rangle \in F_1 \Longrightarrow \exists u,v\,(\langle u,v\rangle \in R \,\&\, \varphi_0(u) \subseteq \varphi_0(x) \,\&\, \varphi_1(y) \subseteq \varphi_1(v)).$$

Рассмотрим конечное подмножество $F_2 \subseteq R$ такое, что в предыдущем условии можно заменить $\langle u,v\rangle \in R$ на $\langle u,v\rangle \in F_2$. Так как $R \in K$, то существует конечное допустимое множество F_3 такое, что $F_2 \subseteq F_3 \subseteq R$. Пусть $x_0,\ldots,x_k$ - все числа x такие, что $\exists y(\langle x,y\rangle \in F_0 \cup F_1 \cup F_3)$. Расширим это множество до конечного множества $\{x_0,\ldots,x_t\}$ такого, что выполняется условие 3) определения допустимого множества. Далее определяем множество $\bar{F}$ так:

$$\bar{F} \leftrightharpoons \{\langle x,y\rangle \mid x \in \{x_0,\ldots,x_t\} \,\&\, \exists \bar{x}(\langle \bar{x},y\rangle \in F_0 \cup F_1 \cup F_3 \,\&\, \varphi_0(\bar{x}) \subseteq \varphi_0(x)\}.$$

Покажем, что $\bar{F}$ - допустимое множество. Рассмотрим произвольное $i \leq t$. Возможны два случая: а) $\exists x_j, y(\langle x_j,y\rangle \in F_3 \,\&\, \varphi_0(x_j) \subseteq \varphi_0(x_i))$, б) не а). Пусть выполнено а), тогда существует такое x_{j_0}, что $\exists y(\langle x_{j_0},y\rangle \in F_3)$ и $\varphi_0(x_{j_0}) \subseteq \varphi_0(x_i)$ и $\varphi_0(x_{j_0})$ - наибольшее среди всех таких $\varphi_0(x_j)$; такое x_{j_0} существует, так как F_3 - допустимое множество (по условию 3)). Рассмотрим тогда $\bar{y}_{j_0}$ (для F_3). По определению $\bar{F}$, $\langle x_i, \bar{y}_{j_0}\rangle \in \bar{F}$, покажем, что если

$\langle x_i, y\rangle \in \bar{F}$, то $\varphi_1(y) \subseteq \varphi_1(\bar{y}_{j_0})$. Пусть $\bar{x}$ таково, что

$\langle \bar{x}, y\rangle \in F_0 \cup F_1 \cup F_3$ и $\varphi_0(\bar{x}) \subseteq \varphi_0(x_i)$.

Если $\langle \bar{x}, y\rangle \in F_0$, то $\varphi_1(y) = \phi$ и $\varphi_1(y) \subseteq \varphi_1(\bar{y}_{j_0})$; если $\langle \bar{x}, y\rangle \in F_3$, то $\varphi_0(\bar{x}) \subseteq \varphi_0(x_{j_0})$ и, следовательно, $\varphi_1(y) \subseteq \varphi_1(\bar{y}_{j_0})$; если же $\langle \bar{x}, y\rangle \in F_1$, то существуют u, v такие, что $\langle u, v\rangle \in F_2 \subseteq F_3$, $\varphi_0(u) \subseteq \varphi_0(\bar{x})$ и $\varphi_1(y) \subseteq \varphi_1(v)$, но тогда $\varphi_0(u) \subseteq \varphi_0(\bar{x}) \subseteq \varphi_0(x_i)$, поэтому $\varphi_1(\bar{y}_{j_0}) \supseteq \varphi_1(v) \supseteq \varphi_1(y)$. Если же выполнено б), то для любого y, если $\langle x_i, y\rangle \in \bar{F}$, то $\varphi_1(y) = \phi$. Итак, условие 1) для $\bar{F}$ выполнено. Проверка условия 2) аналогична проверке условия 1). Условие 3) выполнено по построению. Итак, построено конечное допустимое множество $\bar{F}$ такое, что

$$F = F_0 \cup F_1 \subseteq F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3 \subseteq \bar{F} \subseteq \Delta(R).$$

Следовательно, $\Delta(R) \in K$.

Отметим, что $\Delta(\Delta(R)) = \Delta(R)$ и то, что если $R \in K$ удовлетворяет условиям леммы 10, то $\Delta(R) = R$, а $\Delta(R)$ удовлетворяет условиям этой леммы для любого $R \in K$. Как и в случае выполнения условия 1 теоремы, получаем по теореме 6 разрешимость проблемы P для рассматриваемой пары.

3. Пусть выполнено условие 3. Для любого рекурсивно перечислимого множества R определим $\Delta(R)$ так:

$\Delta(R)$ – наименьшее множество M такое, что выполнены условия:

1) $R \subseteq M$;

2) $\langle x, y\rangle \in M \,\&\, \varphi_0(x) \subseteq \varphi_0(u) \,\&\, \varphi_1(v) \subseteq \varphi_1(y) \Longrightarrow \langle u, v\rangle \in M$;

3) $\varphi_1(y) = \phi \Longrightarrow \langle x, y\rangle \in M$;

4) $\langle x, y_0\rangle, \langle x, y_1\rangle \in M$ и $\varphi_1(z) = \varphi_1(y_0) \cup^* \varphi_1(y_1) \Longrightarrow \langle x, z\rangle \in M$.

Рассуждения, такие же, как при рассмотрении условия 1, показывают, что $\Delta(P_n)$ есть ретракт Π и состоит в точности из множеств вида Δ_μ, где $\mu \in Mor((K_0, \nu_0); (K_1, \nu_1))$. Отсюда из теоремы 6 и следует разрешимость проблемы P для пары $((K_0, \nu_0), (K_1, \nu_1))$. Теорема доказана.

Нумерованное множество $F_\pi(\Pi)$ является sn-подмножеством Π и удовлетворяет свойству A_2. Ранее отмечалось, что мно-

жество $Mor(\gamma, F_\pi(1))$ естественным образом отождествляется с семейством всех вполне перечислимых подмножеств γ.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого sn-подобъекта Π семейство всех вполне перечислимых подмножеств имеет главную вычислимую нумерацию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во всех случаях, рассмотренных в теореме оказывается, что $\mathfrak{Mor}((K_0,\nu_0),(K_1,\nu_1))$ есть ретракт sn-подобъекта Π. Интересно отметить, каким же условиям вида A удовлетворяет этот sn-подобъект. Рассмотрение доказательства дает следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $(K_0,\nu_0),(K_1,\nu_1)$ удовлетворяют

1. условию 1, то $\mathfrak{Mor}((K_0,\nu_0),(K_1,\nu_1))$ есть ретракт sn-подобъекта Π, удовлетворяющего условию A_1;

2. условию 2, а (K_1,ν_1) условию A_0, то $\mathfrak{Mor}((K_0,\nu_0),(K_1,\nu_1))$ есть ретракт sn-подмножества Π, удовлетворяющего условию A_0;

3. условию 3, то $\mathfrak{Mor}((K_0,\nu_0),(K_1,\nu_1))$ есть ретракт Π, которое удовлетворяет условию A_2.

Только что доказанная теорема вместе с теоремой 2 из § 3 позволяет указать определенные подкатегории $\mathfrak{N}$, замкнутые относительно образования $\mathfrak{Mor}$.

Будем говорить, что нумерованное множество γ удовлетворяет условию

B_0, если существует sn-подобъект (K,ν) нумерованного множества Π, удовлетворяющий условию A_0, и морфизм μ: $\gamma \to (K,\nu)$ такой, что (γ,μ) - ретракт (K,ν) (короче, если γ есть ретракт sn-подобъекта Π, удовлетворяющего свойству A_0);

B_1, если γ - ретракт sn-подобъекта Π, удовлетворяющего свойству A_1

B_2, если γ - ретракт sn-подобъекта Π, удовлетворяющего свойству A_2.

ТЕОРЕМА 7'. Пусть γ_0 и γ_1 - нумерованные множества, тогда

1. если γ_0 удовлетворяет свойству B_0, а γ_1 – свойству B_1, то $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ удовлетворяет свойству B_1;

2. если γ_0 удовлетворяет свойству B_1, а γ_1 – свойству B_0, то $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ удовлетворяет свойству B_0;

3. если γ_0 – ретракт sn – подобъекта Π, а γ_1 удовлетворяет свойству B_2, то $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ удовлетворяет свойству B_2.

Если обозначить через $\mathfrak{N}_{B_1}$ полную подкатегорию $\mathfrak{N}$, состоящую из всех нумерованных множеств, удовлетворяющих свойству B_1, то для $\mathfrak{N}_{B_1}$ справедливо следующее свойство замкнутости:

$$\gamma_0,\gamma_1 \in \mathfrak{N}_{B_1} \Longrightarrow P(\gamma_0,\gamma_1)\ \&\ \mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1) \in \mathfrak{N}_{B_1}.$$

Условия теоремы 7, являясь достаточными, ни в коей мере не являются необходимыми для разрешимости проблемы P для пары sn-подобъектов Π. Однако существование некоторых ограничений необходимо. Для примера докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть (K,ν) – sn – подобъект Π. Проблема P разрешима для пары $((K,\nu),\mathfrak{P})$, если и только если (K,ν) удовлетворяет условию A_0^*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из доказательства случая 1 теоремы 7, так как $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию A_1; и в случае $\mathfrak{P}$ для проверки допустимости множества достаточно проверять сохранение совместимости только для пар.

Докажем необходимость. Пусть $\nu_0 : N \to Mor((K,\nu),\mathfrak{P})$ – произвольная вычислимая нумерация всего множества $Mor((K,\nu),\mathfrak{P})$. Пусть Φ – семейство всех конечных множеств из K и φ – нужная нумерация Φ. Множество

$$A \rightleftharpoons \{\langle x,y\rangle \mid \exists z([\nu_0(z)](\varphi(x)) \neq \phi\ \&\ [\nu_0(z)](\varphi(y)) \neq \phi\ \&\ [\nu_0(z)](\varphi(x) \neq [\nu_0(z)](\varphi(y))\}$$

рекурсивно перечислимо и содержит номера пар несовместных множеств $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Наоборот, если $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ несовместны, то отображение

$$\mu(R) \leftrightharpoons \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \varphi(x) \in R; \\ \{1\}, & \text{если } \varphi(y) \in R; \\ \phi & \text{- в противном случае,} \end{cases}$$

есть морфизм из (K,ν) в $\mathcal{P}$ и, если z - номер μ (то есть $\nu_0(z)=\mu$) то

$$[\nu_0(z)](\varphi(x)) = \mu\varphi(x) = \{0\} \text{ и } [\nu_0(z)](\varphi(y)) = \mu\varphi(y) = \{1\}.$$

Таким образом, множество номеров несовместных пар рекурсивно перечислимо, но множество номеров совместных пар всегда рекурсивно перечислимо, так что в этом случае оба эти множества рекурсивны и, следовательно, (K,ν) удовлетворяет условию A_0^*.

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения для разрешимости проблемы P необходимо и достаточно существование хоть какой-нибудь вычислимой нумерации всего множества морфизмов $Mor((K,\nu),\mathcal{P})$.

Приведем теперь два примера.

ПРИМЕР 1. Пусть A рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество, тогда семейство

$$\Phi \leftrightharpoons \{\phi\} \cup \{\{n\} \mid n \in N\} \cup \{\{2n, 2n+1\} \mid n \in A\}$$

сильно перечислимо, образует sn -подмножество Π и не удовлетворяет условию A_0^*, так как совместность $\{2n\}$ и $\{2n+1\}$ эквивалентна условию $n \in A$. Таким образом, проблема P не разрешима для пары $((\Phi,\nu),\mathcal{P})$, где ν - главная вычислимая нумерация Φ.

ПРИМЕР 2. Покажем, что условие A_0 сильнее условия A_0^*. Пусть A - рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество; рассмотрим семейство конечных множеств

$$\Phi \leftrightharpoons \{\phi\} \cup \{\{n\} \mid n \in N\} \cup$$

$$\cup \{\{n_1, n_2, n_3\} \mid n_i \in N, n_1 \neq n_2, n_1 \neq n_3, n_2 \neq n_3\} \setminus \{\{3n, 3n+1, 3n+2\} \mid n \notin A\}.$$

Это семейство сильно перечислимо и образует sn -подмножество Π. Φ удовлетворяет условию A_0^*, так как любые два не более чем одноэлементных множества совместны, любые два различных трехэле-

ментных множества не совместны, а одноэлементное и трехэлементное множества совместны тогда и только тогда, когда первое содержится во втором. Однако проблема совместности трех множеств для Φ не разрешима, так как совместность множеств $\{3n\},\{3n+1\},\{3n+2\}$ равносильна условию $n \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно привести аналогичные примеры, показывающие, что 1) для любого $r>1$ существует сильно перечислимое семейство конечных множеств Φ такое, что проблема совместности не более чем r множеств разрешима, а проблема совместности для $r+1$ множества не разрешима, 2) существует сильно перечислимое семейство конечных множеств Φ такое, что для любого $r>1$ проблема совместности для Φ не более чем r множеств разрешима, но общая проблема совместности не разрешима.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос о наименьшей неподвижной точке морфизма sn -подобъекта Π в себя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть (K,ν) - sn - подобъект Π и $\mu:(K,\nu)\longrightarrow(K,\nu)$ - морфизм, тогда существует такое $R_\mu \in K$, что $\mu(R_\mu)=R_\mu$ и для всех $R\in K$, если $\mu(R)=R$, то $R_\mu \subseteq R$. Если, кроме того $P((K,\nu),(K,\nu))$, то отображение

$$\mu_0 : Mor((K,\nu)(K,\nu)) \longrightarrow K,$$

определенное так: $\mu_0(\mu)=R_\mu$ есть морфизм из $Mor((K,\nu),(K,\nu))$ в (K,ν).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество Δ_μ, определенное в предложении 9, $\Delta_\mu=\{\langle x,y\rangle \mid \varphi(y)\subseteq \mu\varphi(x)\}$, где φ - сильная нумерация семейства Φ конечных множеств из K. Пусть y_0 таково, что $\varphi(y_0)=\emptyset$. Рассмотрим наименьшее множество M, удовлетворяющее условиям:

1) $y_0 \in M$;

2) $\langle x,y\rangle \in \Delta_\mu \;\&\; x\in M \Longrightarrow y\in M$.

Это множество рекурсивно перечислимо, и его постовский номер можно эффективно найти по постовскому номеру Δ_μ. Определим R^0_μ так: $R^0_\mu \rightleftharpoons \bigcup_{x\in M}\varphi(x)$. Покажем, что R^0_μ и есть наименьшая неподвиж-

ная точка. Для этого достаточно доказать равенство $R^0_\mu = \bigcup_{n\in\omega} \mu^n(\phi)$; так как, если это равенство действительно справедливо, то $R^0_\mu \in K$ и $\mu(R^0_\mu) = R^0_\mu$ и, если $\mu(R)=R$, то

$$\phi \subseteq R \Longrightarrow \mu(\phi) \subseteq \mu(R)=R,\ \mu^2(\phi) \subseteq \mu(R) = R$$

и так далее... $\bigcup \mu^n(\phi) \subseteq R$; если R – неподвижная точка.

Пусть $z \in R^0_\mu$, тогда существует такая последовательность $y_1, \ldots, y_n$, что $\langle y_0, y_1\rangle, \langle y_1, y_2\rangle, \ldots, \langle y_{n-1}, y_n\rangle \in \Delta_\mu$ и $z \in \varphi(y_n)$; условие $\langle y_{n-1}, y_n\rangle \in \Delta_\mu$ означает, что

$$\varphi(y_n) \subseteq \mu\varphi(y_{n-1}), \langle y_{n-2}, y_{n-1}\rangle \in \Delta_\mu \Longrightarrow \varphi(y_{n-1}) \subseteq \mu\varphi(y_{n-2}) \& \mu\varphi(y_{n-1}) \subseteq \mu^2\varphi(y_{n-2});$$

продолжая аналогично, получаем, что

$$z \in \varphi(y_n) \subseteq \mu\varphi(y_{n-1}) \subseteq \mu^2\varphi(y_{n-2}) \subseteq \ldots \subseteq \mu^k\varphi(y_{n-k}) \subseteq \ldots \subseteq \mu^n(y_0) = \mu^n(\phi) \subseteq \bigcup_{s\in\omega} \mu^s(\phi).$$

Итак, $R^0_\mu \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \mu^n(\phi)$.

Пусть $z \in \mu^n(\phi)$, тогда существует y_n такое, что

$$z \in \varphi(y_n) \subseteq \mu^n(\phi) = \mu(\mu^{n-1}(\phi)),$$

но тогда существует y_{n-1} такое, что $\varphi(y_{n-1}) \subseteq \mu^{n-1}(\phi)$ и $\varphi(y_n) \subseteq \mu\varphi(y_{n-1})$, то есть $\langle y_{n-1}, y_n\rangle \in \Delta_\mu$, продолжая таким образом, и получаем последовательность $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1$ такую, что

$$\langle y_0, y_1\rangle, \langle y_1, y_2\rangle, \ldots, \langle y_{n-1}, y_n\rangle \in \Delta_\mu.$$

Тогда $y_n \in M$ и $z \in \varphi(y_n) \subseteq \bigcup_{x\in M} \varphi(x) = R^0_\mu$. Итак, $R^0_\mu = \bigcup_{n\in N} \mu^n(\phi)$.

Постовский номер R^0_μ эффективно находится по постовскому номеру множества M и, в конце концов, от постовского номера Δ_μ. Таким образом, если имеется вычислимая нумерация морфизмов из (K, ν) в себя, она индуцирует вычислимую нумерацию множеств вида Δ_μ и, следовательно, вычислимую нумерацию множеств R^0_μ. Из этих замечаний вытекает и заключительная часть предложения. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя результат работы [6], можно без труда доказать следующее обобщение предложения 12:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12′. Пусть K – семейство рекурсивно перечислимых множеств, обладающее наименьшим (по включению) множеством R_0, $\nu : N \to K$ – главная вычис –

лимая нумерация (то есть $((K,\nu), 1_K)$ - главный подобъект Π), тогда для любого морфизма $\mu: (K,\nu) \longrightarrow (K,\nu)$, множество

$$R_\mu \leftrightharpoons \bigcup_{n\in\omega} \mu^n(R_0) \in K$$

и является наименьшей неподвижной точкой μ. Если ещё $P((K,\nu),(K,\nu))$, то соответствие $\mu \rightsquigarrow R_\mu$ есть морфизм из $\mathfrak{Mor}((K,\nu),(K,\nu))$ в (K,ν).

§ 6. Аппроксимация нумерованных множеств

В настоящем параграфе будут расширены условия разрешимости проблемы P , полученные в предыдущем параграфе на более общий случай, чем sr -подобъекты Π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Аппроксимацией нумерованного множества $\gamma=(S,\nu)$ назовем пару (γ_0,μ) , где $\mu: \gamma_0 \longrightarrow \gamma$ и выполнены следующие условия:

1) γ_0 - разрешимое нумерованное множество;

2) предикат $\mu\nu_0(x) \leq_\nu \nu(y)$ рекурсивно перечислим;

3) отношение предпорядка $\preceq$ на S_0 , определенное так: $s_0 \preceq s_1 \leftrightharpoons \mu(s_0) \leq_\nu \mu(s_1)$ является рекурсивным;

4) если $S', S'' \subseteq S$ - два ν -вполне перечислимых подмножества S и $S' \not\subseteq S''$, то существует $s_0 \in S_0$ такой, что $\mu(s_0) \in S' \setminus S''$

Будем говорить, что нумерованное множество γ обладает свойством

C_0 , если γ обладает аппроксимацией;

C_1 , если γ обладает такой аппроксимацией (γ_0,μ) , что общий предикат совместности для предпорядка $\preceq$ на S_0 - рекурсивен;

C_2 , если γ обладает такой аппроксимацией (γ_0,μ) , что $(\gamma_0,\preceq)$ - конструктивный парус.

Будем говорить, что нумерованное множество γ обладает свойством $\mathcal{D}_i$, если γ является ретрактом нумерованного множества, обладающего свойством C_i $(i=0,1,2)$.

Укажем ряд примеров нумерованных множеств с введенными свойствами (заметим, что $C_2 \Rightarrow C_1$, $C_1 \Rightarrow C_0$, $C_i \Rightarrow \mathcal{D}_i$, $\mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_1 \Rightarrow \mathcal{D}_0$)

1. Нумерованное множество N обладает свойством C_2, подходящей аппроксимацией будет $(N, 1_N)$;

1'. Всякое разрешимое нумерованное множество обладает свойством C_2.

2. Если нумерованное множество обладает свойством A_0, то оно обладает свойством C_1; аналогично, $A_1 \Rightarrow C_2$.

3. Всякий sn-подобъект Π обладает свойством C_0.

4. Всякое конечное множество рекурсивно перечислимых множеств снабженное вычислимой нумерацией, обладает свойством C_1.

Пусть $R_0, R_1, \ldots, R_n$ - некоторое семейство рекурсивно перечислимых множеств, выбираем семейство конечных множеств $F_0, F_1, \ldots, F_n$ таким образом, чтобы

$$F_i \subseteq R_i \; ; \; F_i \subseteq R_j \Leftrightarrow R_i \subseteq R_j \; ; \; F_i \subseteq F_j \Leftrightarrow R_i \subseteq R_j \; .$$

Тогда семейство $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$, снабженное разрешимой нумерацией, вместе с отображением μ $\mu(F_i) = R_i$, $i \leq n$, будет аппроксимацией $(\{R_0, R_1, \ldots, R_n\}, \nu)$ для всякой вычислимой нумерации ν.

5. $B_0 \Longrightarrow \mathcal{D}_1$, $B_1 \Longrightarrow \mathcal{D}_2$.

6. Всякое семейство S рекурсивно перечислимых множеств, обладающее достаточным запасом конечных множеств (то есть для любого $R \in S$ и любого конечного подмножества $R' \subseteq R$ существует конечное множество R'' из S такое, что $R' \subseteq R'' \subseteq R$), снабженное вычислимой нумерацией, к которой сводится некоторая ϑ-вычислимая нумерация конечных множеств из S, обладает свойством C_0.

Нижеследующее предложение показывает, как ведут себя свойства $C_i, \mathcal{D}_i$ относительно операций $\oplus$, $\times$ и функтора пополнения F_π.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть γ и γ' - нумерованные множества; если γ обладает свойством C_i ($i = 0, 1$ или 2), γ' обладает свойством C_j ($j = 0, 1$ или 2), тогда для $k = \min\{i, j\}$

1) $\gamma \oplus \gamma'$ обладает свойством C_k;

2) $\gamma \times \gamma'$ обладает свойством C_k;

3) $F_\pi(\gamma)$ обладает свойством C_i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (γ_0, μ) и (γ_0', μ') - подходящие аппроксимации γ и γ' соответственно. Тогда $(\gamma_0 \oplus \gamma_0', \mu \oplus \mu')$ является, очевидно, аппроксимацией $\gamma \oplus \gamma'$, а $(\gamma_0 \times \gamma_0', \mu \times \mu')$ - аппроксимацией

$\gamma \times \gamma'$. Причем если для $(S_0, \preccurlyeq)$ и $(S_0', \preccurlyeq')$ общий предикат совместности рекурсивен, то и для $(S_0 \cup S_0', \preccurlyeq)$ и $(S_0 \times S_0', \preccurlyeq)$ этот предикат так же рекурсивен. Аналогично, если $(\gamma_0, \preccurlyeq)$ и $(\gamma_0', \preccurlyeq')$ являются конструктивными парусами, то и $(\gamma_0 \oplus \gamma_0', \preccurlyeq)$ и $(\gamma_0 \times \gamma_0', \preccurlyeq)$ являются таковыми. Рассмотрим теперь случай $F_\pi(\gamma)$. Пусть $\bar{\mu} : \mathbb{1} \to F_\pi(\gamma)$ - морфизм такой, что $\bar{\mu}(0) = \emptyset$, а $\tilde{\mu} \leftrightharpoons \eta\mu : \gamma_0 \to F_\pi(\gamma)$ - морфизм из γ_0 в $F_\pi(\gamma)$ (напомним, что $\eta : \gamma \to F_\pi(\gamma)$ таково, что (γ, η) - e-подобъект $F_\pi(\gamma)$ и основное множество $F_\pi(\gamma)$ состоит из элементов множества $\eta(S)$ и пустого множества $\emptyset$). Тогда

$$\bar{\mu} \overset{\times}{\oplus} \tilde{\mu} : \mathbb{1} \oplus \gamma_0 \to F_\pi(\gamma).$$

Легко проверить, что $(\mathbb{1} \oplus \gamma_0, \bar{\mu} \overset{\times}{\oplus} \tilde{\mu})$ есть аппроксимация $F_\pi(\gamma)$, и из рекурсивности предиката совместности для $(S_0, \preccurlyeq)$ следует рекурсивность его и для $(\{0\} \cup S_0, \preccurlyeq)$. Если $(\gamma_0, \preccurlyeq)$ - конструктивный парус, то и $(\mathbb{1} \oplus \gamma_0, \preccurlyeq)$ - тоже. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть γ и γ' - нумерованные множества; если γ обладает свойством $\mathcal{D}_i$ ($i = 0, 1$ или 2), γ' обладает свойством $\mathcal{D}_j$ ($j = 0, 1$ или 2), тогда для $k = \min\{i, j\}$

1) $\gamma \oplus \gamma'$ обладает свойством $\mathcal{D}_k$;

2) $\gamma \times \gamma'$ обладает свойством $\mathcal{D}_k$;

3) $F_\pi(\gamma)$ обладает свойством $\mathcal{D}_i$.

Это следствие легко вытекает из определений, предложения и "хорошего" поведения ретрактов относительно операций $\oplus$, $\times$ и функтора F_π (для последнего: если γ_0 ретракт γ_1 , то $F_\pi(\gamma_0)$ ретракт $F_\pi(\gamma_1)$).

Покажем теперь, что ряд полезных свойств sn -подобъектов Π сохраняется и для нумерованных множеств, обладающих аппроксимацией (то есть свойством $\mathcal{C}_0$). Так, аналогом предложения 7 из предыдущего параграфа будет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть (γ_0, μ) - аппроксимация нумерованного множества $\gamma = (S, \nu)$. Непустое подмножество $S' \subseteq S$ будет ν -вполне перечислимым тогда и только тогда, когда существует подобъект (γ_1, μ_1) нумерованного множе-

ства γ_0 такой, что

$$s \in S' \Longleftrightarrow \exists s_1 \in S_1 \ (\mu\mu_1(s_1) \leq_\nu s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S' - непустое ν -вполне перечислимое подмножество S, тогда $\mu^{-1}(S')$ - непустое (напомним, что (γ_0, μ) - аппроксимация γ) ν_0 - вполне перечислимое подмножество S_0. Покажем, что

$$s \in S' \Longleftrightarrow \exists s_0 \in \mu^{-1}(S')(\mu s_0 \leq_\nu s).$$

Положим $S'' \rightleftharpoons \{s \mid \exists s_0 \in \mu^{-1}(S')(\mu s_0 \leq_\nu s)\}$. Из условия 2) определения аппроксимации легко следует, что S'' - ν -вполне перечислимое подмножество S. Далее, очевидно, что $S'' \subseteq S'$, если $S'' \neq S'$, то $S' \nsubseteq S''$. По условию 4) определения аппроксимации существует $s_0 \in S_0$ такое, что $\mu(s_0) \in S' \setminus S''$, но тогда $s_0 \in \mu^{-1}(S')$ и $\mu(s_0) \in S''$. Итак, $S' = S''$, что и доказывает нужную эквивалентность.

ν_0 - вполне перечислимое подмножество $\mu^{-1}(S')$ однозначно определяет подобъект (даже e -подобъект) (γ_1, μ_1) нумерованного (разрешимого) множества γ_0 такой, что $\mu_1(S_1) = \mu^{-1}(S')$. Для этого подобъекта

$$s \in S' \Longleftrightarrow \exists s_1 \in S_1 \ (\mu\mu_1(s_1) \leq_\nu s).$$

Необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть (γ_1, μ_1) - подобъект γ_0, тогда $\mu_1(S_1) \subseteq S_0$ ν_0-вполне перечислимо (так как ν_0 - разрешимая нумерация), пусть $S' \subseteq S$ определено так

$$S' \rightleftharpoons \{s \mid \exists s_0 \in \mu_1(S_1)(\mu s_0 \leq_\nu s)\} (= \{s \mid \exists s_1 \in S_1 \ (\mu\mu_1(s_1) \leq_\nu s)\}).$$

Тогда

$$\nu(x) \in S' \Longleftrightarrow \exists y (\nu_0(y) \in \mu_1(S_1) \,\&\, (\mu\nu_0(y) \leq_\nu \nu(x)).$$

Из ν_0 - вполне перечислимости множества $\mu_1(S_1)$ и рекурсивной перечислимости предиката $\mu\nu_0(x) \leq_\nu \nu(y)$ и следует, что S' -вполне перечислимо. Предложение доказано.

Точно так же может быть доказан аналог предложения 8 (теоремы Майхилла-Шефердсона). Но наиболее важно для решения основной проблемы то, что имеется следующий аналог теоремы 6.

ТЕОРЕМА 8. Пусть (γ_0, μ) - аппроксимация

нумерованного множества $\gamma=(S,\nu)$, пусть (K,ν) – sn – подобъект Π, $\Phi\subseteq K$ – семейство всех конечных множеств из K, $\varphi: N\to\Phi$ – сильная нумерация Φ. Тогда проблема P разрешима для пары $(\gamma,(K,\bar{\nu}))$ тогда и только тогда, когда семейство всех рекурсивно перечислимых множеств пар натуральных чисел Δ, удовлетворяющих условиям

0) если $\varphi(y)=\phi$, то для любого x $\langle x,y\rangle\in\Delta$;

1) $\langle x,y\rangle\in\Delta\ \&\ \mu\nu_0(x)\leq_\nu\mu\nu_0(x')\ \&\ \varphi(y')\subseteq\varphi(y)\Longrightarrow\langle x',y'\rangle\in\Delta$;

2) $\langle x,y_0\rangle\in\Delta\ \&\ \langle x,y_1\rangle\in\Delta\Longrightarrow\exists z(\langle x,z\rangle\in\Delta\ \&\ [\varphi(y_0)\cup\varphi(y_1)]\subseteq\varphi(z))$;

имеет главную вычислимую нумерацию.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательтсву теоремы 6. Нужно только убедиться в том, что доказательства предложений 9, 10 и леммы 10 сохраняет свою справедливость и в ситуации теоремы 8.

Сформулируем теперь основную теорему об условиях разрешимости проблемы P и свойствах её решения.

ТЕОРЕМА 9. Пусть γ_0 – нумерованное множество, обладающее свойством $\mathcal{D}_0$, а γ_1 – ретракт sn – подобъекта Π тогда

1) если γ_0 обладает свойством $\mathcal{D}_1$, а γ_1 – свойством $\mathcal{B}_1$, то $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ обладает свойством $\mathcal{B}_1$;

2) если γ_0 обладает свойством $\mathcal{D}_2$, то $P(\gamma_0,\gamma_1)$;

3) если γ_0 обладает свойством $\mathcal{D}_2$, а γ_1 – свойством $\mathcal{B}_0$, то $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ обладает свойством $\mathcal{B}_0$;

4) если γ_1 обладает свойством $\mathcal{B}_2$, то $P(\gamma_0,\gamma_1)$ и $\mathfrak{Mor}(\gamma_0,\gamma_1)$ обладеет свойством $\mathcal{B}_2$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 7 и 7′ и поэтому опускается.

Большинство теорем о разрешимости проблемы P, доказанных в этой статье, являются следствиями теоремы 9.

В заключение укажем на существование следующих последовательностей нумерованных множеств. Определим понятие конечного типа:

1) 0 – конечный тип;

2) если σ и τ – конечные типы, то $(\sigma\to\tau)$ – конечный тип.

Определим две последовательности нумерованных множеств $\{F_\sigma\}$ и $\{P_\sigma\}$, заиндексованные всеми конечными типами:

$$F_0 \leftrightharpoons N \qquad\qquad P_0 \leftrightharpoons N$$

$$F_{(\sigma\to\tau)} \leftrightharpoons \begin{cases} \mathfrak{mor}(F_\sigma, F_\tau), & \text{если } \tau\neq 0; \\ \mathfrak{mor}(F_\sigma, F_\pi(N)) = \\ = \mathfrak{mor}_p(F_\sigma, N) & \text{если } \tau = 0; \end{cases} \qquad P_{(\sigma\to\tau)} \leftrightharpoons \mathfrak{mor}(P_\sigma, F_\pi(P_\tau)) = \mathfrak{mor}_p(P_\sigma, P_\tau)$$

Из условий теоремы 9 вытекает, что все множества F_σ и P_σ определены и, кроме того, F_0 и P_0 обладают свойством C_2, а для $\sigma\neq 0$ F_σ и P_σ обладают свойством B_1.

Заметим, что F_σ и P_σ можно рассматривать как вычислимые функционалы (F_σ – функционалы типа Клини, P_σ – частичные вычислимые функционалы). Дальнейшие свойства этих функционалов и сравнение их с известными составят последующую статью.

Литература

1. С.Д.ДЕНИСОВ, И.А.ЛАВРОВ, Полные нумерации с бесконечным числом особых элементов, Алгебра и логика, 9, № 5 (1970), 503-509.

2. Ю.Л.ЕРШОВ, Теория нумераций 1, Новосибирск, 1969.

3. А.И.МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, 1965.

4. В.А.УСПЕНСКИЙ, Системы перечислимых множеств и их нумерации, ДАН СССР 105, № 6 (1955), 1155-1158.

5. A.H.LACHLAN, Standard classes of recursively enumerable sets, Z. Math. Log. Gr. Math, 10(1964), 23-42.

6. A.H.LACHLAN, On the indexing of classes of recursively enumerable sets, Jour. Symb. Log. 31(1966), 10-22.

Поступило 16 апреля 1971 г.