В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия, *Труды МИАН*, 2004, том 247, 41–58

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 247, с. 41–58

УДК 515.16+514

Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия[1]

©2004 г. В. М. Бухштабер[2], Т. Е. Панов[3]

Поступило в апреле 2004 г.

Изучаются комбинаторные и топологические свойства специальных клеточных разбиений — симплициально клеточных комплексов. Эти разбиения также известны под названием виртуальных или идеальных триангуляций, а в комбинаторике им соответствуют симплициальные частично упорядоченные множества. Мы изучаем и описываем свойства f-векторов и колец граней симплициально клеточных комплексов, обобщая тем самым ряд известных результатов о комбинаторике симплициальных разбиений. В частности, описан явный вид оператора на f- и h-векторах, задаваемого барицентрическим подразбиением, выведены аналоги соотношений Дена–Соммервилля для симплициально клеточных разбиений сфер и многообразий и получено обобщение известного критерия Стенли существования регулярных последовательностей в кольцах граней симплициально клеточных комплексов. В качестве приложения построен класс многообразий с действием тора и получены обобщения некоторых наших предыдущих результатов о момент-угол-комплексах, соответствующих триангуляциям.

1. ВВЕДЕНИЕ

В центре внимания данной работы находятся пространства со специальным клеточным разбиением — симплициально клеточные комплексы. В комбинаторике таким комплексам соответствуют так называемые симплициальные частично упорядоченные множества.

В топологии симплициально клеточные комплексы изучались практически с момента появления триангуляций и комбинаторных методов. Однако в комбинаторике систематическое изучение симплициальных частично упорядоченных множеств началось только примерно с середины 1980-х годов (см. [13]). Многие фундаментальные конструкции коммутативной и гомологической алгебры, развитые для изучения триангуляций, естественно переносятся на симплициально клеточные комплексы. Так, в [14] введено важное понятие *кольца граней* (или *кольца Стенли–Райснера*) симплициального частично упорядоченного множества и описаны основные алгебраические свойства этих колец.

В работе [9] введена *группа проективностей* триангуляции. Изучение этой группы привело к конструкции интересного класса симплициально клеточных комплексов, названных *развертками* (unfoldings) триангуляций. На основе этой конструкции там было получено явное комбинаторное описание разветвленного накрытия Хилдена–Монтезиноса произвольного замкнутого ориентированного многообразия над 3-мерной сферой.

В комбинаторике симплициальных комплексов используются так называемые *бизвездные преобразования*, которые играют важную роль в приложениях к торическим действиям (см. [2, гл. 7]). На этом пути естественно появляются симплициально клеточные разбиения, так как

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2185.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00659, 04-01-00702).

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: buchstab@mendeleevo.ru

[3]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

применение бизвездного преобразования к триангуляции дает, вообще говоря, только симплициально клеточное разбиение.

Симплициально клеточные комплексы нашли также важные приложения при изучении *тор-многообразий* (см. [11]). Тор-многообразием называется $2n$-мерное гладкое компактное замкнутое многообразие M с действием n-мерного компактного тора T, которое эффективно и имеет хотя бы одну неподвижную точку. Тор-многообразия введены в [8] как далеко идущее обобщение алгебраических неособых компактных *торических многообразий.* Неподвижные точки эффективного действия тора половинной размерности приводят к богатой комбинаторной структуре пространства орбит $Q = M/T$, позволяющей во многих случаях описывать само тор-многообразие M. При дополнительном условии, что действие является *локально стандартным*, пространство орбит Q представляет собой *многообразие с углами* (частным случаем многообразий с углами являются простые многогранники). Множество граней многообразия с углами образует симплициальное частично упорядоченное множество с отношением порядка, противоположным включению. Изучение многообразий с углами (или, эквивалентно, симплициальных частично упорядоченных множеств) как пространств орбит тор-многообразий позволяет интерпретировать многие их важные топологические инварианты в комбинаторных терминах. Например, как показано в [11], эквивариантные когомологии тор-многообразия M изоморфны кольцу граней $\mathbb{Z}[Q]$ пространства орбит Q в ряде естественных случаев (например, если все грани в Q ацикличны). Согласно другому результату [11] когомологии тор-многообразия равны нулю в нечетных размерностях тогда и только тогда, когда все грани пространства орбит Q ацикличны.

Опишем кратко содержание работы. В разд. 2 вводятся основные понятия — симплициально и псевдосимплициально клеточные комплексы, описываются их взаимосвязи и свойства. Эти клеточные комплексы дают полезные приближения к классическим триангуляциям (симплициальным комплексам), и, в частности, для них определено понятие барицентрического подразбиения. При этом барицентрическое подразбиение псевдосимплициально клеточного комплекса является симплициально клеточным комплексом, а барицентрическое подразбиение симплициально клеточного комплекса — симплициальным комплексом (предложение 2.4).

В разд. 3 рассматриваются f- и h-векторы клеточных комплексов. В случае симплициальных комплексов переход к барицентрическому подразбиению задает линейный оператор на пространствах f-векторов и h-векторов. Мы приводим явный вид матрицы этого оператора (леммы 3.1 и 3.2). Построенный оператор формально можно применить к f-вектору любого клеточного комплекса. Применение его к f-вектору псевдосимплициально клеточного комплекса дает f-вектор симплициально клеточного комплекса, а применение к f-вектору симплициально клеточного комплекса дает f-вектор симплициального комплекса. Основным результатом этого раздела является вывод аналогов соотношений Дена–Соммервилля для псевдосимплициально и симплициально клеточных разбиений многообразий (теоремы 3.4, 3.5 и следствие 3.6).

В разд. 4 вводится понятие разветвленного комбинаторного накрытия и доказывается, что пространство X является симплициально клеточным комплексом тогда и только тогда, когда существует разветвленное комбинаторное накрытие $X \to K$ для некоторого симплициального комплекса K (теорема 4.1).

В разд. 5 изучаются свойства колец граней симплициально клеточных комплексов, введенных Стенли [14]. Важными для приложений к торическим действиям являются полученные здесь результаты о функториальности таких колец относительно симплициальных отображений (предложения 5.3, 5.9, 5.10) и условия наличия в них линейных систем параметров (теорема 5.4 и лемма 5.5).

В разд. 6 вводится и изучается функтор, сопоставляющий симплициально клеточному комплексу $\mathcal{S}$ размерности $n-1$ с m вершинами пространство $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ с действием тора T^m, обобщающее понятие момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_K$ (см. [6] и [2, гл. 7]). Как и для симплициальных разбиений, $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ является многообразием для кусочно линейных симплициально клеточных разбиений сфер (теорема 6.3). *Торическим рангом* пространства X называется наибольшее число k, для которого существует почти свободное действие тора T^k на X. Доказано, что для любого симплициально клеточного комплекса $\mathcal{S}$ размерности $n-1$ с m вершинами торический ранг пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ не меньше $m-n$ (теорема 6.4). Этот результат приводит к интересной связи между известной гипотезой Гальперина о торическом ранге [7] и комбинаторикой триангуляций (следствие 6.5).

Авторы выражают благодарность Г. Лаптону (G. Lupton), который привлек наше внимание к гипотезе о торическом ранге, и Е.В. Щепину за полезный совет, использованный в доказательстве теоремы 4.1.

2. СИМПЛИЦИАЛЬНО И ПСЕВДОСИМПЛИЦИАЛЬНО КЛЕТОЧНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Абстрактным *симплициальным комплексом* на множестве $\mathcal{M}$ называется такой набор $K=\{\sigma\}$ подмножеств в $\mathcal{M}$, что для каждого $\sigma\in K$ все подмножества в σ (включая $\varnothing$) также принадлежат K. Подмножество $\sigma\in K$ называется (абстрактным) *симплексом* комплекса K. Одноэлементные подмножества называются *вершинами*. *Размерность* симплекса $\sigma\in K$ есть число его элементов минус один: $\dim\sigma=|\sigma|-1$. Размерностью абстрактного симплициального комплекса называется максимальная размерность его симплексов.

Наряду с абстрактными симплексами рассматриваются *геометрические симплексы*, представляющие собой выпуклые оболочки наборов аффинно независимых точек в $\mathbb{R}^n$. *Геометрическим симплициальным комплексом* (или *полиэдром*) называется набор $\mathcal{P}$ геометрических симплексов произвольных размерностей, лежащих в некотором $\mathbb{R}^n$, такой, что каждая грань симплекса из $\mathcal{P}$ лежит в $\mathcal{P}$ и пересечение любых двух симплексов из $\mathcal{P}$ является гранью каждого из них.

Полиэдр $\mathcal{P}$ называется *геометрической реализацией* абстрактного симплициального комплекса K, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин комплекса K и полиэдра $\mathcal{P}$, при котором симплексы комплекса K переходят в наборы вершин симплексов полиэдра $\mathcal{P}$. Для каждого симплициального комплекса K существует единственная с точностью до симплициального изоморфизма геометрическая реализация, обозначаемая $|K|$. В дальнейшем мы не будем различать абстрактные симплициальные комплексы и их геометрические реализации.

Пусть $\mathcal{S}$ — произвольное частично упорядоченное множество. Его *порядковым комплексом* $\operatorname{ord}(\mathcal{S})$ называется набор всех цепей $x_1<x_2<\ldots<x_k$, $x_i\in\mathcal{S}$. Очевидно, что $\operatorname{ord}(\mathcal{S})$ является симплициальным комплексом.

Барицентрическое подразбиение K' симплициального комплекса K определяется как порядковый комплекс $\operatorname{ord}(K\setminus\varnothing)$ частично упорядоченного (относительно вложения) множества непустых симплексов комплекса K.

Частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$ называется *симплициальным*, если оно содержит наименьший элемент $\widehat{0}$ и для любого $\sigma\in\mathcal{S}$ нижний отрезок

$$[\widehat{0},\sigma]=\{\tau\in\mathcal{S}\colon\widehat{0}\le\tau\le\sigma\}$$

является частично упорядоченным (по вложению) множеством граней некоторого симплекса. Введем ранг элементов множества $\mathcal{S}$, полагая $\operatorname{rk}\widehat{0}=0$ и $\operatorname{rk}\sigma=k$, если $[\widehat{0},\sigma]$ отождествляется с множеством граней $(k-1)$-симплекса. Положим также $\dim\mathcal{S}=\max_{\sigma\in\mathcal{S}}\operatorname{rk}\sigma-1$. Назовем *вершинами* множества $\mathcal{S}$ элементы ранга 1. Тогда любой элемент ранга k содержит в точности k вершин.

Очевидно, что множество всех симплексов некоторого симплициального комплекса относительно вложения является симплициальным частично упорядоченным множеством. Однако далеко не все симплициальные частично упорядоченные множества получаются таким образом.

Напомним, что *клеточным комплексом* называется хаусдорфово топологическое пространство X, представленное в виде объединения $\bigcup e_i^q$ попарно не пересекающихся множеств e_i^q (называемых *клетками*), такое, что для каждой клетки e_i^q зафиксировано единственное отображение q-мерного замкнутого шара D^q в X (*характеристическое отображение*), ограничение которого на внутренность шара D^q есть гомеоморфизм на e_i^q. (Здесь, как обычно, считается, что внутренность точки есть сама эта точка.) При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы.

(C) Граница клетки e_i^q содержится в объединении конечного числа клеток e_j^r размерности $r < q$.

(W) Подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто пересечение $Y \cap \overline{e}_i^q$.

В дальнейшем частично упорядоченные множества, симплициальные и клеточные комплексы всегда будут предполагаться конечными.

Пусть $\mathcal{S}$ — симплициальное частично упорядоченное множество. Каждому элементу $\sigma \in \mathcal{S} \setminus \widehat{0}$ сопоставим симплекс, множеством граней которого является $\bigl[\widehat{0}, \sigma\bigr]$, и склеим все эти геометрические симплексы в соответствии с отношением порядка в $\mathcal{S}$. Тогда мы получим клеточный комплекс, замыкание каждой клетки которого отождествляется с симплексом с сохранением структуры граней, причем все характеристические отображения являются вложениями. Мы будем называть этот комплекс *симплициально клеточным комплексом* и обозначать его $|\mathcal{S}|$. В случае, когда $\mathcal{S}$ является множеством симплексов некоторого симплициального комплекса K, пространство $|\mathcal{S}|$ совпадает с геометрической реализацией $|K|$. В дальнейшем мы не будем различать симплициальные частично упорядоченные множества и симплициально клеточные комплексы.

Пример 2.1. Клеточный комплекс, получаемый отождествлением двух $(n-1)$-мерных симплексов по их границам (с сохранением структуры граней), является симплициально клеточным. Соответствующее симплициальное частично упорядоченное множество не является множеством граней никакого симплициального комплекса при $n > 1$.

Приведенный пример является частным случаем общей конструкции объединения симплициально клеточных комплексов по общему подкомплексу. Обратим внимание, что симплициально клеточные комплексы являются минимальным расширением класса симплициальных комплексов, замкнутым относительно операции объединения вдоль общего подкомплекса.

Напомним, что непрерывное отображение клеточных комплексов называется *клеточным*, если образ любой клетки лежит в объединении клеток не большей размерности. Клеточное отображение $\phi\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ симплициально клеточных комплексов называется *симплициальным*, если образ каждого симплекса из $\mathcal{S}_1$ есть симплекс в $\mathcal{S}_2$. Ясно, что симплициальное отображение является отображением соответствующих частично упорядоченных множеств (т.е. сохраняет порядок). Симплициальное отображение называется *симплициальным изоморфизмом*, если для него существует симплициальное обратное. На геометрическом уровне симплициальное отображение симплициальных комплексов (полиэдров) можно считать линейным на симплексах.

По аналогии с симплициальными комплексами определим *барицентрическое подразбиение* $\mathcal{S}'$ симплициально клеточного комплекса $\mathcal{S}$ как порядковый комплекс $\operatorname{ord}\bigl(\mathcal{S} \setminus \widehat{0}\bigr)$. Непо-

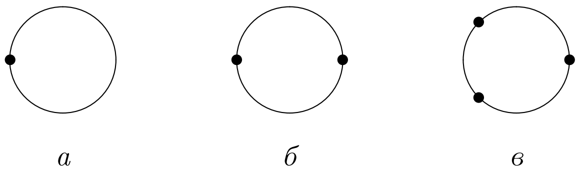

Рис. 1. Псевдосимплициально клеточные разбиения окружности

средственно из определения следует, что барицентрическое подразбиение $\mathcal{S}'$ является симплициальным комплексом. Таким образом, симплициальное отображение между произвольными симплициально клеточными комплексами можно считать линейным на симплексах барицентрического подразбиения.

Замечание. Тождественное отображение симплициально клеточного комплекса задает клеточное, но не симплициальное отображение $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, обратное к которому не является клеточным.

Клеточный комплекс X называется *псевдосимплициальным*, если характеристическое отображение любой клетки представляет собой отображение симплекса Δ^q в X, ограничение которого на каждую грань является характеристическим отображением для некоторой другой клетки.

Пример 2.2. На рис. 1 изображены три псевдосимплициально клеточных разбиения окружности. Первое из них (*а*) не является симплициально клеточным. Второе (*б*) является симплициально клеточным, но не является симплициальным комплексом. Третье (*в*) является симплициальным комплексом.

Лемма 2.3. *Псевдосимплициально клеточный комплекс X является симплициально клеточным тогда и только тогда, когда характеристическое отображение любой его клетки является вложением.*

Доказательство. Для данного псевдосимплициально клеточного комплекса X введем частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$, элементами которого являются замыкания клеток, а отношением порядка — вложение. Пусть все характеристические отображения являются вложениями. Тогда легко видеть, что для каждой клетки e_i^q соответствующее характеристическое отображение является гомеоморфизмом Δ^q на $\overline{e}_i^q$ и характеристическое отображение любой клетки $e_j^p \subset \overline{e}_i^q$ является ограничением этого гомеоморфизма на некоторую p-грань симплекса Δ^q. Поэтому $\mathcal{S}$ является симплициальным частично упорядоченным множеством, а X есть симплициально клеточный комплекс $|\mathcal{S}|$. В другую сторону утверждение очевидно. $\square$

Псевдосимплициально клеточные разбиения многообразий встречаются и играют важную роль в различных конструкциях маломерной топологии, где они носят название *идеальных* или *сингулярных триангуляций* (см., например, [12]).

Пусть X — псевдосимплициально клеточный комплекс. Его *барицентрическим подразбиением* называется клеточный комплекс X', клетками которого являются образы открытых симплексов стандартного барицентрического подразбиения симплексов Δ^q при всевозможных характеристических отображениях $\Delta^q \to X$ клеток комплекса X. Корректность этого определения непосредственно вытекает из определения псевдосимплициально клеточного комплекса.

Замечание. Предыдущее “геометрическое” определение барицентрического подразбиения согласовано с введенными выше “комбинаторными” определениями барицентрического подразбиения симплициального комплекса и симплициального частично упорядоченного множества. Однако, как показывают простые примеры, в случае произвольного псевдосимплициально клеточного комплекса X комплекс X' отличается от порядкового комплекса частично упорядоченного множества замыканий клеток комплекса X.

Непосредственно из определения вытекает, что X' является псевдосимплициально клеточным комплексом. На самом деле имеется следующее более общее утверждение (которое является частью математического фольклора, см., например, [12]).

Предложение 2.4. *Барицентрическое подразбиение X' псевдосимплициально клеточного комплекса X является симплициально клеточным комплексом, а второе барицентрическое подразбиение X'' — симплициальным комплексом.*

Доказательство. В силу леммы 2.3 для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что все характеристические отображения клеток комплекса X' являются вложениями. Предположим противное, т.е. пусть какие-то две точки x, y переходят в одну при характеристическом отображении некоторой q-мерной клетки e^q комплекса X'. Можно считать, что q — минимальная размерность таких клеток. По определению X' характеристическое отображение его клетки e^q является ограничением характеристического отображения $\Delta^q \to X$ некоторой клетки комплекса X на некоторый q-мерный симплекс барицентрического подразбиения стандартного симплекса Δ^q. Так как q минимально, хотя бы одна из точек x, y содержится во внутренности симплекса Δ^q. Используя теперь то, что ограничение характеристического отображения на внутренность клетки является взаимно однозначным, приходим к противоречию. Это доказывает первое утверждение, из которого вытекает второе. $\square$

3. f-ВЕКТОРЫ И СООТНОШЕНИЯ ДЕНА–СОММЕРВИЛЛЯ

Пусть X — клеточный комплекс размерности $n-1$. Обозначим через f_i число его i-мерных клеток. Целочисленный вектор $\boldsymbol{f}(X) = (f_0, \dots, f_{n-1})$ называется *f-вектором* комплекса X. Удобно считать, что $f_{-1} = 1$. Введем *h-вектор* комплекса X как целочисленный вектор $(h_0, h_1, \dots, h_n)$, определяемый из уравнения

$$h_0 t^n + \ldots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \ldots + f_{n-1}. \qquad (3.1)$$

Заметим, что f-вектор и h-вектор несут одну и ту же информацию о клеточном комплексе и выражаются друг через друга при помощи линейных соотношений, а именно

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{n-k} f_{i-1}, \qquad f_{n-1-k} = \sum_{q=k}^{n} \binom{q}{k} h_{n-q}, \qquad k = 0, \dots, n. \qquad (3.2)$$

В частности, $h_0 = 1$ и $h_n = (-1)^n (1 - f_0 + f_1 + \ldots + (-1)^n f_{n-1}) = (-1)^n (1 - \chi(X))$, где $\chi(X)$ — эйлерова характеристика комплекса X.

Опишем сначала некоторые свойства f-векторов в случае, когда $X = \mathcal{S}$ — симплициально клеточный комплекс (т.е. замыкания клеток образуют симплициальное частично упорядоченное множество).

Соединением симплициальных частично упорядоченных множеств $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ называется множество $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$, состоящее из элементов $\sigma_1 * \sigma_2$, $\sigma_1 \in \mathcal{S}_1$, $\sigma_2 \in \mathcal{S}_2$. Отношение частичного порядка вводится следующим образом: $\sigma_1 * \sigma_2 \le \tau_1 * \tau_2$, если $\sigma_1 \le \tau_1$ и $\sigma_2 \le \tau_2$. Легко видеть, что $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$ — симплициальное частично упорядоченное множество. Пространство (клеточный комплекс) $|\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2|$ известно в топологии как *соединение* (или *джойн*) пространств $|\mathcal{S}_1|$ и $|\mathcal{S}_2|$.

Симплициально клеточный комплекс $\mathcal{S}$ называется *чистым*, если все его максимальные симплексы имеют одну размерность. Рассмотрим два чистых комплекса $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ одной размерности, выделим максимальные симплексы $\sigma_1 \in \mathcal{S}_1$ и $\sigma_2 \in \mathcal{S}_2$ и зафиксируем некоторое их отождествление (это достигается, например, выбором порядка вершин в σ_1 и σ_2). Симплициально клеточный комплекс $\mathcal{S}_1 \#_{\sigma_1,\sigma_2} \mathcal{S}_2$, получаемый склеиванием $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ вдоль σ_1 и σ_2 и последующим удалением симплекса $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, называется *связной суммой* комплексов

$\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. В случае, когда результат не зависит от выбора симплексов σ_1 и σ_2 и способа их отождествления, мы будем использовать сокращенное обозначение $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$.

Выразим f-вектор и h-вектор связной суммы $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$ в терминах f-векторов и h-векторов комплексов $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. Пусть $\dim \mathcal{S}_1 = \dim \mathcal{S}_2 = n-1$, тогда мы имеем

$$\begin{aligned} f_i(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) &= f_i(\mathcal{S}_1) + f_i(\mathcal{S}_2) - \binom{n}{i+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-2, \\ f_{n-1}(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) &= f_{n-1}(\mathcal{S}_1) + f_{n-1}(\mathcal{S}_2) - 2. \end{aligned}$$

Тогда из (3.2) вытекает, что

$$\begin{aligned} &h_0(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) = 1, \\ &h_i(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) = h_i(\mathcal{S}_1) + h_i(\mathcal{S}_2), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ &h_n(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) = h_n(\mathcal{S}_1) + h_n(\mathcal{S}_2) - 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть теперь $\dim \mathcal{S}_1 = n_1 - 1$ и $\dim \mathcal{S}_2 = n_2 - 1$, тогда для соединения $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$ мы имеем

$$f_k(\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2) = \sum_{i=-1}^{n_1-1} f_i(\mathcal{S}_1) f_{k-i-1}(\mathcal{S}_2), \qquad k = -1, 0, \ldots, n_1 + n_2 - 1.$$

Положим

$$h(\mathcal{S}; t) = h_0 + h_1 t + \ldots + h_n t^n,$$

тогда из предыдущей формулы и (3.1) вытекает соотношение

$$h(\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2; t) = h(\mathcal{S}_1; t) h(\mathcal{S}_2; t). \tag{3.4}$$

Далее нам потребуются формулы преобразования f- и h-векторов симплициально клеточных комплексов при барицентрических подразбиениях. Введем матрицу

$$B = (b_{ij}), \quad 0 \le i, j \le n-1, \qquad b_{ij} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i+1}{k} (i-k+1)^{j+1}.$$

Можно проверить, что $b_{ij} = 0$ при $i > j$ (т.е. B — верхнетреугольная матрица) и $b_{ii} = (i+1)!$. Таким образом, матрица B обратима.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{S}'$ — барицентрическое подразбиение $(n-1)$-мерного симплициально клеточного комплекса $\mathcal{S}$. Тогда f-векторы комплексов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ связаны соотношением*

$$f_i(\mathcal{S}') = \sum_{j=i}^{n-1} b_{ij} f_j(\mathcal{S}), \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

т.е.

$$\boldsymbol{f}(\mathcal{S}') = B \boldsymbol{f}(\mathcal{S}).$$

Доказательство. Рассмотрим барицентрическое подразбиение j-мерного симплекса Δ^j, и пусть b'_{ij} есть число i-симплексов в $(\Delta^j)'$, не лежащих в $\partial \Delta^j$. Тогда мы имеем $f_i(K') = \sum_{j=i}^{n-1} b'_{ij} f_j(K)$. Докажем, что $b_{ij} = b'_{ij}$. Действительно, легко видеть, что число b'_{ij} удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$b'_{ij} = (j+1) b'_{i-1,j-1} + \binom{j+1}{2} b'_{i-1,j-2} + \ldots + \binom{j+1}{j-i+1} b'_{i-1,i-1}.$$

Отсюда по индукции легко выводится, что b'_{ij} задается той же формулой, что и b_{ij}. $\square$

Теперь введем матрицу

$$D = (d_{pq}), \quad 0 \le p, q \le n, \qquad d_{pq} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+1}{k} (p-k)^q (p-k+1)^{n-q}$$

(здесь мы полагаем $0^0 = 1$).

Лемма 3.2. *h-Векторы комплексов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ связаны соотношением*

$$h_p(\mathcal{S}') = \sum_{q=0}^{n} d_{pq} h_q(\mathcal{S}), \qquad p = 0, \ldots, n,$$

т.е.

$$\boldsymbol{h}(\mathcal{S}') = D\boldsymbol{h}(\mathcal{S}).$$

Кроме того, матрица D обратима.

Доказательство. Это устанавливается рутинной проверкой с использованием леммы 3.1, соотношений (3.1) и ряда тождеств для биномиальных коэффициентов, которые можно найти, например, в [3]. Если к f-вектору добавить компоненту $f_{-1} = 1$ и соответствующим образом изменить матрицу B, то мы будем иметь соотношение $D = C^{-1}BC$, где C — матрица перехода от h-вектора к f-вектору (ее явный вид легко устанавливается из соотношений (3.1)). Отсюда вытекает обратимость матрицы D. $\square$

Таким образом, переход к барицентрическому подразбиению индуцирует линейные обратимые операторы B и D на f- и h-векторах симплициально клеточных комплексов.

Классическим результатом комбинаторной геометрии является тот факт, что если симплициальный комплекс K является триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы, т.е. $|K| \cong S^{n-1}$, то его h-вектор симметричен:

$$h_i = h_{n-i}, \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Эти уравнения (а также различные их выражения в терминах f-вектора) известны как *соотношения Дена–Соммервилля.* Заметим, что $h_0 = 1$ для любого симплициального комплекса и первое соотношение $h_0 = h_n$ эквивалентно формуле для эйлеровой характеристики (см. (3.1)). Различные доказательства соотношений Дена–Соммервилля, а также изложение истории вопроса можно найти в [2].

Нам понадобится следующий результат, принадлежащий Кли [10].

Предложение 3.3. *Соотношения Дена–Соммервилля являются наиболее общими линейными уравнениями, которым удовлетворяют f-векторы всех триангуляций сфер.*

Доказательство. В [10] это утверждение было доказано непосредственно в терминах f-векторов. Однако использование h-векторов существенно упрощает доказательство. Достаточно показать, что аффинная оболочка h-векторов $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ триангуляций сфер представляет собой $\left[\frac{n}{2}\right]$-мерную плоскость (напомним, что $h_0 = 1$ всегда). Это можно сделать, например, указав $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ триангуляций сфер с аффинно независимыми h-векторами. Положим $K_j := \partial\Delta^j * \partial\Delta^{n-j}$, $j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, где $\partial\Delta^j$ обозначает границу j-мерного симплекса. Так как $\boldsymbol{h}(\partial\Delta^j) = 1 + t + \ldots + t^j$, то из (3.4) вытекает, что

$$\boldsymbol{h}(K_j) = \frac{1 - t^{j+1}}{1 - t} \, \frac{1 - t^{n-j+1}}{1 - t}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{h}(K_{j+1}) - \boldsymbol{h}(K_j) = t^{j+1} +$ Члены более высокого порядка, $j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{h}(K_j)$, $j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, аффинно независимы. $\square$

Теорема 3.4. *Если $\mathcal{S}$ — симплициально клеточное разбиение $(n-1)$-мерной сферы, то h-вектор $\boldsymbol{h}(\mathcal{S})$ удовлетворяет соотношениям Дена–Соммервилля* (3.5).

Доказательство. Рассмотрим барицентрическое подразбиение $\mathcal{S}'$. В силу леммы 3.2 $\boldsymbol{h}(\mathcal{S}') = D\boldsymbol{h}(\mathcal{S})$, причем вектор $\boldsymbol{h}(\mathcal{S}')$ симметричен, так как $\mathcal{S}'$ — триангуляция сферы. Рутинная проверка с использованием известных биномиальных тождеств показывает, что матрица D (и ее обратная) переводит симметричные векторы в симметричные (это эквивалентно тому, что $d_{pq} = d_{n+1-p,n+1-q}$, т.е. матрица D центрально симметрична). Однако это можно доказать и не прибегая к вычислениям, и даже не используя явный вид матрицы D из леммы 3.2. Действительно, соотношения Дена–Соммервилля выделяют в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ (с координатами $h_0, \dots, h_n$) линейное подпространство W размерности $k = \left[\frac{n}{2}\right]+1$ (или аффинное пространство размерности $\left[\frac{n}{2}\right]$, если мы добавим соотношение $h_0 = 1$). Нам необходимо проверить инвариантность этого подпространства относительно обратимого линейного оператора D. Для этого достаточно выбрать в W любой базис $e_1, \dots, e_k$ и проверить, что $De_i \in W$ для всех i. Но подпространство W допускает базис из h-векторов симплициальных сфер (см. доказательство предложения 3.3). Так как барицентрическое подразбиение симплициальной сферы есть снова симплициальная сфера, образы De_i, $i = 1, \dots, k$, также удовлетворяют соотношениям Дена–Соммервилля. Следовательно, подпространство W является D-инвариантным. Отсюда вытекает, что вектор $\boldsymbol{h}(\mathcal{S}) = D^{-1}\boldsymbol{h}(\mathcal{S}')$ удовлетворяет соотношениям Дена–Соммервилля. □

Замечание. Доказательство соотношений Дена–Соммервилля для *эйлеровых частично упорядоченных множеств* (частным случаем которых являются симплициально клеточные разбиения сфер) было впервые получено Стенли [13, (3.40)].

В [2] было получено обобщение соотношений Дена–Соммервилля на триангуляции произвольных топологических многообразий. Именно, разности между симметричными компонентами h-вектора триангуляции $(n-1)$-мерного многообразия M выражаются через его эйлерову характеристику:

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i\bigl(\chi(M) - \chi(S^{n-1})\bigr)\binom{n}{i} = (-1)^i(h_n - 1)\binom{n}{i}, \qquad i = 0, 1, \dots, n. \tag{3.6}$$

В частности, если $M = S^{n-1}$ или n нечетно, мы получаем соотношения (3.5). Рассуждение, аналогичное использованному в доказательстве теоремы 3.4, позволяет обобщить этот результат на произвольные симплициально клеточные разбиения многообразий.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathcal{S}$ — симплициально клеточное разбиение $(n-1)$-мерного многообразия M. Тогда h-вектор $\boldsymbol{h}(\mathcal{S}) = (h_0, \dots, h_n)$ удовлетворяет соотношениям* (3.6).

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}'$ — барицентрическое подразбиение комплекса $\mathcal{S}$ и D — матрица (оператор) из леммы 3.2 такая, что $\boldsymbol{h}(\mathcal{S}') = D\boldsymbol{h}(\mathcal{S})$. Пусть далее A обозначает аффинное подпространство размерности $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ (с координатами $h_0, \dots, h_n$), задаваемое соотношениями из формулировки теоремы. Так как $\mathcal{S}'$ является симплициальным комплексом, нам, как и в доказательстве теоремы 3.4, остается лишь проверить инвариантность A относительно D. Для этого достаточно выбрать базис в A (т.е. набор из $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ аффинно независимых векторов), состоящий из h-векторов симплициальных разбиений многообразия M. Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим h-векторы $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ триангуляций $(n-1)$-сферы вида $\partial\Delta^j * \partial\Delta^{n-j}$, которые образуют базис в подпространстве W, выделяемом соотношениями $h_i = h_{n-i}$ (см. предложение 3.3). Затем рассмотрим связные суммы $K \# (\partial\Delta^j * \partial\Delta^{n-j})$, где K — некоторая фиксированная триангуляция многообразия M. Тогда соответствующие h-векторы образуют базис в A (это легко следует из соотношений (3.3)). □

Следствие 3.6. *Аналоги теорем* 3.4 *и* 3.5 *имеют место для псевдосимплициально клеточных разбиений сфер и многообразий соответственно.*

Доказательство. Это вытекает из предложения 2.4. □

а *б*

Рис. 2. Клеточные разбиения диска D^2

Пример 3.7. На рис. 2 изображены два клеточных разбиения диска D^2. Первое из них (a) имеет две 0-мерные, две 1-мерные и одну 2-мерную клетку и является псевдосимплициальным. Это можно увидеть следующим образом. Реализуем D^2 как единичный диск в $\mathbb{C}$, а симплекс Δ^2 как четверть единичного круга, выделяемую условиями $\operatorname{Re} z \geq 0$ и $\operatorname{Im} z \geq 0$. Тогда отображение $z \mapsto z^4$ задает характеристическое отображение для двумерной клетки.

Клеточное разбиение диска на рис. 2, *б* не является псевдосимплициальным. Действительно, в противном случае, склеив два таких диска по границе, мы получили бы псевдосимплициально клеточное разбиение 2-мерной сферы. Однако это клеточное разбиение имеет f-вектор $(1,1,2)$, и поэтому соответствующий h-вектор $(1,-2,2,1)$ не удовлетворяет второму соотношению $h_1 = h_2$ Дена–Соммервилля. Первое соотношение $h_0 = h_3$, эквивалентное формуле для эйлеровой характеристики, очевидно, выполняется.

Из определения псевдосимплициально клеточного разбиения вытекает, что оно должно содержать клетки всех размерностей. Разбиение на рис. 2, *б* дает пример того, что обратное утверждение неверно.

4. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ НАКРЫТИЯ

Здесь мы характеризуем симплициально клеточные комплексы как специальный класс разветвленных накрытий над симплициальными комплексами. В этом разделе мы имеем дело с геометрическими симплициальными комплексами (т.е. с полиэдрами) K. *Открытым симплексом* $\overset{\circ}{\tau} \in K$ мы будем называть относительную внутренность некоторого симплекса $\tau \in K$. В случае, если τ — вершина, мы положим $\overset{\circ}{\tau} = \tau$.

Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и K — симплициальный комплекс. Непрерывное отображение $p\colon X \to K$ назовем *разветвленным комбинаторным накрытием* над K, если выполнены следующие два условия:

1) для любого открытого симплекса $\overset{\circ}{\tau} \in K$ прообраз $p^{-1}\big(\overset{\circ}{\tau}\big)$ представляет собой непустое несвязное объединение конечного числа открытых множеств $U_i(\tau)$:

$$p^{-1}(\tau) = \bigsqcup_i U_i(\tau), \qquad i = 1, \dots, I(\tau);$$

2) отображение $p\colon U_i(\tau) \to \overset{\circ}{\tau}$ является гомеоморфизмом для всех i.

Непосредственно из определения вытекает, что открытые множества $U_i(\tau)$, соответствующие всем симплексам $\tau \in K$ и всем i, задают клеточное разбиение пространства X.

Теорема 4.1. *Пространство X является симплициально клеточным комплексом тогда и только тогда, когда существует разветвленное комбинаторное накрытие $X \to K$ для некоторого симплициального комплекса K.*

Доказательство. Пусть X — симплициально клеточный комплекс с множеством вершин $\mathcal{M}$. Введем симплициальный комплекс $K_{\mathcal{S}}$ на множестве вершин $\mathcal{M}$ следующим образом. Скажем, что подмножество $\tau \in \mathcal{M}$ является симплексом в $K_{\mathcal{S}}$, если найдется симплекс $\sigma \in X$ с множеством вершин τ. Тогда отображение $X \to K_{\mathcal{S}}$, тождественное на множестве вершин $\mathcal{M}$, переводит симплекс σ в соответствующий симплекс τ и является по построению разветвленным комбинаторным накрытием.

Пусть теперь K — симплициальный комплекс и $p\colon X \to K$ — некоторое разветвленное комбинаторное накрытие. Тогда X является клеточным комплексом с клетками вида $U_i(\tau)$, $\tau \in K$. Для того чтобы установить, что X — симплициально клеточный комплекс, необходимо проверить, что множество клеток в замыкании каждой клетки $U_i(\tau)$ образует относительно включения частично упорядоченное множество граней некоторого симплекса. Это эквивалентно тому, что ограничение проекции p на замыкание каждой клетки является гомеоморфизмом (так как соответствующее свойство имеет место для K). Положим $\sigma = \overline{U}_i(\tau)$. Требуется доказать, что $p\colon \sigma \to \tau$ — гомеоморфизм. Так как σ и τ компактны и хаусдорфовы, достаточно доказать, что $p\colon \sigma \to \tau$ взаимно однозначно. Очевидно, что это отображение эпиморфно; предположим, что $p(x_1) = p(x_2) = y$ для некоторых двух различных точек $x_1, x_2 \in \sigma$. Соединим точки x_1 и x_2 отрезком-путем $\gamma\colon [0,1] \to X$ таким, что $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$ и $\gamma(s) \in U_i(\tau)$ при $0 < s < 1$. Тогда $p \circ \gamma\colon [0,1] \to K$ есть петля с началом и концом в y, внутренность которой лежит в $\mathring{\tau}$. Так как τ — симплекс, существует стягивающая гомотопия $F\colon [0,1] \times [0,1] \to K$ такая, что $F(s,1) = p \circ \gamma(s)$, $F(s,0) = y$ и $F(s,t) \in \mathring{\tau}$ при $0 < s < 1$ и $0 < t < 1$. Положим

$$\gamma_i = p^{-1}\Big(F\Big([0,1], \frac{1}{i}\Big)\Big) \cap \sigma$$

(заметим, что $\gamma_1 = \gamma$). Каждое из подмножеств $\gamma_i \subset X$ является связным (как замыкание связного подмножества $p^{-1}(F((0,1), \frac{1}{i})))$ и компактным как прообраз компактного подмножества при собственном отображении. Рассмотрим верхний предел

$$\Gamma = \bigcap_N \overline{\bigcup_{i \geq N} \gamma_i}.$$

Так как каждое из подмножеств γ_i является связным и компактным, Γ также является связным и компактным. Но, с другой стороны, $p(\Gamma) = y$, так что Γ состоит из конечного числа точек по определению разветвленного комбинаторного накрытия. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

5. КОЛЬЦА ГРАНЕЙ

Кольцо граней симплициального комплекса является важнейшим понятием, позволяющим переводить комбинаторные свойства на язык коммутативной и гомологической алгебры. Это кольцо было введено Стенли и Райснером (см. [15]) и часто называется *кольцом Стенли–Райснера*. Обобщение колец граней на произвольные симплициальные частично упорядоченные множества было впервые введено в [14], где также были описаны важнейшие алгебраические свойства этих колец. Однако в нашем изложении, приспособленном для топологических приложений, мы следуем работе [11] (см. также [2, гл. 4]).

Предположим вначале, что K — симплициальный комплекс, и отождествим его множество вершин $\mathcal{M}$ с множеством индексов $[m] = \{1, \ldots, m\}$.

Пусть $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]$ — градуированное кольцо многочленов с целыми коэффициентами от m образующих степени 2. *Кольцом Стенли–Райснера* (или *кольцом граней*) симплициального комплекса K называется градуированное фактор-кольцо

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_K,$$

где $\mathcal{I}_K$ — однородный идеал, порожденный мономами $v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k}$, для которых $\{i_1, \ldots, i_k\}$ не является симплексом в K.

Далее мы несколько видоизменим предыдущее определение, расширив одновременно набор образующих кольца многочленов и набор соотношений. При этом фактор-кольцо $\mathbb{Z}[K]$ не изменится и полученное новое определение будет легко обобщаемо на произвольные симплициальные частично упорядоченные множества.

Для любых двух симплексов $\sigma, \tau \in K$ обозначим через $\sigma \wedge \tau$ их единственную точную нижнюю грань (т.е. максимальный симплекс, одновременно содержащийся в σ и τ). Точная нижняя грань всегда существует, но может быть пустым симплексом $\varnothing \in K$. С другой стороны, точная верхняя грань симплексов σ и τ (т.е. минимальный симплекс, одновременно содержащий σ и τ) может не существовать. Если же точная верхняя грань существует, то она единственна и мы обозначим ее через $\sigma \vee \tau$.

Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{Z}[v_\sigma\colon \sigma \in K \setminus \varnothing]$, имеющее по одной образующей на каждый непустой симплекс в K. Введем градуировку, положив $\deg v_\sigma = 2|\sigma|$. Кроме того, отождествим $v_\varnothing$ с 1. Следующее утверждение дает альтернативное “менее экономное” представление кольца граней $\mathbb{Z}[K]$.

Предложение 5.1. *Имеется канонический изоморфизм градуированных колец*

$$\mathbb{Z}[v_\sigma\colon \sigma \in K \setminus \varnothing]/\mathcal{I} \cong \mathbb{Z}[K],$$

где $\mathcal{I}$ — идеал, порожденный всеми элементами вида

$$v_\sigma v_\tau - v_{\sigma\wedge\tau} v_{\sigma\vee\tau}.$$

Здесь мы полагаем $v_{\sigma\vee\tau} = 0$, если точная верхняя грань $\sigma \vee \tau$ не существует.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается при помощи отображения, переводящего v_σ в $\prod_{i\in\sigma} v_i$. $\square$

Пусть теперь $\mathcal{S}$ — произвольный симплициально клеточный комплекс. В этом случае для любых двух элементов $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$ множество $\sigma \vee \tau$ их точных верхних граней может состоять из более чем одного элемента (но может быть и пустым). Множество $\sigma \wedge \tau$ точных нижних граней всегда непусто; кроме того, оно состоит из единственного элемента при условии, что $\sigma \vee \tau \neq \varnothing$. Введем градуированное кольцо многочленов $\mathbb{Z}\big[v_\sigma\colon \sigma \in \mathcal{S} \setminus \widehat{0}\big]$, где $\deg v_\sigma = 2\operatorname{rk}\sigma$. Мы также формально положим $v_{\widehat{0}} = 1$.

Кольцом граней симплициально клеточного комплекса $\mathcal{S}$ называется фактор-кольцо

$$\mathbb{Z}[\mathcal{S}] := \mathbb{Z}\big[v_\sigma\colon \sigma \in \mathcal{S} \setminus \widehat{0}\big]/\mathcal{I}_\mathcal{S},$$

где $\mathcal{I}_\mathcal{S}$ — идеал, порожденный всеми элементами вида

$$v_\sigma v_\tau - v_{\sigma\wedge\tau} \sum_{\rho\in\sigma\vee\tau} v_\rho. \tag{5.1}$$

В частности, если $\sigma \vee \tau = \varnothing$, то $v_\sigma v_\tau = 0$ в $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$.

Соотношения, порождающие идеал $\mathcal{I}_\mathcal{S}$, позволяют выразить произведение образующих v_σ и v_τ, соответствующих несравнимым элементам $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$, в виде суммы мономов, представляющих собой произведение упорядоченных образующих. В алгебраической литературе такие соотношения называются *выпрямляющими*.

Пример 5.2. Рассмотрим комплекс $\mathcal{S}$, описанный в примере 2.1, при $n = 2$. Таким образом, $\mathcal{S}$ получается склеиванием двух отрезков по их границам. Мы имеем два элемента ранга 1 (две вершины), скажем σ_1 и σ_2, и два элемента ранга 2 (два максимальных симплекса), скажем τ_1 и τ_2. Тогда кольцо граней имеет вид

$$\mathbb{Z}[\mathcal{S}] = \mathbb{Z}[v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\tau_1}, v_{\tau_2}]/(v_{\tau_1} + v_{\tau_2} = v_{\sigma_1} v_{\sigma_2},\ v_{\tau_1} v_{\tau_2} = 0),$$

где $\deg v_{\sigma_1} = \deg v_{\sigma_2} = 2$, $\deg v_{\tau_1} = \deg v_{\tau_2} = 4$.

Как было отмечено в [2, гл. 3], симплициальное отображение $\phi\colon K_1 \to K_2$ симплициальных комплексов индуцирует отображение колец граней $\phi^*\colon \mathbb{Z}[K_2] \to \mathbb{Z}[K_1]$, т.е. кольцо граней имеет контравариантный характер. Аналогичное свойство имеет место и для произвольных симплициально клеточных комплексов.

Предложение 5.3. *Пусть $\phi\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ — симплициальное отображение. Определим отображение градуированных колец многочленов*

$$\phi^*\colon \mathbb{Z}\big[v_\tau\colon \tau \in \mathcal{S}_2 \setminus \widehat{0}\big] \to \mathbb{Z}\big[v_\sigma\colon \sigma \in \mathcal{S}_1 \setminus \widehat{0}\big], \qquad v_\tau \mapsto \sum v_\sigma,$$

где сумма берется по всем симплексам $\sigma \in \mathcal{S}_1$ таким, что $\phi(\sigma) = \tau$ и $\dim\sigma = \dim\tau$. Тогда отображение ϕ^* индуцирует отображение колец граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}_2] \to \mathbb{Z}[\mathcal{S}_1]$ (которое мы будем обозначать тем же символом).

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $\phi^*(\mathcal{I}_{\mathcal{S}_2}) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{S}_1}$. $\square$

Пусть $\mathcal{S}$ — симплициально клеточный комплекс размерности n. Аналогично тому, как это сделано выше, определяется кольцо граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ над произвольным коммутативным кольцом $\mathbf{k}$ с единицей (наряду с $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$ нас будет интересовать случай $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$). Последовательность $t_1, \dots, t_n$ алгебраически независимых однородных элементов кольца $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ называется *однородной системой параметров*, если $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является конечно порожденным $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]$-модулем. Таким образом, последовательность однородных элементов $t_1, \dots, t_k$ длины $k \le n$ является частью однородной системы параметров тогда и только тогда, когда $\dim \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(t_1, \dots, t_k) = n - k$, где $\dim$ обозначает *размерность Крулля.* Система параметров, состоящая из элементов степени 2, называется *линейной.* Последовательность элементов $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{k}[\mathcal{S}]$ называется *регулярной*, если $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является свободным $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_k]$-модулем. Однородная регулярная последовательность является частью однородной системы параметров, однако обратное неверно. Кольцо $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ называется *кольцом Коэна–Маколея* (а комплекс $\mathcal{S}$ соответственно *комплексом Коэна–Маколея*), если оно допускает регулярную последовательность длины $n = \dim \mathbf{k}[\mathcal{S}] = \dim \mathcal{S} + 1$. Примером кольца Коэна–Маколея является симплициально клеточное разбиение сферы [14].

Для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{S}$ определим *гомоморфизм ограничения*

$$s_\sigma\colon \mathbf{k}[\mathcal{S}] \to \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(v_\tau\colon \tau \not\le \sigma).$$

Пусть $\dim\sigma = k - 1$ и $\{i_1, \dots, i_k\}$ — набор вершин симплекса σ. Тогда легко видеть, что образом гомоморфизма s_σ является кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ от k образующих степени 2. Следующее утверждение дает характеризацию линейных систем параметров в кольцах граней симплициально клеточных комплексов и обобщает соответствующее утверждение [15, Lemma III.2.4] для симплициальных комплексов (см. также [6, Theorem 7.2]).

Теорема 5.4. *Последовательность $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n)$ элементов степени 2 кольца $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является линейной системой параметров тогда и только тогда, когда для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{S}$ последовательность $s_\sigma(\boldsymbol{t})$ порождает кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_i\colon i \in \sigma]$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\boldsymbol{t}$ — линейная система параметров. Отображение s_σ индуцирует эпиморфизм фактор-колец

$$\mathbf{k}[\mathcal{S}]/(\boldsymbol{t}) \to \mathbf{k}[v_i\colon i \in \sigma]/s_\sigma(\boldsymbol{t}).$$

Так как $\boldsymbol{t}$ — система параметров, $\dim \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(\boldsymbol{t}) = 0$, т.е. $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(\boldsymbol{t}) < \infty$. Следовательно, $\mathbf{k}[v_i\colon i \in \sigma]/s_\sigma(\boldsymbol{t}) < \infty$. Однако это имеет место, только если $s_\sigma(\boldsymbol{t})$ мультипликативно порождает над $\mathbf{k}$ кольцо многочленов.

Пусть теперь для каждого $\sigma \in \mathcal{S}$ набор $s_\sigma(\boldsymbol{t})$ порождает кольцо $\mathbf{k}[v_i\colon i \in \sigma]$. Тогда мы имеем

$$\dim_{\mathbf{k}} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathbf{k}[v_i\colon i \in \sigma]/s_\sigma(\boldsymbol{t}) < \infty.$$

Кроме того, сумма $s\colon \mathbf{k}[\mathcal{S}] \to \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}} \mathbf{k}[v_i\colon i\in\sigma]$ гомоморфизмов ограничения является мономорфизмом [2, Теорема 4.8]. Отсюда вытекает, что и $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(\boldsymbol{t}) < \infty$ (см. [5, Lemma 4.7.1]). Таким образом, $\boldsymbol{t}$ является линейной системой параметров. □

Ясно, что теорема остается верной, если в ее формулировке рассматривать лишь ограничения $s_\sigma(\boldsymbol{t})$ на максимальные симплексы $\sigma\in\mathcal{S}$. В частности, если $\mathcal{S}$ — чистый комплекс (все максимальные симплексы имеют размерность $n-1$), то последовательность $t_1,\dots,t_n$ является линейной системой параметров тогда и только тогда, когда ее ограничение на каждый $(n-1)$-симплекс дает базис в пространстве линейных форм (над $\mathbf{k}$).

Пусть $K_{\mathcal{S}}$ — симплициальный комплекс, построенный по симплициально клеточному комплексу $\mathcal{S}$ при доказательстве теоремы 4.1. Легко видеть, что кольцо $\mathbf{k}[K_{\mathcal{S}}]$ совпадает с подкольцом кольца $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$, порожденным элементами степени 2.

Лемма 5.5. *Кольцо $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ допускает линейную систему параметров.*

Доказательство. Если $\mathcal{S}$ — симплициальный комплекс, то кольцо $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ порождается линейными элементами и утверждение вытекает из леммы Нётер о нормализации (см., например, [5, Theorem 1.5.17]). В общем случае из теоремы 5.4 вытекает, что линейная система параметров в кольце $\mathbb{Q}[K_{\mathcal{S}}]$ также является линейной системой параметров для $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$. □

Пример 5.6. В кольце граней из примера 5.2 набор $v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}$ образует линейную систему параметров, а элементы v_{τ_1} и v_{τ_2} являются корнями алгебраического уравнения $x^2-(v_{\sigma_1}v_{\sigma_2})x = 0$.

Вопрос о существовании линейной системы параметров в кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ значительно тоньше даже в случае, когда $\mathcal{S}$ является симплициальным комплексом (лемма Нётер о нормализации в этом случае дает лишь существование нелинейной однородной системы параметров). Этот вопрос тесно связан с вычислением ранга свободно действующего тора на некоторых многообразиях (см. разд. 6 ниже). Здесь мы заметим лишь, что примером симплициального комплекса K, для которого кольцо $\mathbb{Z}[K]$ не допускает линейной системы параметров, является граница *циклического многогранника* $C^n(m)$ с $m\ge 2^n\ge 16$ вершинами. Этот пример был построен в [6, Example 1.22] (он приведен также в [2, пример 6.33]).

Лемма 5.7. *Пусть $v_1,\dots,v_m$ — элементы степени 2 в кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$, соответствующие вершинам комплекса $\mathcal{S}$. Тогда в кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ имеет место тождество*

$$(1+v_1)\cdot\ldots\cdot(1+v_m) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} v_\sigma. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{ver}\sigma$ обозначает множество вершин элемента $\sigma\in\mathcal{S}$. Из соотношений (5.1) в кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ вытекают соотношения

$$v_{i_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_k} = \sum_{\sigma\colon \operatorname{ver}\sigma=\{i_1,\dots,i_k\}} v_\sigma. \tag{5.3}$$

Суммируя эти соотношения по всем $\sigma\in\mathcal{S}$, мы получаем требуемое тождество. □

Кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ допускает каноническую $\mathbb{N}^m$-градуировку, определяемую как $\operatorname{mdeg} v_\sigma = 2\sum_{i\in\operatorname{ver}\sigma} e_i$, где $e_i\in\mathbb{N}^m$ — i-й базисный вектор. В частности, $\operatorname{mdeg} v_i = 2e_i$. Если все кольца считать мультиградуированными, то соотношение (5.2) эквивалентно набору соотношений (5.3). Из предложения 5.1 вытекает, что соотношения (5.3) порождают идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ в случае, когда $\mathcal{S}$ является симплициальным комплексом. Однако, как показывает следующий пример, для произвольного симплициального частично упорядоченного множества $\mathcal{S}$ кольцо граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ может быть неизоморфно фактор-кольцу $\mathbb{N}^m$-градуированного кольца многочленов $\mathbb{Z}[v_\sigma\colon \sigma\in\mathcal{S}]$ по соотношению (5.2).

Пример 5.8. Рассмотрим симплициально клеточный комплекс $\mathcal{S}$, получаемый отождествлением двух 2-симплексов τ_1 и τ_2 по их трем вершинам. Рассмотрим два ребра $\varepsilon_1 \subset \tau_1$ и $\varepsilon_2 \subset \tau_2$, имеющих общие вершины, и пусть π — противоположная вершина комплекса $\mathcal{S}$. Тогда в кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ имеют место соотношения $v_{\varepsilon_1}v_\pi = v_{\tau_1}$ и $v_{\varepsilon_2}v_\pi = v_{\tau_2}$, однако из соотношения (5.2) вытекает лишь $v_{\varepsilon_1}v_\pi + v_{\varepsilon_2}v_\pi = v_{\tau_1} + v_{\tau_2}$.

Многочлен $P_{\mathcal{S}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} v_\sigma$ рассматривался Александером в работе [4] 1930 г. в связи с формализацией понятия симплициального комплекса в комбинаторной топологии (однако, как мы отмечали во введении, кольцо граней появилось значительно позже).

Возникает естественный вопрос: насколько симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$ определяется своим кольцом граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$? В случае симплициальных комплексов имеет место следующее простое утверждение.

Предложение 5.9. *Кольцевой гомоморфизм $F\colon \mathbb{Z}[K_2] \to \mathbb{Z}[K_1]$ является однородным степени 0 изоморфизмом $\mathbb{N}^m$-градуированных колец граней двух симплициальных комплексов тогда и только тогда, когда F индуцируется некоторым симплициальным изоморфизмом $K_1 \to K_2$.*

Доказательство. Пусть F — однородный степени 0 изоморфизм $\mathbb{N}^m$-градуированных колец. Тогда он устанавливает биекцию между множествами вершин комплексов K_1 и K_2. Поэтому $F(P_{K_1}) = P_{K_2}$ и утверждение вытекает из соотношения (5.2). Обратное утверждение очевидно. $\square$

Как видно уже в простейшем примере симплекса (когда кольцо граней является кольцом многочленов), в предыдущем утверждении нельзя заменить "изоморфизм $\mathbb{N}^m$-градуированных колец" на "изоморфизм градуированных колец". Для того чтобы изоморфизм $F\colon \mathbb{Z}[K_2] \to \mathbb{Z}[K_1]$ градуированных колец индуцировался симплициальным изоморфизмом, необходимо дополнительно потребовать, чтобы $F(P_{K_1}) = P_{K_2}$. В то же время нам неизвестно, существуют ли неизоморфные симплициальные частично упорядоченные множества с изоморфными кольцами граней.

Симплициальное отображение называется *невырожденным*, если его ограничение на каждый симплекс является симплициальным изоморфизмом. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 5.10. *Если $\phi\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ — невырожденное симплициальное отображение, то мы имеем $\phi^*(P_{\mathcal{S}_2}) = P_{\mathcal{S}_1}$.*

Как показывают простые примеры, соотношение $\phi^*(P_{\mathcal{S}_2}) = P_{\mathcal{S}_1}$ не имеет места для произвольных симплициальных отображений.

6. ДЕЙСТВИЯ ТОРА

Пусть K — некоторый симплициальный комплекс с m вершинами. В [2, § 5.2] описано кубическое разбиение $\mathrm{cc}(K)$ конуса $\operatorname{cone} K'$ над барицентрическим подразбиением симплициального комплекса K. Это кубическое разбиение получается путем отождествления конуса $\operatorname{cone}(\Delta^{m-1})'$ над барицентрическим подразбиением $(m-1)$-мерного симплекса со стандартной триангуляцией куба I^m при помощи вложения $\operatorname{cone} K' \subset \operatorname{cone}(\Delta^{m-1})'$. (Это вложение индуцировано каноническим вложением $K \subset \Delta^{m-1}$.) Далее, в [2, § 7.2] построен *момент-угол-комплекс* $\mathcal{Z}_K$ как пространство, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_K & \longrightarrow & (D^2)^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{cc}(K) & \longrightarrow & I^m \end{array}$$

где правая стрелка есть проекция на пространство орбит стандартного действия m-мерного тора на полидиске. Таким образом, если $\dim K = n-1$, то $\mathcal{Z}_K$ является $(m+n)$-мерным пространством с действием тора T^m. Это пространство впервые было введено Дэвисом и Янушкиевичем в работе [6] в связи с конструкцией топологических аналогов алгебраических торических многообразий. Изучению различных топологических свойств $\mathcal{Z}_K$ и их взаимосвязей с комбинаторикой комплекса K посвящены главы 7 и 8 в [2]. В частности, нетрудно доказать, что если K является триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{Z}_K$ является $(m+n)$-мерным многообразием (см., например, [2, лемма 7.13]). Далее в этой работе мы на основе теоремы 4.1 обобщаем некоторые из конструкций, связанных с пространством $\mathcal{Z}_K$, на случай произвольных симплициально клеточных комплексов.

Пусть $\mathcal{S}$ — произвольный симплициально клеточный комплекс с m вершинами. Рассмотрим композицию $\operatorname{cone}\mathcal{S}' \to \operatorname{cone}K' \to I^m$ отображения, индуцированного разветвленным комбинаторным накрытием $p\colon \mathcal{S} \to K$ из теоремы 4.1, и описанного выше вложения в куб. Определим пространство $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ с действием тора T^m, индуцированное этой композицией:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_\mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{Z}_K \arrow[r] \arrow[d] & (D^2)^m \arrow[d] \\
\operatorname{cone}\mathcal{S}' \arrow[r] & \operatorname{cone}K' \arrow[r] & I^m
\end{tikzcd}$$

Пример 6.1. Пусть $\mathcal{S}$ — симплициально клеточный комплекс, получаемый отождествлением двух $(n-1)$-мерных симплексов по их границам (см. пример 2.1). Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ получается отождествлением двух полидисков $(D^2)^n$ по их границам. Следовательно, $\mathcal{Z}_\mathcal{S} \cong S^{2n}$. В другом аспекте это многообразие с действием тора T^n рассматривалось в [11] как первый пример тор-многообразия, не являющегося квазиторическим многообразием в смысле [6].

Следующее утверждение очевидно из конструкции пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$.

Предложение 6.2. *Стационарные подгруппы (стабилизаторы) действия тора T^m на $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ являются координатными и имеют вид $T^{\operatorname{ver}\sigma} \subset T^m$, где σ — некоторый симплекс в $\mathcal{S}$.*

Пусть X — пространство и K_1, K_2 — две его триангуляции, т.е. два симплициальных комплекса, для которых $|K_1| \cong |K_2| \cong X$. Такие две триангуляции называются *комбинаторно эквивалентными* (или *кусочно линейно изоморфными*), если существует симплициальный комплекс K, являющийся подразбиением как комплекса K_1, так и комплекса K_2. Триангуляция $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} называется *кусочно линейной* (или кратко *PL-сферой*), если она комбинаторно эквивалентна границе симплекса $\partial\Delta^n$. Понятия комбинаторной эквивалентности и PL-сферы непосредственно переносятся на симплициально клеточные комплексы $\mathcal{S}$ путем перехода к барицентрическому подразбиению $\mathcal{S}'$.

Теорема 6.3. *Пусть $\mathcal{S}$ — кусочно линейное симплициально клеточное разбиение сферы S^{n-1} с m вершинами. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ является $(m+n)$-мерным многообразием.*

Доказательство. Рассмотрим комплекс, двойственный симплициальному комплексу $\mathcal{S}'$. Этот комплекс имеет по одной гиперграни (грани коразмерности 1) F_v на каждую вершину v комплекса $\mathcal{S}'$, где

$$F_v := \operatorname{star}_{\mathcal{S}'} v = \{\sigma \in \mathcal{S}' \colon\ v \cup \sigma \in \mathcal{S}'\}.$$

Грани коразмерности k определяются как непустые пересечения наборов из k гиперграней. Так как $\mathcal{S}'$ является PL-сферой, каждая i-мерная грань кусочно линейно гомеоморфна i-мерному шару. Для каждой вершины $v \in \mathcal{S}'$ обозначим через U_v открытое подмножество в $\operatorname{cone}(\mathcal{S}')$, получаемое удалением из $\mathcal{S}'$ всех граней, не содержащих v. Тогда $\{U_v\}$ есть открытое покрытие пространства $\operatorname{cone}(\mathcal{S}')$, причем каждое U_v гомеоморфно открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n_+$ с сохранением коразмерности граней. Тем самым $\operatorname{cone}(\mathcal{S}')$ приобретает структуру *многообразия с углами* (см. [2, определение 6.13]). В то же время каждая точка из $\mathcal{Z}_\mathcal{S} = \rho^{-1}(\operatorname{cone}(\mathcal{S}'))$ лежит в одном из подмножеств $\{\rho^{-1}(U_v)\}$, которое является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{2n} \times T^{m-n}$. Так как последнее является многообразием, таковым является и $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$. $\square$

Действие тора T^k на пространстве X называется *почти свободным*, если все стационарные подгруппы конечны. *Торическим рангом* пространства X называется наибольшее число k, для которого существует почти свободное действие тора T^k на X. Обозначим торический ранг через $\operatorname{trk}(X)$.

Следующее утверждение было доказано в случае симплициального комплекса $\mathcal{S}$ в [6, § 7.1], однако это рассуждение проходит и в общем случае.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathcal{S}$ — симплициально клеточный комплекс размерности $n-1$ с m вершинами. Тогда $\operatorname{trk} \mathcal{Z}_\mathcal{S} \geq m - n$.*

Доказательство. Выберем в кольце $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ линейную систему параметров $t_1, \ldots, t_n$ согласно лемме 5.5. Запишем $t_i = \lambda_{i1}v_1 + \ldots + \lambda_{im}v_m$, $i = 1, \ldots, n$; тогда матрица (λ_{ij}) определяет линейное отображение $\lambda\colon \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}^n$. Заменяя, если необходимо, λ на $k\lambda$ для достаточно большого k, можно считать, что отображение λ индуцировано отображением $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, которое мы также будем обозначать λ. Из теоремы 5.4 вытекает, что для любого симплекса $\sigma \in \mathcal{S}$ ограничение $\lambda|_{\mathbb{Z}^{\operatorname{ver}\sigma}} \colon \mathbb{Z}^{\operatorname{ver}\sigma} \to \mathbb{Z}^n$ отображения λ на координатное подпространство $\mathbb{Z}^{\operatorname{ver}\sigma} \subset \mathbb{Z}^m$ инъективно. Обозначим через N подгруппу в T^m, соответствующую ядру отображения $\lambda\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$. Тогда N есть произведение $(m-n)$-мерного тора и конечной группы и N пересекает координатные подгруппы вида $T^{\operatorname{ver}\sigma} \subset T^m$ по конечным подгруппам. Из предложения 6.2 вытекает, что N действует на $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ почти свободно, что завершает доказательство. $\square$

Известна следующая *гипотеза о торическом ранге* (Гальперин [7]): для любого конечномерного пространства X выполняется неравенство

$$\dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq 2^{\operatorname{trk}(X)}.$$

Эта гипотеза доказана во многих частных случаях. Наш подход дает богатый класс торических действий. Из теоремы 6.4 вытекает, что если гипотеза о торическом ранге верна, то

$$\dim H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{S}; \mathbb{Q}) \geq 2^{m-n}.$$

В случае симплициального комплекса K в [1] доказано, что

$$H^*(\mathcal{Z}_K; \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{\omega \subseteq [m]} \widetilde{H}^*(K_\omega; \mathbb{Q}),$$

где K_ω — полный подкомплекс в K, натянутый на подмножество вершин $\omega \subseteq [m]$. (Более сильный результат получен в [2, следствие 8.8].)

Следствие 6.5. *Если гипотеза о торическом ранге верна, то для любого симплициального комплекса K имеет место неравенство*

$$\dim \bigoplus_{\omega \subseteq [m]} \widetilde{H}^*(K_\omega; \mathbb{Q}) \geq 2^{m-n}.$$

Это утверждение о комбинаторной структуре симплициальных комплексов было подтверждено в ряде случаев.

Для свободных действий тора рассуждение, использованное в доказательстве теоремы 6.4, приводит к следующему утверждению.

Теорема 6.6. *В торе T^m существует свободно действующая на $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ торическая подгруппа размерности $m-n$ тогда и только тогда, когда кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ допускает линейную систему параметров.*

Максимальное число k, для которого в T^m существует торическая подгруппа размерности k, действующая на $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ свободно, обозначается $s(\mathcal{S})$ и является важным комбинаторным инвариантом симплициально клеточного комплекса $\mathcal{S}$ (в случае симплициальных комплексов см. обсуждение в [2, § 7.1]). Заметим, что в случае симплициальных комплексов диагональная подгруппа-окружность в T^m действует на $\mathcal{Z}_K$ свободно (действительно, мы имеем $m > n$ и поэтому диагональная подгруппа пересекает каждую стационарную подгруппу $T^{\mathrm{ver}\,\sigma}$ лишь по единице). Таким образом, $s(K) \geq 1$ и эйлерова характеристика пространства $\mathcal{Z}_K$ равна нулю. Как видно из примера 6.1, для симплициально клеточных комплексов $\mathcal{S}$ это уже не так.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра // УМН. 2000. Т. 55, №5. С. 3–106.
2. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
3. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
4. *Alexander J.W.* The combinatorial theory of complexes // Ann. Math. 1930. V. 31. P. 292–320.
5. *Bruns W., Herzog J.* Cohen–Macaulay rings. Rev. ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 39).
6. *Davis M.W., Januszkiewicz T.* Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62. P. 417–451.
7. *Halperin S.* Rational homotopy and torus actions // Aspects of topology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. P. 293–306. (LMS Lect. Note Ser.; V. 93).
8. *Hattori A., Masuda M.* Theory of multi-fans // Osaka J. Math. 2003. V. 40. P. 1–68.
9. *Izmestiev I., Joswig M.* Branched covering, triangulations, and 3-manifolds: E-print, 2001. math.GT/0108202.
10. *Klee V.* A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem // Canad. J. Math. 1964. V. 16. P. 517–531.
11. *Masuda M., Panov T.* On the cohomology of torus manifolds: E-print, 2003. math.AT/0306100.
12. *Matveev S.V.* Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. New York: Springer, 2003.
13. *Stanley R.P.* Enumerative combinatorics. Monterey (CA): Wadsworth and Brooks/Cole, 1986. V. 1. Рус. пер.: *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.
14. *Stanley R.P.* f-Vectors and h-vectors of simplicial posets // J. Pure and Appl. Algebra. 1991. V. 71. P. 319–331.
15. *Stanley R.P.* Combinatorics and commutative algebra. 2nd ed. Boston: Birkhäuser, 1996. (Progr. Math.; V. 41).