А. Р. Данилин, Об условиях сходимости конечномерных аппроксимаций метода невязки, *Изв. вузов. Матем.*, 1980, номер 11, 38–40

А. Р. Данилин

УДК 517.988

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ МЕТОДА НЕВЯЗКИ

В заметке рассматриваются условия устойчивости конечномерных аппроксимаций метода невязки [1] относительно возмущений оператора задачи [2], [3].

Пусть U — сепарабельное E-пространство, F — рефлексивное нормированное пространство, A — линейный непрерывный оператор из U в F. Для решения операторного уравнения

$$Au=f,\ u\in U,\ f\in F, \tag{1}$$

по приближенной правой части f_δ: $\|f_\delta-f_0\|<\delta$, рассматривается метод невязки

$$u_\delta:\inf\{\|u\|:\|Au-f_\delta\|\leqslant\delta\}. \tag{2}$$

Известно, что $u_\delta\to u_0$ при $\delta\to 0$, где u_0 — решение уравнения (1) при $f=f_0$, минимальное по норме.

Рассмотрим множество

$$D_{\inf}(A)=\{u:\|u\|=\inf\{\|\bar{u}\|:\bar{u}\in A^{-1}(f)\},\ f\in R(A)\}.$$

Очевидно $u_\delta\in D_{\inf}(A)$ при всех δ и f_δ.

Пусть $\{U_n\}$ — последовательность конечномерных подпространств пространства U, $\{A_k\}$ — последовательность линейных непрерывных операторов из U в F, $\{f_\delta^m\}$ — последовательность элементов из F такая, что $\lim\limits_{m\to\infty}f_\delta^m=f_\delta$.

Рассмотрим задачу

$$\inf\{\|u\|:u\in U_n,\ \|A_ku-f_\delta^m\|\leqslant\delta\}. \tag{3}$$

Если при некоторых n, m, k эта задача разрешима, то ее решение единственно [4]. Обозначим его через $u_{n,k,\delta}^m$.

Определение. Пару $(A\{A_k\})$, где A и A_k — операторы из U в F, называют слабо замкнутой, если для любой $k_i:k_i\to\infty$ из того, что $u_{k_i}\xrightarrow{\text{сл.}}\hat{u}$ и $A_{k_i}u_{k_i}\xrightarrow{\text{сл.}}\hat{f}$, следует, что $\hat{f}=A\hat{u}$ [5], [6].

Теорема 1. *Для того чтобы для всех f_δ, расстояние от которых до множества значений оператора A меньше δ, задача* (3) *была разрешима при достаточно больших n, m, k и $u_{n,k,\delta}^m\to u_\delta$ при n, m, $k\to\infty$, необходимо выполнение условия:* а) *для любого $u\in D_{\inf}(A)$ найдется последовательность $\{u_{n,k}\}$ такая, что при всех k $u_{n,k}\in U_n$ и $u_{n,k}\to u$, $A_ku_{n,k}\to Au$ при n, $k\to\infty$, и достаточно, чтобы наряду с условием* а) *пара $(A,\{A_k\})$ была слабо замкнута.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем $\delta(p)=1/p$, $f_{\delta(p)}^m=Au_0$, тогда при достаточно больших n и k задача (3) при $\delta=\delta(p)$ будет разрешима, причем $u_{n,k,\delta(p)}\to u_{\delta(p)}$ при n, $k\to\infty$. А т. к. $u_{\delta(p)}\to u_0$ при $p\to\infty$, то найдется $\{u_{n,k}\}$, удовлетворяющая а).

Достаточность. Возьмем $0<\varepsilon<\delta-\|f_\delta-f_0\|$ и рассмотрим $u_{\delta-\varepsilon}$ — решение задачи (2), где вместо δ взято $\delta-\varepsilon$. Так как $u_{\delta-\varepsilon}\in D_{\inf}(A)$, то в силу условия а) при достаточно больших n, m, k задача (3) будет разрешима и $\|u_{n,k,\delta}^m\|\leqslant\|u_{n,k}\|$, где $\{u_{n,k}\}$ — последовательность, гарантированная условием а) для $u_{\delta-\varepsilon}$. Доказательство сходимости $u_{n,k,\delta}^m$ к k_δ проводится аналогично доказательству в [3].

Предложение 1. *Если выполнено условие* а), *то для любого* $u \in D_{\inf}(A)$ $P_n u \to u$ *при* $n \to \infty$, *где* P_n — *оператор метрического проектирования* U *на* U_n.

Действительно, это непосредственно следует из неравенства $\|u - P_n u\| \leqslant \leqslant \|u - u_{n,k}\|$.

Отметим, что частный случай теоремы 1 и предложения 1 доказан в [2], причем в части достаточности этот вопрос в общем случае исследуется в [6].

Предложение 2. *Если* $\{A_k\}$ *ограничены в совокупности, то для выполнения условия* а) *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $u \in D_{\inf}(A)$ $P_n u \to u$ *при* $n \to \infty$ *и* $A_k u \to Au$ *при* $k \to \infty$.

Действительно, необходимость следует из предложения 1 и неравенства $\|A_k u - Au\| \leqslant \|A_k\| \|u - u_{n,k}\| + \|A_k u_{n,k} - Au\|$, а достаточность—из неравенства

$$\|A_k P_n u - Au\| \leqslant \|A_k\| \cdot \|P_n u - u\| + \|A_k u - Au\|.$$

Предложение 3. *Если* $A_k \to A$ τ-*равномерно* [7], [3], *где* τ — *отделимая локально выпуклая топология, заданная на* F, *более слабая, чем исходная топология на* F, *то пара* $(A, \{A_k\})$ *слабо замкнута.*

Доказательство. Если $u_k \xrightarrow{\text{сл.}} u$ и $A_k u_k \xrightarrow{\text{сл.}} f$, то $\{u_k\}$ ограничена и, следовательно, для любой τ-замкнутой и выпуклой окрестности нуля V и для всех достаточно больших k имеем $(A_k u_k - Au_k) \in V$. В силу линейности и непрерывности A $(A_k u_k - Au_k) \xrightarrow{\text{сл.}} (f - Au)$. Но V выпукло и τ-замкнуто, поэтому и слабо замкнуто, т. е. $(f - Au) \in V$. Из отделимости τ следует, что $f = Au$.

Предложение 4. *Если* $\{A_k\}$ *ограничены в совокупности, а* F — *пространство с базисом* [8], *и пара* $(A, \{A_k\})$ *слабо замкнута, то существует топология* τ, *описанная в предложении* 3, *такая, что* $A_k \to A$ τ-*равномерно.*

Действительно, если $\{f_j\}$ — базис пространства F, F_l — подпространство в F, порожденное первыми l элементами базиса, Q_l — оператор проектирования, $Q_l\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j f_j\right) = \sum_{j=1}^{l} x_j f_j$, то в качестве топологии τ можно взять топологию, порожденную семейством преднорм $q_l(f) = \|Q_l f\|$ [7].

Предложение 5. *Если* $A_k^* \to A^*$ *поточечно, где* A_k^*, A — *операторы, сопряженные соответственно* k A_k, A, *то* $A_k \to A$ τ-*равномерно, где* τ — *слабая топология пространства* F.

Действительно, это следует из неравенства

$$|\langle A_k u - Au, f^* \rangle| \leqslant \|u\| \, \|A_k^* f^* - A^* f^*\|.$$

Из теоремы 1 и предложений 2 и 5 следует

Теорема 2. *Если* $U = F$ — *гильбертовы пространства,* A — *самосопряженный непрерывный взаимнооднозначный оператор,* $\{A_k\}$ — *самосопряженные операторы, ограниченные в совокупности,* $\{U_n\}$ — *конечномерные подпространства пространства* U, *то для того чтобы задача* (3) *была разрешима при достаточно больших* n, m, k *и* $u^m_{n,k,\delta} \to u_\delta$ *при* n, m, $k \to \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $A_k \to A$ *поточечно и для всех* $u \in U$ $P_n u \to u$, *где* P_n — *операторы ортогонального проектирования пространства* U *на* U_n.

В части достаточности теорема 2 установлена также в [6].

Отметим, что ограниченность в совокупности операторов $\{A_k\}$ не является необходимым условием сходимости решений задачи (3) к решению задачи (2).

Рассмотрим следующий пример: возьмем $U = F = l_2$, A — тождественный оператор, A_k заданы формулой: $A_k(\eta_1, \eta_2, \dots) = (\eta_1, \dots, \eta_{k-1}, k\eta_k, 0, 0, \dots)$, $U_n = \{(\eta_1, \eta_2, \dots) : 0 = \eta_{n+1} = \eta_{n+2} = \dots\}$. Операторы A_k не являются ограниченными в совокупности, но, с другой стороны, нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6, с. 1089—1094.

2. Васин В. В., Танана В. П. Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1, с. 19—29.

3. Данилин А. Р., Танана В. П. О сходимости проекционных методов решения линейных некорректных задач.— Матем. зап. Уральск. ун-та и Уральск. матем. о-ва, 1975, т. 9, тетр. 4, с. 3—13.

4. Klee V. L. Convexity of Chebyshev sets.— Math. Ann., 1961, Bd. 142, № 3, S. 292—304.

5. Grigorieff R. D. Zur Theorie linearer regulärer Operatoren, I. — Math. Nachr., 1973, Bd. 55, № 1—6, S. 233—249.

6. Васин В. В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 1, с. 11—21.

7. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства.— М., 1967.— 257 с.

8. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— 2-е изд.— М., 1965.—519 с.

г. Свердловск

Поступила
18 V 1978

А. М. Елизаров. Об одной смешанной обратной краевой задаче по параметру $r=|z|$

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В статье содержится обобщение полученных ранее результатов автора на случай, когда граничное условие рассматриваемой смешанной обратной краевой задачи задается в зависимости от параметра $r=|z|$, а на неизвестном участке границы искомой области допускается наличие конечного числа угловых точек. (Работа поступила в журнал „Математика“ 5 X 1979.)

Б. А. Кац. Об исключительном случае задачи Римана с осциллирующим коэффициентом

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Рассматривается задача Римана, коэффициент которой допускает в нескольких точках контура такие разрывы, что его модуль и аргумент не имеют в этих точках ни конечных, ни бесконечных односторонних пределов. В предположении принадлежности коэффициента введенным автором классам осциллирующих функций в работе определена размерность задачи в классе ограниченных функций и выписаны ее решения. Полученные результаты являются новыми и для случая, когда коэффициент отделен от нуля и бесконечности. (Работа поступила в журнал „Математика“ 2 X 1979.)

А. В. Колдунов. Решение одной старой задачи из теории полуупорядоченных пространств

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Долгое время не был решен следующий вопрос: если $\{x_n\}$ есть последовательность непрерывных расширенных функций на экстремальном бикомпакте счетного типа и для любой последовательности чисел $\alpha_n \to 0$ найдется непрерывная расширенная функция $f \geqslant |\alpha_n x_n|$ $(n \in N)$, то обязана ли сама последовательность $\{x_n\}$ быть ограниченной некоторой непрерывной расширенной функцией F, т. е. каждое ли расширенное K-пространство счетного типа является K^+-пространством? Отрицательный ответ на этот вопрос и содержится в заметке, причем искомый контрпример построен без каких-либо теоретико-множественных предположений типа (CH), (MA). (Работа поступила в журнал „Математика“ 18 XII 1979.)

Н. А. Степанов. О φ-пространствах, допускающих инвариантное оснащение

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Рассматривается вопрос об инвариантном оснащении φ-пространства, погруженного в связную группу Ли, являющуюся его фундаментальной группой. Указан критерий существования инвариантного оснащениия, на основе которого приводятся классы φ-пространств, допускающих инвариантное оснащение. В частности, регулярные φ-пространства обладают этим свойством. Однако, изучаемый класс пространств шире класса регулярных φ-пространств. Приводится ряд ограничений на группу Ли или автоморфизм φ, при выполнении которых наличие инвариантного оснащения эквивалентно регулярности φ-пространства. В частности, это верно для класса полупростых групп, а также для класса внутренних автоморфизмов любой связной группы Ли. Доказано существование инвариантной аффинной связности на φ-пространствах, допускающих инвариантное оснащение. Указан способ получения всех инвариантных связностей на основе специального класса левоинвариантных связностей фундаментальной группы. (Работа поступила в журнал „Математика“ 12 XI 1979.)