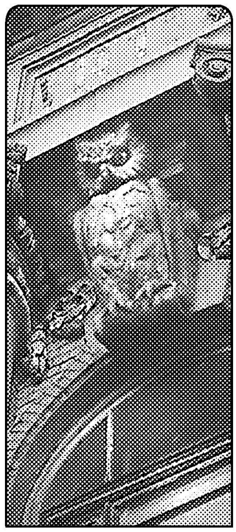
S. S. Volosivets, On weighted analogs of Wiener's and Levy's theorems for Fourier–Vilenkin series, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2011, Volume 11, Issue 3, 3–7

DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-3-7

МАТЕМАТИКА



УДК 517.518

О ВЕСОВЫХ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ ВИНЕРА И ЛЕВИ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ – ВИЛЕНКИНА

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

В данной статье мы находим общий вид комплексного гомоморфизма для некоторых подалгебр алгебры абсолютно сходящихся рядов Фурье – Виленкина. Как следствие мы получаем весовые аналоги теорем Винера и Леви для рядов Фурье – Виленкина.

Ключевые слова: система Виленкина, абсолютная сходимость, весовая последовательность, теорема Винера, теорема Леви.

On Weighted Analogs of Wiener's and Levy's Theorems for Fourier – Vilenkin Series

S. S. Volosivets

Saratov State University,
Chair of Function Theory and Applications
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

In this paper we find the general form of complex homomorphism for some subalgebras of absolutely convergent Fourier – Vilenkin series algebra. As a corollary, we obtain weighted analogs of Wiener's and Levy's theorems for Fourier – Vilenkin series.

Key words: Vilenkin system, absolute convergence, weight sequence, Wiener's theorem, Levy's theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, не меньших 2. Обозначим через $\mathbb{Z}(p_k)$ дискретную циклическую группу $\{0, 1, \dots, p_k - 1\}$ порядка p_k со сложением по модулю p_k и определим $G = G(\mathbf{P})$, как прямое произведение $\mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с операцией $\oplus$, мерой μ и топологией, соответствующими прямому произведению. Элементами G являются последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, где $x_k \in \mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Важную роль при этом играют подгруппы $G_n = \{x \in G : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ и смежные классы $G_n(y) = y \oplus G_n = \{x \in G : x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in G$. Если $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $m_0 = 1$, то мера $\mu(G_n(y))$ равна m_n^{-1} ($\mu(G) = 1 = m_0^{-1}$). Известно, что $G_n(y)$ являются одновременно открытыми и компактными. Аналоги функций Радемахера на группе G задаются формулами $r_k(x) = \exp(2\pi i x_k/p_k)$. Если

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \quad n_k \in \mathbb{Z}(p_k), \tag{1}$$

есть $\mathbf{P}$-ичное представление $n \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $\chi_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} r_k^{n_k}(x)$, $x \in G$ (на самом деле произведение конечно). Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, называемая системой характеров группы G, ортонормирована на G и полна в $L^1(G)$. Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in G$, верны равенства

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \qquad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}, \tag{2}$$

где $\ominus$ — операция, обратная к $\oplus$.

Сопоставим каждому $n \in \mathbb{Z}_+$ вида (1) элемент $n^* = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ группы G. Обратно, каждому финитному элементу $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in G$, где $n_k = 0$ при $k > k_0$, можно сопоставить число $n \in \mathbb{Z}_+$ по формуле (1). Тогда можно ввести $n \oplus m$, $n \ominus m$, как числа, получающиеся по формуле (1) из $n^* \oplus m^*$, $n^* \ominus m^*$. Для любых $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in G$, справедливы равенства

$$\chi_n(x)\chi_m(x) = \chi_{n\oplus m}(x), \qquad \chi_n(x)\overline{\chi_m(x)} = \chi_{n\ominus m}(x). \tag{2'}$$

Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, 3].

Введем коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(G)$ по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\hat{f}(k) = \int_G f(x)\overline{\chi_k(x)}\, d\mu(x), \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Будем писать $f \in A$, если $\|f\|_A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)| < \infty$. В этом случае ряд Фурье функции f по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится абсолютно и равномерно на G. Если $f, g \in A$, то, перемножая два абсолютно сходящихся ряда Фурье, в силу (2′) получаем

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(i)\chi_i(x)\hat{g}(j)\chi_j(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\oplus j=n} \hat{f}(i)\hat{g}(j)\chi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i)g(n\hat{\ominus} i)\chi_n(x).$$

Ясно, что при этом $\|fg\|_A \le \|f\|_A\|g\|_A$. Для двух произвольных последовательностей $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $b = \{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, их **P**-ичной сверткой $a * b$ назовем последовательность $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, такую что $c_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i b_{n\ominus i}$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $a, b \in l^1$ ясно, что $\|a*b\|_{l^1} \le \|a\|_{l^1}\|b\|_{l^1}$. Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_k \ge 1$. Если для $f \in L^1(G)$ имеем $\|f\|_{p,\alpha} = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^p \alpha_k\right)^{1/p} < \infty$, то f принадлежит классу A_α^p. Далее рассматриваем A_α^p как алгебру с поточечным умножением и функцией $e(x) \equiv 1$ в качестве единицы. При доказательстве нам понадобятся определения банаховой алгебры и p-нормированной алгебры. Напомним, что множество B называется коммутативной банаховой алгеброй, если

а) B — коммутативная алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей e относительно умножения;

б) B — банахово пространство с нормой $\|\|_B$;

в) $\|e\|_B = 1$ и $\|fg\|_B \le C\|f\|_B\|g\|_B$ для всех $f, g \in B$.

Важную роль играет множество нетривиальных комплексных непрерывных гомоморфизмов алгебры B, обозначаемое через $\Gamma(B)$. Спектром $\sigma(f)$ элемента f банаховой алгебры называется множество $\lambda \in \mathbb{C}$, таких что элемент $f - \lambda e$ не обратим. Подробней об этих понятиях см. [2, гл. 11, §11.4].

Множество B называется коммутативной p-нормированной алгеброй ($0 < p \le 1$), если

а) B — коммутативная алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей e относительно умножения;

б) B — полное метрическое пространство с метрикой $\rho(f, g) = \|f - g\|_B$, где $\|cf\|_B = |c|^p\|f\|_B$ при $c \in \mathbb{C}$, $f \in B$, и справедливы другие аксиомы нормы;

в) $\|e\|_B = 1$ и $\|fg\|_B \le C\|f\|_B\|g\|_B$ для всех $f, g \in B$.

Множество $\Gamma(B)$ определяется так же, как в случае банаховой алгебры. Спектром $\sigma(f)$ элемента f p-нормированной алгебры B называется множество $\{\gamma(f) : \gamma \in \Gamma(B)\}$. Подробнее о p-нормированных алгебрах и их роли в общей теории топологических алгебр см. работы В. Желязко [3] и [4].

Напомним, что классические теоремы Н. Винера и П. Леви об абсолютно сходящихся рядах Фурье формулируются следующим образом (см. [2, гл. 11, п. 11.4.17]).

Теорема А. *Пусть $\Phi(z)$ аналитична на открытом множестве, содержащем множество значений функции $f(x)$. Если $f(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье функции $\Phi(f)(x)$ также абсолютно сходится. В частности, если $f(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье и $f(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то ряд Фурье функции $1/f(x)$ также абсолютно сходится.*

В настоящей работе сначала определяются условия, при которых множество A^p_α является банаховой алгеброй, или p-нормированной алгеброй, вложенной в A. При этих условиях доказываются аналоги известных теорем Винера и Леви. Для тригонометрических рядов в случае $p > 1$ аналогичные результаты установлены в [5]. В случае $0 < p \le 1$, $\alpha_k \equiv 1$, для тригонометрических рядов также известны аналоги теорем Винера и Леви [4, 6]. Для системы Уолша (система $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ при $p_i \equiv 2$) аналог теоремы Винера доказал Г.Н. Агаев [7].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Пусть $f \in A^p_\alpha$, где $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-p'/p} < \infty$. Тогда $f \in A$.*

Доказательство. Из неравенства Гельдера следует, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)| = \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)|\alpha_i^{1/p}\alpha_i^{-1/p} \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p \alpha_i\right)^{1/p} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{-p'/p}\right)^{1/p'} < \infty.$$

Лемма 2. *Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ — последовательность, такая что каждое число λ_k равно некоторому корню степени p_k из единицы. Тогда существует элемент $x_0 \in G$, такой что $r_k(x_0) = \lambda_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Из определения r_1 видно, что $r_1(x) = \lambda_1$ на некотором смежном классе $y^{(1)} \oplus G_1$, где $\exp(2\pi i y_1^{(1)}/p_1) = \lambda_1$. Пусть $r_1(x) = \lambda_1, \ldots, r_k(x) = \lambda_k$ на некотором смежном классе $y^{(k)} \oplus G_k$. Последний является объединением p_{k+1} смежного класса вида $z \oplus G_{k+1}$, причем в j-м классе z_{k+1} равно $j \in \{0, 1, \ldots, p_{k+1} - 1\}$. Подбирая j со свойством $\exp(2\pi i j/p_{k+1}) = \lambda_{k+1}$, получаем смежный класс $y^{(k+1)} \oplus G_{k+1} \subset y^{(k)} \oplus G_k$, на котором $r_{k+1}(x) = \lambda_{k+1}$. Поскольку множества $y^{(k)} \oplus G_k$ вложены друг в друга и компактны, существует элемент x_0, принадлежащий их пересечению. Очевидно, x_0 — искомый элемент. Лемма доказана.

Для последовательностей $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $b = \{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ будем писать $a = b^\beta$, если $a_i = b_i^\beta$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, $a \le Cb$, если $a_i \le Cb_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, и $a \in l^p_\alpha$, если $|a|_{l^p_\alpha} := \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i|^p \alpha_i\right)^{1/p} < \infty$. При $\alpha_k \equiv 1$ вместо l^p_α пишем l^p.

Лемма 3. *Пусть $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, а последовательность $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-p'/p} < \infty \qquad \left(\alpha^{-p'/p} \in l^1\right) \tag{3}$$

и

$$\alpha^{-p'/p} * \alpha^{-p'/p} \le C\alpha^{-p'/p}. \tag{4}$$

Тогда l^p_α является банаховой подалгеброй l^1 с $\mathbf{P}$-ичной сверткой в качестве умножения и $e = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $e_0 = 1$, $e_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$, в качестве единицы.

Доказательство. Большинство свойств банаховой алгебры для l^p_α очевидны. Докажем, что для $a, b \in l^p_\alpha$ имеет место неравенство $|a * b|_{l^p_\alpha} \le C_1 |a|_{l^p_\alpha} |b|_{l^p_\alpha}$. Пусть $c = a * b$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда по неравенству Гельдера

$$|c_n| = \left|\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} a_i b_{n \ominus i}\right| = \left|\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} a_i b_{n \ominus i} \alpha_i^{1/p} \alpha_{n \ominus i}^{1/p} \alpha_i^{-1/p} \alpha_{n \ominus i}^{-1/p}\right| \le$$

$$\le \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |a_i|^p \alpha_i |b_{n \ominus i}|^p \alpha_{n \ominus i}\right)^{1/p} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \alpha_i^{-p'/p} \alpha_{n \ominus i}^{-p'/p}\right)^{1/p'}.$$

Поэтому согласно (4) (знак в (4) меняется при возведении в отрицательную степень)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |c_n|^p \alpha_n \le C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |c_n|^p \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \alpha_i^{-p'/p} \alpha_{n \ominus i}^{-p'/p}\right)^{-p/p'} \le$$

$$\leq C_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}|a_i|^p\alpha_i|b_{n\ominus i}|^p\alpha_{n\ominus i} = C_2\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}|a_i|^p\alpha_i|\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}|b_{n\ominus i}|^p\alpha_{n\ominus i}.$$

Так как отображение $\varphi(i) = n\ominus i$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{Z}_+$ на $\mathbb{Z}_+$, то $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}|b_{n\ominus i}|^p\alpha_{n\ominus i} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}|b_n|^p\alpha_n$ и нужное неравенство доказано. Тот факт, что l^p_α — подалгебра l^1, вытекает из (3) аналогично лемме 1. Лемма доказана.

Следствие 1. *Множество A^p_α является банаховой алгеброй при $1 < p < \infty$ и α, удовлетворяющей условиям (3) и (4).*

Лемма 4. *Пусть $0 < p \leq 1$, $\alpha_n \geq 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, и*

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_n\alpha_i^{-1}\alpha_{n\ominus i}^{-1} \leq C, \qquad n, i \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Тогда A^p_α есть p-нормированная алгебра с p-нормой $\|f\| = \|f\|^p_{p,\alpha}$, с поточечным умножением и $e(x) = 1$ в качестве единицы.

Доказательство. Так как $\alpha_n \geq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то для $f \in A^p_\alpha$, $0 < p \leq 1$, имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\hat f(i)| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty}|\hat f(i)|^p\right)^{1/p} \leq \|f\|_{p,\alpha} < \infty.$$

Значит, ряд Фурье $f \in A^p_\alpha$, $0 < p \leq 1$, сходится абсолютно. Пусть $f, g \in A^p_\alpha$, $0 < p \leq 1$. Тогда, согласно введению, $(fg)\hat{}(n) = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}_+}\hat f(i)\hat g(n\ominus i)$ и поскольку $0 < p \leq 1$ имеем

$$\|fg\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}|(fg)\hat{}(n)|^p\alpha_n \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}|\hat f(i)|^p\alpha_i|\hat g(n\ominus i)|^p\alpha_{n\ominus i}\alpha_n\alpha_i^{-1}\alpha_{n\ominus i}^{-1} \leq$$

$$\leq C_1\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}|\hat f(i)|^p\alpha_i\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}|\hat g(n)|^p\alpha_n = C_1\|f\|\|g\|.$$

Лемма доказана.

Пример. Пусть $\alpha_n = (n+1)^\alpha$, где $\alpha \geq 0$ и $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^\infty$ ограничена числом N сверху. Если $n \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то при $i \geq m_k$ имеем $\alpha_n\alpha_i^{-1} \leq N^\alpha$. В свою очередь, при $i < m_k$ отмечаем, что $n\ominus i \in [m_k, m_{k+1})$ и тогда $\alpha_n\alpha_{n\ominus i}^{-1} \leq N^\alpha$. Значит, для данной последовательности условие (5) выполнено.

Следующую лемму можно найти, например, в [2, гл. 11, теорема 11.4.15].

Лемма 5. *Пусть элемент f принадлежит банаховой алгебре B и $\Phi(z)$ — комплекснозначная функция, аналитическая на некотором открытом множестве U, содержащем спектр $\sigma(f)$. Тогда существует элемент $g \in B$, такой что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для любого $\gamma \in \Gamma(B)$.*

Аналогом леммы 5 для p-нормированных алгебр является лемма 6, доказанная в [4].

Лемма 6. *Пусть B — коммутативная p-нормированная алгебра и U — открытое множество, содержащее спектр $\sigma(f)$ элемента $f \in B$. Если функция $\Phi(z)$ аналитична на U, то найдется элемент $g \in B$, такой что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для любого $\gamma \in \Gamma(B)$.*

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и последовательность $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условиям (3) и (4). Тогда любой гомоморфизм $\gamma \in \Gamma(A^p_\alpha)$ имеет вид $\gamma(f) = f(x_0)$, где $x_0 \in G$.*

Доказательство. Рассмотрим действие $\gamma \in \Gamma(A^p_\alpha)$ на r_k, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $r_k^{p_k} \equiv 1$, то по определению гомоморфизма $\gamma(r_k)^{p_k} = \gamma(r_k^{p_k}) = \gamma(1) = 1$, т.е. $\gamma(r_k) = \lambda_k$, где λ_k — некоторый корень степени p_k из единицы. Согласно лемме 2 существует элемент $x_0 \in G$, такой что $r_k(x_0) = \lambda_k = \gamma(r_k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда по определению χ_n и гомоморфизма легко следует, что $\chi_n(x_0) = \gamma(\chi_n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $A^p_\alpha \subset A$, то для любой функции $f \in A^p_\alpha$ имеем

$$f(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty}\hat f(i)\chi_i(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty}\hat f(i)\gamma(\chi_i) = \gamma\left(\sum_{i=0}^{\infty}\hat f(i)\chi_i\right) = \gamma(f).$$

Легко проверить, что $\gamma_{x_0}(f) = f(x_0)$ является непрерывным комплексным гомоморфизмом A^p_α для любого $x_0 \in G$. Теорема доказана.

Следствие 2 (аналог теоремы Винера). *Пусть* $f \in A^p_\alpha$, *где* $1 < p < \infty$ *и* α *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Если* $|f(x)| > 0$ *на* G, *то* $1/f \in A^p_\alpha$.

Доказательство. По теореме 11.4.10 из [2, гл. 11] элемент $f \in A^p_\alpha$ обратим в том и только том случае, когда для любого $\gamma \in \Gamma(A^p_\alpha)$ имеем $\gamma(f) \neq 0$. По теореме 1 это условие равносильно тому, что $f(x) \neq 0$ на G. Следствие доказано.

Следствие 3 (аналог теоремы Леви). *Пусть* $f \in A^p_\alpha$, *где* $1 < p < \infty$ *и* α *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Если* $\Phi(z)$ — *комплекснозначная функция, аналитическая на открытом множестве, содержащем множество значений* f, *то* $\Phi(f) \in A^p_\alpha$.

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что функция $f(x) - c_0$ обратима как элемент A^p_α тогда и только тогда, когда c_0 не является значением $f(x)$. Это означает, что в алгебре A^p_α спектр $\sigma(f)$ совпадает с множеством значений f. По лемме 4 найдем $g \in A^p_\alpha$, такую что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для всех $\gamma \in \Gamma(A^p_\alpha)$. По теореме 1 это означает, что $g(x) = \Phi(f(x))$ для всех $x \in G$. Следствие доказано.

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть* $0 < p \leq 1$, *последовательность* α *удовлетворяет условию* (5) *и* $\gamma \in \Gamma(A^p_\alpha)$. *Тогда существует элемент* $x_0 \in G$, *такой что* $\gamma(f) = f(x_0)$. *Обратно, для любого* $x_0 \in G$ *формула* $\gamma_{x_0}(f) = f(x_0)$ *задает комплексный непрерывный гомоморфизм на алгебре* A^p_α.

В доказательстве снова используется включение $A^p_\alpha \subset A$, полученное при доказательстве леммы 4.

Следствие 4. *Пусть* $0 < p \leq 1$, *последовательность* α *удовлетворяет условию* (5) *и* $f \in A^p_\alpha$. *Если* $\Phi(z)$ — *аналитическая функция на открытом множестве* U, *содержащем множество значений* f, *то* $\Phi(f) \in A^p_\alpha$.

Доказательство. Согласно лемме 4 в условиях данного следствия множество A^p_α является p-нормированной алгеброй. По определению спектра в p-нормированной алгебре функция $\Phi(z)$ аналитична на открытом множестве, содержащем $\sigma(f)$. По лемме 6 найдем $g \in A^p_\alpha$, такую что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для всех $\gamma \in \Gamma(A^p_\alpha)$. По теореме 2 отсюда выводим, что $g(x) = \Phi(f(x))$ для всех $x \in G$. Следствие доказано.

Следствие 5. *Пусть* $f \in L^1(G)$, $0 < p \leq 1$ *и* $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}_+} |\hat{f}(i)|^p < \infty$, *причем* $|f(x)| > 0$ *для всех* $x \in G$. *Тогда для* $g = 1/f$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} |\hat{g}(i)|^p < \infty.$$

Как отмечалось ранее, при $p = 1$ и $p_i \equiv 2$ следствие 4 было установлено Г.Н. Агаевым [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270-а) *и гранта Президента по государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект НШ*-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.

2. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М.: Мир, 1985. Т. 2. 400 с.

3. *Zelazko W.* On the locally bounded and m-convex topological algebras // Studia Math. 1960. Vol. 19, № 3. P. 333–356.

4. *Zelazko W.* On the analytic functions in p-normed algebras // Studia Math. 1962. Vol. 21, № 3. P. 345–350.

5. *El Kinani A.* A version of Wiener's and Levy's theorems // Rend. Circ. Mat. Palermo. 2008. Vol. 57, № 2. P. 343–352.

6. *Alpar L.* Généralisation d'un théoreme de Wiener et de Lévy // Acta Math. Hung. 1970. Vol. 21, № 1–2. P. 11–19.

7. *Агаев Г. Н.* Теорема типа Винера для рядов по функциям Уолша // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 751–753.