



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шутов, Тригонометрические суммы над одномерными квазирешетками,  
*Чебышевский сб.*, 2012, том 13, выпуск 2, 136–148

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

3 декабря 2024 г., 09:11:25



# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

## Том 13 Выпуск 2 (2012)

Труды IX Международной конференции  
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,  
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича  
Гриндлингера

---

УДК 519.21

### ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ НАД ОДНОМЕРНЫМИ КВАЗИРЕШЕТКАМИ<sup>1</sup>

А. В. Шутов (г. Владимир)

#### Аннотация

В работе получены оценки тригонометрических сумм по точкам одномерных квазирешеток. Показано, что в некоторых случаях такие тригонометрические суммы растут линейно с ростом числа слагаемых и найдена асимптотика для этого случая. Рассмотрены приложения полученных результатов к дифракции квазикристаллов.

## 1 Введение

Пусть  $\alpha \in (0; 1)$  – иррациональное число,  $\{\cdot\}$  – дробная доля. В качестве одномерной квазирешетки  $L = L(\alpha, l_1, l_2)$  рассмотрим множество точек  $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , определяемое условиями

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \{n\alpha\} < 1 - \alpha \\ x_n + l_2, & \{n\alpha\} \geq 1 - \alpha \end{cases} \quad (1)$$

Отметим, что в работе [19] также рассматривались и более общие одномерные квазирешетки

$$L(\alpha, l_1, l_2, I) = \{x_n \in L(\alpha, l_1, l_2) : \{n\alpha\} \in I\}, \quad (2)$$

где  $I \subseteq [0; 1)$  – некоторый открытый справа полуинтервал.

В настоящей работе мы рассматриваем только квазирешетки вида (1).

В последние годы активно развивается направление, связанное с решением различных теоретико-числовых задач над квазирешетками (1), (2). Рассматривались задачи о распределении точек квазирешеток по произвольному модулю

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00578-а.

$h$  [17], об аппроксимации квазирешеток решетками [15], [16]. Изучены линейные диофантовы уравнения от двух неизвестных [19].

Для некоторых квазирешеток специального вида рассмотрены более общие аддитивные задачи [10], [13], [18], [20], задачи о квадратичных формах над квазирешетками [7], [11], [12], проблемы Гольдбаха [8] и Хуа-Локена [9].

Настоящая работа посвящена изучению тригонометрических сумм

$$f_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n e(x_j \lambda), \tag{3}$$

где  $e(x) = e^{2\pi i x}$ .

С каждой квазирешеткой  $L(\alpha, l_1, l_2)$  тесно связаны параметры

$$h_L = l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha$$

и

$$\tilde{l} = l_2 + (l_1 - l_2)\alpha.$$

Параметр  $h_L$  имеет простой геометрический смысл – это шаг решетки, вкладывающейся в  $L(\alpha, l_1, l_2)$  [16].

Сформулируем основной результат работы.

**ТЕОРЕМА 1.** *Если  $h_L \lambda \notin \alpha\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$ , то для тригонометрической суммы (3) справедлива оценка*

$$f_n(\lambda) = O(\Delta_1(n)) = o(n). \tag{4}$$

*Если  $h_L \lambda = \frac{a+b\alpha}{c}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, b, c) = 1$  и  $c > 1$ , то для тригонометрической суммы (3) справедлива оценка*

$$f_n(\lambda) = O(\Delta_2(n)) = o(n). \tag{5}$$

*Если же  $h_L \lambda = a + b\alpha$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , то для тригонометрической суммы (3) справедлива асимптотическая формула*

$$f_n(\lambda) = n \cdot e(\tilde{l}\lambda - \tilde{\lambda}/2) \frac{\sin \pi \tilde{\lambda}}{\pi \tilde{\lambda}} + O(\Delta_2(n)), \tag{6}$$

где

$$\tilde{\lambda} = (l_2 - l_1)\lambda - b.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** *При  $\tilde{\lambda} = 0$  считаем, что  $\frac{\sin \pi \tilde{\lambda}}{\pi \tilde{\lambda}} = 1$ .*

Функции  $\Delta_1(n)$  и  $\Delta_2(n)$  представляют собой остаточные члены некоторых проблем равномерного распределения дробных долей линейных функций и будут явно определены далее. При этом оценка  $\Delta_i(n) = o(n)$  во многих случаях может быть улучшена. В частности, для почти всех пар  $(L, \lambda)$  можно получить

оценки вида  $\Delta_i(n) = O(n^\varepsilon)$  и даже более сильные оценки. Точный порядок роста величин  $\Delta_i(n)$  очень сильно зависит от диофантовых свойств  $\alpha$ ,  $l_1$  и  $l_2$ .

Отметим, что ранее были получены несколько худшие оценки тригонометрических сумм  $f_n(\lambda)$  для квазирешетки Фибоначчи [2] и квазирешетки четно-фибоначчевых чисел [13].

Автор выражает благодарность В. Г. Журавлеву, привлечшему его внимание к рассматриваемым задачам, а также А. В. Малееву за полезные обсуждения физических аспектов теории тригонометрических сумм.

## 2 Вспомогательные результаты и план доказательства

Вначале получим явную формулу для точек квазирешетки.

ЛЕММА 1. Для  $n \geq 0$  справедливо равенство

$$x_n = nh_L + \tilde{l} + (l_2 - l_1)\{(n+1)\alpha\}. \quad (7)$$

Для доказательства определим функции

$$N_1(n) = \#\{j : 0 \leq j < n, \{j\alpha\} < 1 - \alpha\},$$

$$N_2(n) = \#\{j : 0 \leq j < n, \{j\alpha\} \geq 1 - \alpha\}.$$

Ясно, что

$$N_1(n) + N_2(n) = n \quad (8)$$

и

$$x_n = N_1(n)l_1 + N_2(n)l_2 \quad (9)$$

при  $n \geq 0$ . Легко проверить, что

$$N_1(n) = [(n+1)(1-\alpha)] + 1. \quad (10)$$

Учитывая (8)-(10), получаем справедливость (7) для всех  $n \geq 0$ .

Рассмотрим вектор  $\beta_\lambda = (h_L\lambda, \alpha)$  и сдвиг  $T : y \rightarrow y + \beta_\lambda \pmod{\mathbb{Z}^2}$ . Через  $Orb$  обозначим орбиту точки  $y_0 = (0, \alpha)$  под действием отображения  $T$ . Легко видеть, что точки из  $Orb$  сравнимы с точками  $y_n = (nh_L\lambda, (n+1)\alpha)$  по модулю  $\mathbb{Z}^2$ . Из иррациональности  $\alpha$  немедленно вытекает

ЛЕММА 2. Точки орбиты  $Orb$  равномерно распределены на ее замыкании.

Для произвольного двумерного векторы  $y = (y_1, y_2)$  определим функцию

$$h(y) = e(y_1 - (l_2 - l_1)y_2\lambda + \tilde{l}\lambda). \quad (11)$$

Тогда имеем,

$$f_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n h(y_j).$$

Поскольку функция  $h$  интегрируема по Риману, учитывая лемму 2 и теорему Вейля о равномерном распределении [6] находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\lambda)}{n} = \int_{Orb} h(y) dy.$$

Для получения теоремы 1 требуется теорема Вейля о равномерном распределении с остаточным членом, известная также как неравенство Коксмы-Главки [14]. Эта теорема фактически утверждает, что справедливо неравенство

$$|f_n(\lambda) - n \int_{Orb} h(y) dy| \leq V(h) \Delta(n),$$

где  $V(h)$  – вариация (в общем случае многомерная) функции  $h$ , а  $\Delta(n)$  – остаточный член проблемы равномерного распределения.

Пусть  $D = \dim_{\mathbb{Q}} \langle 1, \alpha, h_L \lambda \rangle$ . Ясно, что  $D = 1$  или  $D = 2$ . Для вычисления интеграла  $\int_{Orb} h(y) dy$  эти случаи необходимо рассмотреть отдельно.

### 3 Случай $D = 2$

При  $D = 2$  замыкание орбиты  $\overline{Orb}$  представляет собой в точности двумерный тор  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ .

Для произвольного прямоугольника  $P \subseteq [0; 1]^2$  определим функцию

$$N_P(n) = \#\{j : 0 \leq j < n, T^j(0) \in P\}.$$

Далее, положим

$$\Delta_1(n) = \sup_P |N_P(n) - |P|n|.$$

Тогда, в силу неравенства Коксмы-Главки, имеем

$$f_n(\lambda) = nI + O(\Delta_1(n)), \tag{12}$$

где

$$I = \int_{\mathbb{T}^2} h(y) dy. \tag{13}$$

С учетом определения функции  $h$  (11), находим, что

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e(y_1 - (l_2 - l_1)y_2\lambda + \tilde{l}\lambda) dy_1 dy_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= e(\tilde{l}\lambda) \int_0^1 e(y_1) \int_0^1 e(-(l_2 - l_1)y_2\lambda) dy_2 dy_1 = \\
&= e(\tilde{l}\lambda) \int_0^1 e(y_1) dy_1 \int_0^1 e(-(l_2 - l_1)y_2\lambda) dy_2 = 0,
\end{aligned}$$

так как  $\int_0^1 e(y_1) dy_1 = 0$ .

Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана. Отметим, что в силу теоремы Вейля о равномерном распределении и условия  $D = 2$  справедлива оценка

$$\Delta_1(n) = o(n).$$

Однако, эта оценка может быть улучшена при наличии дополнительной информации о векторе  $\beta_\lambda$ . Современные оценки для  $\Delta_1(n)$  можно найти например в книге [1].

## 4 Случай $D = 1$ : структура орбиты

При  $D = 1$  числа  $1, \alpha$  и  $h_L\lambda$  линейно зависимы над  $\mathbb{Z}$  и замыкание орбиты  $\overline{Orb}$  представляет собой в точности одномерное подмножество двумерного тора  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

Представим  $h_L\lambda$  в виде  $h_L\lambda = \frac{a+b\alpha}{c}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c > 0$ ,  $(a, b, c) = 1$ . Ясно, что при  $D = 1$  такое представление существует и единственно. Далее, обозначим  $d = (b, c)$ ,  $b_1 = b/d$ ,  $c_1 = c/d$ . При этом

$$\beta_\lambda = \left( \frac{a + b\alpha}{c}, \alpha \right).$$

В этом случае нам удобнее рассматривать замыкание  $\overline{Orb'}$  орбиты начала координат под действием сдвига на вектор  $\beta_\lambda$ . Поскольку

$$\overline{Orb} \equiv \overline{Orb'} + (0, \alpha) \pmod{\mathbb{Z}^2},$$

получаем

$$\int_{\overline{Orb'}} h(y) dy = \int_{\overline{Orb}} h(y) dy. \quad (14)$$

Пусть

$$W(v, s) = \{s + tv \pmod{\mathbb{Z}^2}, t \in [0; 1)\}.$$

ЛЕММА 3. *Справедливо разложение*

$$\overline{Orb'} = \coprod_{k \pmod{d}} W\left(v, \left(\frac{k}{c}, 0\right)\right), \quad (15)$$

где  $\coprod$  означает непересекающееся объединение множеств и  $v = (b_1, c_1)$ .

Точки из орбиты  $Orb'$  сравнимы с точками  $y'_n = (\frac{a}{c}n + \frac{b}{c}n\alpha, n\alpha)$  по модулю  $\mathbb{Z}^2$ . Выберем  $n = cQ_m n_1$ , где  $Q_m - m$ -ый знаменатель подходящей дроби для  $\alpha$ . Тогда

$$y'_n \equiv dn_1(b_1 Q_m \alpha, c_1 Q_m \alpha) \pmod{\mathbb{Z}^2}.$$

Выбирая достаточно большие  $m$  можно сделать величину  $Q_m \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}$  сколь угодно малой.

Отсюда вытекает, что  $\overline{Orb'}$  распадается на конечное число обмоток  $W(v, z)$  с направляющим вектором  $v = (b_1, c_1)$ .

Обозначим через  $Orb^*(z)$  орбиту точки  $z$  под действием отображения  $T^* : z \rightarrow z + (\frac{b_1}{c_1}\alpha, \alpha) \pmod{\mathbb{Z}^2}$ . Пусть  $Orb_k^*(z)$  - множество точек из  $Orb^*(z)$ , номера которых принадлежат множеству  $A_k = \{n : an \equiv k \pmod{c}\}$ .

По определению,  $W(v, 0) = \overline{Orb^*(0)}$ . Более того, поскольку  $Orb^*(z)$  равномерно распределена на своем замыкании,  $W(v, 0) = \overline{Orb_k^*(0)}$  для всех  $k$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \overline{Orb'} &= \overline{\bigcup_{k \pmod{c}} \bigcup_{an \equiv k \pmod{c}} (\frac{a}{c}n + \frac{b}{c}n\alpha, n\alpha) \pmod{\mathbb{Z}^2}} = \\ &= \overline{\bigcup_{k \pmod{c}} \bigcup_{n \in A_k} \left( (\frac{k}{c}, 0) + n(\frac{b_1}{c_1}\alpha, \alpha) \pmod{\mathbb{Z}^2} \right)} = \\ &= \bigcup_{k \pmod{c}} \left( (\frac{k}{c}, 0) + \overline{Orb_k^*(0)} \right) = \\ &= \bigcup_{k \pmod{c}} \left( (\frac{k}{c}, 0) + W(v, 0) \right) = \\ &= \bigcup_{k \pmod{c}} W(v, (\frac{k}{c}, 0)). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы 3 осталось выяснить, какие из множеств  $W(v, (\frac{k}{c}, 0))$  совпадают.

В силу взаимной простоты  $b_1$  и  $c_1$  существует  $l$  такое, что  $\frac{b_1 l}{c_1} \equiv \frac{1}{c_1} \pmod{1}$ . Поэтому  $W(v, 0)$  содержит точки  $(\frac{j}{c_1}, 0)$  для всех  $0 \leq j < c_1$ . Таким образом, множества  $W(v, (\frac{k_1}{c}, 0))$  и  $W(v, (\frac{k_2}{c}, 0))$  совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{k_1 - k_2}{c} = \frac{j}{c_1} = \frac{jd}{c}$$

для некоторого целого  $j$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $k_1 \equiv k_2 \pmod{d}$ , откуда и получаем утверждение леммы.

## 5 Случай $D = 1$ : вычисление интеграла

Нетрудно показать, что ограничение отображения  $T$  на замыкание  $\overline{Orb}$  изоморфно повороту окружности  $x \rightarrow x + \alpha_1 \pmod{1}$ , где

$$\alpha_1 = \frac{|\beta_\lambda|}{|\overline{Orb'}|} = \frac{\alpha}{c_1}.$$

Для произвольного интервала  $J \subseteq [0; 1)$  определим функцию

$$N_J(n) = \#\{j : 0 \leq j < n, \{j\alpha_1\} \in J\}.$$

Далее, положим

$$\Delta_2(n) = \sup_J |N_J(n) - |J|n|.$$

Тогда, в силу неравенства Коксмы-Главки и (14), имеем

$$f_n(\lambda) = nI + O(\Delta_2(n)), \quad (16)$$

где

$$I = \int_{\overline{Orb'}} h(y) dy. \quad (17)$$

В силу иррациональности  $\alpha_1$  и теоремы Вейля имеем

$$\Delta_2(n) = o(n).$$

Более точные оценки для  $\Delta_2(n)$ , учитывающие арифметическую природу  $\alpha_1$  можно найти, например, в работе [4].

Перейдем к вычислению интеграла (17). С учетом разложения орбиты (15), находим

$$I = \frac{1}{d} \sum_{k \pmod{d}} I_k, \quad (18)$$

где

$$I_k = \int_{W(v, (\frac{k}{c}, 0))} h(y) dy = \int_{W(v, 0)} h(y + (\frac{k}{c}, 0)) dy. \quad (19)$$

Вспоминая определение  $h(y)$  (11) получим

$$I_k = \int_{W(v, 0)} e(y_1 + \frac{k}{c} - (l_2 - l_1)y_2\lambda + \tilde{l}\lambda) dy_1 dy_2.$$

В силу определения,

$$W(v, 0) = \{(\{b_1 t\}, \{c_1 t\}) : t \in [0; 1)\}$$

и, следовательно,

$$I_k = e(\tilde{l}\lambda) e(\frac{k}{c}) I^*, \quad (20)$$



где

$$I^* = \int_0^1 e(\{b_1 t\} - (l_2 - l_1)\{c_1 t\}\lambda) dt. \tag{21}$$

Собирая вместе (18)-(21), находим

$$I = \frac{e(\tilde{l}\lambda)I^*}{d} \sum_{k \bmod d} e\left(\frac{k}{c}\right). \tag{22}$$

Поскольку  $b_1$  – целое,  $e(\{b_1 t\}) = e(b_1 t)$  и

$$I^* = \int_0^1 e(b_1 t - (l_2 - l_1)\{c_1 t\}\lambda) dt.$$

Разобьем интервал  $[0; 1)$  на интервалы  $[\frac{j}{c_1}, \frac{j+1}{c_1})$ ,  $0 \leq j < c_1$  и сделаем на каждом таком интервале замену переменной  $t = \frac{j+\delta}{c_1}$   $0 \leq \delta < 1$ . Тогда  $\{c_1 t\} = \{j + \delta\} = \delta$  и

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{1}{c_1} \sum_{j \bmod c_1} \int_0^1 e\left(\frac{b_1}{c_1}j + \frac{b_1}{c_1}\delta - (l_2 - l_1)\delta\lambda\right) d\delta = \\ &= \frac{I^{**}}{c_1} \sum_{j \bmod c_1} e\left(\frac{b_1}{c_1}j\right), \end{aligned}$$

где

$$I^{**} = \int_0^1 e\left(\frac{b_1}{c_1}\delta - (l_2 - l_1)\delta\lambda\right) d\delta. \tag{23}$$

Подставляя в (22) и учитывая, что  $c_1 d = c$ , находим

$$I = e(\tilde{l}\lambda)I^{**}\sigma(c), \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma(c) &= \frac{1}{c} \sum_{k \bmod d} e\left(\frac{k}{c}\right) \sum_{j \bmod c_1} e\left(\frac{b_1}{c_1}j\right) = \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k \bmod d} \sum_{j \bmod c_1} e\left(\frac{k}{c} + \frac{b_1}{c_1}j\right). \end{aligned}$$

Поскольку  $(b_1, c_1) = 1$ ,

$$\sigma(c) = \frac{1}{c} \sum_{k \bmod c} e\left(\frac{k}{c}\right) = \begin{cases} 1, & c = 1 \\ 0, & c \neq 1 \end{cases}.$$

Отсюда получаем, что при  $c \neq 1$  интеграл  $I = 0$  и, с учетом (16), второй случай теоремы 1 полностью доказан.

Остается рассмотреть случай когда  $h_L\lambda = a + b\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . В этом случае, из (23) и (24) получаем, что

$$\begin{aligned} I &= e(\tilde{l}\lambda) \int_0^1 e(b\delta - (l_2 - l_1)\delta\lambda)d\delta = e(\tilde{l}\lambda) \int_0^1 e(-\tilde{\lambda}\delta)d\delta = \\ &= e(\tilde{l}\lambda - \tilde{\lambda}/2) \frac{\sin \pi \tilde{\lambda}}{\pi \tilde{\lambda}}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (16) получаем третий случай теоремы 1.

## 6 Приложения к дифракции квазирешеток

Задача о вычислении асимптотики тригонометрической суммы  $f_n(\lambda)$  тесно связана с проблемой дифракции.

Величина

$$A(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(\lambda)|}{n} \quad (25)$$

называется амплитудой дифракционного спектра квазирешетки, соответствующей длине волны  $\lambda$ . Сам дифракционный спектр квазирешетки определяется как множество

$$\text{Spec}L = \{\lambda : A(\lambda) \neq 0\}. \quad (26)$$

Заметим, что в данном случае определение спектра квазирешетки основано на существовании пределов (25) при всех  $\lambda$ , вытекающем из теоремы 1. Определение спектра может быть перенесено на любые точечные системы, удовлетворяющее  $(r, R)$ -условию Делоне с использованием преобразования Фурье обобщенных функций. Детали можно найти например в работе [3]. Ранее дифракционный спектр был вычислен в случае так называемых model sets, то есть проекций решеток высшей размерности с дополнительным ограничением в виде попадания ортогональной проекции в некоторое окно [5]. Рассматриваемые нами квазирешетки  $L$  являются model sets только в исключительных случаях.

Понятие дифракционного спектра имеет и теоретико-числовой смысл. С учетом критерия Вейля легко заметить, что  $\frac{1}{N}\text{Spec}L$ ,  $N \in \mathbb{Z}$ ,  $N \neq 0$  это в точности множество тех  $\lambda$ , для которых последовательность вершин квазирешетки  $L$  не является равномерно распределенной по модулю  $\lambda$ .

Пусть

$$\text{Spec}_0 = \left\{ \frac{a + b\alpha}{h_L} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Из теоремы 1 немедленно получаем, что

$$A(\lambda) = \begin{cases} \left| \frac{\sin \pi \tilde{\lambda}}{\pi \tilde{\lambda}} \right|, & \lambda \in \text{Spec}_0 \\ 0, & \lambda \notin \text{Spec}_0 \end{cases}. \quad (27)$$

Пусть

$$\text{Spec}_1 = \{\lambda : \lambda \in \text{Spec}_0, \tilde{\lambda} \in \mathbb{Z}, \tilde{\lambda} \neq 0\},$$

$$\text{Spec}_2 = \{\lambda : \lambda \in \text{Spec}_0, \tilde{\lambda} = 0\}.$$

Тогда из (26) и (27) находим

$$\text{Spec}L = \text{Spec}_0 \setminus (\text{Spec}_1 \setminus \text{Spec}_2). \tag{28}$$

Вычислим  $\text{Spec}_1$ . Поскольку

$$\tilde{\lambda} = (l_2 - l_1)\lambda - b \in \mathbb{Z}, \tilde{\lambda} \neq 0$$

и

$$\lambda = \frac{a + b\alpha}{h_L}, a, b \in \mathbb{Z},$$

имеем

$$a + b\alpha \in \frac{h_L}{l_2 - l_1} \mathbb{Z}, a + b\alpha \neq 0.$$

Возможно 2 случая.

1)  $\frac{h_L}{l_2 - l_1} \notin \mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}$ . Тогда множество  $\text{Spec}_1$  пусто.

2)  $\frac{h_L}{l_2 - l_1} = \frac{A+B\alpha}{C}$ , где  $A, B, C$  – целые и  $(A, B, C) = 1$ . Тогда легко видеть, что

$$\text{Spec}_1 = \left\{ \frac{A + B\alpha}{h_L} m : m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}. \tag{29}$$

Отметим, что непустота множества  $\text{Spec}_1$  связана с хорошо известным в классической кристаллографии явлением систематического погасания пиков.

Перейдем к вычислению  $\text{Spec}_2$ . Легко проверить, что  $0 \in \text{Spec}_2$ . Ненулевые значения  $\text{Spec}_2$  могут принадлежать только при условии  $\frac{h_L}{l_2 - l_1} = \frac{A+B\alpha}{C}$ , где  $A, B, C$  – целые и  $(A, B, C) = 1$ . Тогда

$$\tilde{\lambda} = \frac{C}{A + B\alpha}(a + b\alpha) - b = 0.$$

Учитывая иррациональность  $\alpha$ , получаем систему

$$\begin{cases} aC - Ab = 0 \\ bC - bB = 0 \end{cases}, \tag{30}$$

которая должна иметь решение в целых  $a, b$ .

Вновь возможно 2 случая.

1)  $B \neq C$ . Тогда система (30) не имеет решений и  $\text{Spec}_2$  не содержит точек, отличных от точки 0.

2)  $B = C$ . Тогда система (30) допускает бесконечную серию решений  $a = Am, b = Bm, m \in \mathbb{Z}$  и  $\text{Spec}_2 = \text{Spec}_1 \cup \{0\}$ .

Поскольку

$$h_L = l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha,$$

находим

$$\frac{h_L}{l_2 - l_1} = \frac{l_1}{l_2 - l_1} + \alpha$$

и можно перейти от условий на  $\frac{h_L}{l_2 - l_1}$  к условиям на  $\frac{l_1}{l_2 - l_1}$ . Точнее, представление  $\frac{h_L}{l_2 - l_1} = \frac{A+B\alpha}{C}$  эквивалентно представлению  $\frac{h_L}{l_2 - l_1} = \frac{A'+B'\alpha}{C'}$  с  $A' = A$ ,  $B' = B + C$  и  $C' = C$ .

В результате получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть в квазирешетке  $L$  выражение  $\frac{l_1}{l_2 - l_1}$  непредставимо в виде  $\frac{A+B\alpha}{C}$ , где  $A, B, C$  — целые,  $B \neq 0$  и  $(A, B, C) = 1$ . Тогда

$$\text{Spec}L = \left\{ \frac{a + b\alpha}{h_L} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

В противном случае

$$\text{Spec}L = \left\{ \frac{a + b\alpha}{h_L} : a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (mA, m(B + C)), m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Drmota M., Tichy R. F. Sequences, discrepancies and applications. — Berlin: Springer. — 1997.
- [2] Janot C. Quasicrystals. Clarendon Press. Oxford. 1994.
- [3] Lagarias J., Mathematical quasicrystals and problem of diffraction // Directions in Mathematical Quasicrystals, Centre de Recherches Mathematiques, Monograph Series, vol. 13, 2000, 61 — 93.
- [4] Pinner C.G. On Sums of Fractional Parts  $\{n\alpha + \gamma\}$  // J.Number Theory. — 1997. — V. 65. — P. 48 — 73.
- [5] Schlottmann M., Cut-and-project sets in locally compact Abelian groups, Quasicrystals and Discrete Geometry, edited by J. Patera, Fields Institute Monographs, Vol. 10 (AMS, Providence, RI, 1998), 247 — 264.
- [6] Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. — 1910. — V. 30. — P. 377 — 407.
- [7] Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Серия физика-математика. - 2010. - Вып. 5(76). -С. 83-87.

- [8] Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. — 2009. — Т.52 — Вып.6 — С. 413 — 417.
- [9] Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Задача Хуа Ло-кена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. — 2009. — Т.52 — Вып.7 — С. 497 — 500.
- [10] Журавлев В. Г. Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к дофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. — 2007. — Т. 19. — Вып. 3. — С. 177 — 208.
- [11] Журавлев В. Г. Суммы квадратов над  $\circ$ -кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2006. — Т. 337. — С. 165 — 190.
- [12] Журавлев В. Г. Уравнение Пелля над  $\circ$ -кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2008. — Т. 350. — С. 139 — 159.
- [13] Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — Вып. 3. — С. 18 — 46.
- [14] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. — М.: Мир. — 1985.
- [15] Красильщиков В. В., Шутов А. В. Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. — 2007. — Вып. 7(57) — С. 84 — 91.
- [16] Красильщиков В. В., Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий // Известия вузов. Математика. — 2009, — № 7, — С. 3 — 9.
- [17] Красильщиков В. В., Шутов А. В. Распределение точек одномерных квазирешеток по переменному модулю // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 3. — С. 17 — 23.
- [18] Швагирева И. К. Бинарные аддитивные задачи над  $\circ$ -прогрессиями Фибоначчи. // Материалы VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тула, 11 — 16 мая 2010 года. Тула: ТГПУ. — 2010. — С. 198 — 200.
- [19] Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток // Чебышевский сборник. — 2010. — Т. 11, Вып. 1. — С. 255 — 262.

- [20] Шутлов А. В. Об аддитивных задачах с числами специального вида // Математика, информатика и методика их преподавания. Материалы Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ (Москва, 14 — 16 марта 2011 г.). М.: МПГУ, — 2011, — С. 102 — 104.

Владимирский Государственный Университет  
Получено 18.04.2012