Л. К. Филиппов, Стационарные режимы для диффузионного уравнения с нелинейным видом функции источника,
Докл. АН СССР, 1984, том 277, номер 2, 310–314

https://www.mathnet.ru/dan9557

Доклады Академии наук СССР
1984. Том 277, № 2

УДК 532.72 МЕХАНИКА

Л.К. ФИЛИППОВ

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ВИДОМ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА

(Представлено академиком П.Я. Кочиной 13 IV 1982)

С помощью диффузионного уравнения с нелинейным видом функции источника можно описывать волновые процессы для некоторых механических, биофизических, химических и т.п. систем [1–9]. Такие системы описываются следующим полулинейным уравнением с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+F(\theta),\quad x>0,\quad t>0; \tag{1}$$

$$\theta(0,t)=1,\quad t>0;\qquad \theta(x,0)=0,\ x>0,\ \frac{\partial\theta(\infty)}{\partial x}=0, \tag{2}$$

где $\theta(x, t)$ – искомая функция (концентрация, температура и т.д.), $F(\theta)$ – нелинейная функция источника, t, x – время и координата. В большинстве случаев [1–9], представляющих интерес для приложений, функции $\theta(x, t)$, $F(\theta)$ неотрицательные, т.е. $\theta \geqslant 0$, $F(\theta) \geqslant 0$. Если функция $F(\theta)$ удовлетворяет условиям

$$F(0)=F(1)=0,\quad F(\theta)\geqslant 0,\quad 0<\theta<1, \tag{3}$$

то уравнение (1) может допускать существование стационарного режима (режима стационарного фронта) типа бегущей волны, когда решение зависит только от одной независимой переменной [2–6, 8]

$$y=-x+mt, \tag{4}$$

где m – скорость бегущей волны, подлежащая определению.

Целью настоящей работы является нахождение нижней (m_*) и верхней (m^*) границ возможных значений скорости стационарного фронта для функций источника $F(\theta)$ произвольного вида, удовлетворяющих условиям (3). С учетом (4) уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{d^2\theta}{dy^2}-m\frac{d\theta}{dy}+F(\theta)=0,\quad \theta(+\infty)=1,\quad \theta(-\infty)=0,\quad \frac{d\theta(\pm\infty)}{dy}=0, \tag{5}$$

где m – собственное значение краевой задачи (5). Впервые уравнение (1), (2) подробно проанализировано в работе [2] для функций $F(\theta)$, удовлетворяющей условиям (3) и условиям

$$F'(0)=b>0,\quad F'(\theta)<b,\quad 0<\theta<1. \tag{6}$$

Графическая зависимость функции $F(\theta)$, удовлетворяющей условиям (3), (6), показана кривой *1* на рис. 1. Штриховая прямая соответствует наклону $F'(0)$. Для приложений [1–9] представляет интерес рассмотреть функции источника $F(\theta)$, удовлетворяющие условиям (3) и не удовлетворяющие условиям (6). В качестве примера на рис. 1 показаны такие функции в виде кривых *2–4*.

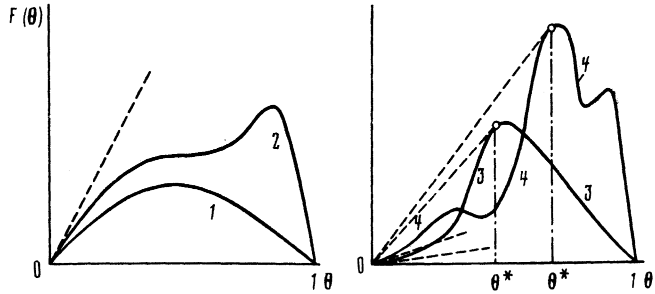

Рис. 1

Интересно также аналитическим способом найти оценки для нижней и верхней границы собственных значений m краевой задачи (5). Введем обозначение

$$p = \frac{d\theta}{dy}.$$

Тогда уравнение (5) запишем в виде

$$(7)\qquad p\frac{dp}{d\theta} = mp - F(\theta),\quad p(0) = p(1) = 0,\quad p(\theta) > 0,\quad 0 < \theta < 1.$$

Проинтегрируем уравнение (7) и при граничных условиях (7) получим

$$(8)\qquad m\int_0^1 p(\theta)\,d\theta = I,\qquad I = \int_0^1 F(\theta)\,d\theta.$$

С помощью уравнения (8) будем искать различные оценки нижней и верхней границы возможных значений скорости m, причем для этой цели будем использовать различные приближенные решения $p(\theta)$ уравнения (7). В качестве нулевого приближения из (7) запишем $p^{(0)}(\theta) = m\theta > p(\theta)$. Подставим это решение в уравнение (8):

$$(9)\qquad m > m^{(0)} = \sqrt{2I}.$$

В качестве первого приближения решения уравнения (7) запишем $p^{(1)}(\theta) = k\theta$, причем $p^{(0)}(\theta) > p^{(1)}(\theta) > p(\theta)$, так как из анализа решения уравнения (7) в окрестности точки $\theta = 0$ находим

$$(10)\qquad k = [m + (m^2 - 4b)^{1/2}]/2,\qquad b = \frac{dF(0)}{d\theta}.$$

Подставим решение $p^{(1)}(\theta)$ в уравнение (8) и с учетом (10) получим

$$(11)\qquad m > I\left(\int_0^1 p^{(1)}(\theta)\,d\theta\right)^{-1} = 4I\,[m + (m^2 - 4b)^{1/2}]^{-1}.$$

Используя обозначение

$$(12)\qquad m^2 = v^2 + 4b,$$

перепишем неравенство (11) в виде

$$(13)\qquad v(v^2 + 4b)^{1/2} > 4(I - b) - v^2 \geqslant 0.$$

Если $I > b$, то из предыдущего неравенства после преобразований имеем

$$(14)\qquad m^*_{(1)} > m > m^{(1)}_*,\quad m^*_{(1)} = (4I)^{1/2},\quad m^{(1)}_* = [2I(1 - b(2I)^{-1})^{-1}]^{1/2}.$$

Если $I < b$, то из неравенства (13) находим

(15) $m > m_*^0, \quad m_*^0 = 2\sqrt{b}.$

При $b \ll I$ из неравенства (14) следует, что

(16) $m_{(1)}^* = 2\sqrt{I} > m > m_*^{(1)} = \sqrt{2I}, \quad m_{(1)}^* / m_*^{(1)} - 1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41,$

т.е. погрешность расчета значений скорости m с помощью оценок (16) составляет не более 40%, а с помощью уравнения

(17) $m \simeq \sqrt{3I}, \quad b \ll I$

погрешность расчета значений скорости m не превышает 20%.

В качестве второго приближения $p^{(2)}(\theta)$ решения уравнения (7) запишем

$$p^{(2)}(\theta) = m\theta - \int_0^\theta \frac{F(x)}{p^{(1)}(x)}\, dx = m\theta - (k)^{-1} \int_0^\theta \frac{F(x)}{x}\, dx,$$

$$p^{(0)}(\theta) > p^{(1)}(\theta) > p^{(2)}(\theta) > p(\theta).$$

Подставим предыдущее решение в уравнение (8):

(18) $m > I\left(\int_0^1 p^{(1)}(\theta)\, d\theta \right)^{-1} = 2I\left(m - \frac{2B}{k} \right)^{-1}, \quad B = \int_0^1 \int_0^\theta \frac{F(x)}{x}\, dx\, d\theta.$

С учетом (10), (12) неравенство (18) перепишем следующим образом:

(19) $v(B/b)(v^2 + 4b)^{1/2} > 2I + 4B - 4b - v^2(1 - B/b) \geqslant 0.$

Если $I/2 + B > b > B$, то из неравенства (19) при обозначении (12) после преобразований найдем

(20) $m_{(2)}^* > m > m_*^{(2)}, \quad m_{(2)}^* = [2I/(1 - B/b)]^{1/2},$

$m_*^{(2)} = \{4b + 2[A_2 + (A_2^2 + bA_3)^{1/2}]/A_1\}^{1/2}, \quad A_1 = 2B - b,$

$A_2 = (I + 2B - 2b(B - b) - B^2, \quad A_3 = (I + 2B - 2b)^2 (2B - b),$

Если $b > B + I/2$, то из неравенства (19), учитывая (12), находим

(21) $m > m_*^0, \quad m_*^0 = 2\sqrt{b}.$

Выше показано, что при $b > B + I/2$ и при $b > I$ существует только нижняя граница. Поэтому рассмотрим метод нахождения верхней границы возможных значений скорости m. Из (7) запишем

(22) $m = \frac{dp(\theta)}{d\theta} + \frac{F(\theta)}{p(\theta)}.$

Пусть $p^0(\theta, m^0) = p(\theta, m) + \Delta p$, $m^0 = m + \Delta m$. Для Δp из (22) при $\Delta p \ll p$, $\Delta m \ll m$ запишем дифференциальное уравнение

$$\frac{d(\Delta p)}{d\theta} - F(\theta)\, [p(\theta)]^2\, \Delta p = \Delta m,$$

решение которого имеет вид

(23) $\Delta p = \exp[f(\theta)] \cdot \int \Delta m \cdot \exp[-f(\theta)]\, d\theta, \quad f(\theta) = \int F(\theta) [p(\theta)]^{-2}\, d\theta.$

Из (23) следует, что при $\Delta p > 0$ $(p^0 > p)$ величина $\Delta m > 0$. Тогда из (22) запишем неравенство

$$m = \frac{dp}{d\theta} + \frac{F(\theta)}{p} < \frac{dp^0}{d\theta} + \frac{F(\theta)}{p^0}.$$

Согласно (10) $p^0 = k\theta$ и предыдущее неравенство запишется следующим образом:

$$(24) \quad m < \frac{dp^0}{d\theta} + \frac{F(\theta)}{p^0} < \inf_k \left(k + \frac{a}{k}\right), \quad a = \sup_{0<\theta<1} \left[\frac{F(\theta)}{\theta}\right].$$

Отсюда находим выражение для верхней границы скорости:

$$(25) \quad m < m_0^* = \inf_k \left(k + \frac{a}{k}\right) = k_0 + \frac{a}{k_0} = 2\sqrt{a}, \quad k_0 = \sqrt{a}.$$

Для нахождения неизвестной величины a из второго уравнения (24) запишем следующее алгебраическое уравнение:

$$(26) \quad dF(\theta^*)/d\theta = F(\theta^*)/\theta^*, \quad a = F(\theta^*)/\theta^*,$$

из решения которого находим θ^*, а затем величину a.

Для функций источника различного вида $F(\theta)$, представленных на рис. 1 кривыми *3* и *4*, показан графический способ нахождения точек θ^*.

Проанализируем величину верхней границы скорости m_0^*. Функция источника

$$(27) \quad F(\theta) = \begin{cases} a\theta, & 0 \leqslant \theta < 1, \\ 0, & \theta = 1, \end{cases}$$

является мажорирующей для функции $F(\theta)$ в уравнении (1), так как $a\theta \geqslant F(\theta)$ для $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Согласно теореме 2, которая доказана в работе [2], решение $\theta_1(x, t)$ задачи (1), (2) при наличии функции источника (27) будет мажорирующим для решения $\theta(x, t)$ задачи (1), (2) при наличии функции источника $F(\theta)$, т.е. $\theta_1(x, t) \geqslant \theta(x, t)$. Поэтому скорость распространения стационарного фронта m при наличии функции источника $F(\theta)$ будет меньше минимальной скорости распространения стационарного фронта m краевой задачи (5) при наличии функции источника (27), т.е. $m < m_0^*$. С учетом обозначений (10) и последнего уравнения (25) запишем

$$k_0 = \{m_0^* + [(m_0^*)^2 - 4a]^{1/2}\}/2 = \sqrt{a}.$$

Отсюда находим $m_0^* = 2\sqrt{a}$, что согласуется с (25).

Обобщая предыдущие результаты, запишем оценки для верхней и нижней границы возможных значений скорости

$$(28) \quad m^* > m > m_*.$$

При $b > B + I/2$, $b > I$

$$m_* = m_*^0, \quad m^* = m_0^*,$$

при $I/2 + B > b > B$

$$m_* = m_*^{(2)}, \quad m^* = m_{(2)}^*,$$

при $I > b$

$$m_* = m_*^{(1)}, \quad m^* = m_{(1)}^*.$$

В качестве примера рассмотрим некоторые виды функций источников, представляющих интерес для приложений. В работе [2] для простейшей биологической модели рассмотрена функция источника вида

(29) $F(\theta) = \theta(1-\theta)$.

Для этой функции $a = b = 1$ и $m_*^0 = m_0^* = 2$. Аналогично можно показать, что для функции $F(\theta)$, показанной кривой 2 на рис. 1, скорость $m = 2\sqrt{a}$, так как $a = b$. Для более сложной биологической модели Фишера [6] функция источника имеет вид

(30) $F(\theta) = \theta(1-\theta)(1-\nu\theta), \quad \nu \geqslant -1,$

для которой после интегрирования найдем

(31) $b = 1, \quad I = (\nu+2)/12, \quad B = (\nu+4)/12, \quad m_*^0 = 2.$

Из решения алгебраического уравнения (26) находим

$$\theta^* = (\nu-1)(2\nu)^{-1}, \quad a = (1+\nu)^2(4\nu)^{-1},$$

поэтому из (25)

(32) $m_0^* = (1+\nu)/\sqrt{\nu}$.

Из предыдущего следует, что при $-1 \leqslant \nu \leqslant 1$ скорость стационарного фронта $m = 2$. Неравенство $b > B + I/2$ имеет место при $\nu < 14/3$. В частности, при $\nu = 3$ из (28) получим $2 < m < 2{,}31 = m_0^*$. Неравенство $I/2 + B > b > B$ имеет место при $14/3 < \nu < 8$. В частности, при $\nu = 6$ согласно (20) из (28) находим $2{,}33 < m < 2{,}83 < m_0^* = 2{,}85$. Неравенство $I > b$ справедливо при $\nu > 10$. В частности, при $\nu = 12$ согласно (14) из (28) получим $2{,}02 < m < 2{,}16 < m_0^* = 3{,}75$.

В качестве второго примера рассмотрим функцию источника для экзотермической химической реакции первого порядка, которую согласно [7, 9] запишем в виде

(33) $F(\theta) = (1-\theta)\left\{\exp\,[\alpha(\theta-1)] - \exp(-\alpha)\right\}, \quad \alpha > 1,$

где α – относительная энергия активации химической реакции. Для функции источника (33) после преобразований получим

(34) $b = \alpha\exp(-\alpha), \quad I = [1-(1+\alpha)\exp(-\alpha)]/\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\exp(-\alpha)$.

При $\alpha \geqslant 5$ из (34) следует, что $I > b$. Так как практический интерес в основном представляют большие значения энергий активации $(\alpha \gg 1)$, то из (14) находим, что при $\alpha = 5$ $m_{(1)}^* = m_*^{(1)} = m = 0{,}35$, а при $\alpha \geqslant 10$ $m_*^{(1)} = \sqrt{2}/\alpha < m < m_{(1)}^* = 2/\alpha < m_0^* \approx 1{,}2\alpha^{-1/2}$. Так как из алгебраического уравнения (26) при $\alpha \geqslant 10$ величина $\theta^* \approx 1 - 1/\alpha$, а верхняя граница скорости $m_0^* \simeq [4(\alpha e)^{-1}]^{1/2} \approx 1{,}2\alpha^{-1/2}$, из предыдущего следует, что отношение $m_0^*/m_{(1)}^* \approx 0{,}6\alpha^{1/2}$ возрастает с увеличением энергии активации α.

В заключение следует отметить, что с помощью полученных неравенств (28) можно найти нижнюю и верхнюю границы возможных значений скорости стационарного фронта для произвольного вида функций источника $F(\theta)$, удовлетворяющих условиям (3).

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности им. И.М. Губкина

Поступило
9 XI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* – УФН, 1974, т. 128, вып. 4. 2. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* – Бюл. МГУ. сер. А, 1937, № 6. 3. *Kean M.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1975, vol. 28, № 1. 4. *Stokes A.* – Math. Biosci., 1976, vol. 31, № 3/4. 5. *Sattinger D.* – J. Diff. Equat., 1977, vol. 25, № 1. 6. *Rothe F.* – Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1978, vol. A 80, № 3/4. 7. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 427 с. 8. *Канель Я.И.* – ДАН, 1963, т. 149, № 2. 9. *Зельдович Я.Б.* – ЖФХ, 1948, т. 22, № 1.