

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Е. А. Чиркова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
gloomson13@mail.ru

Исследуется одна из систем семейства, рассмотренного ранее в работах А. О. Ремизова. Для всех полей этого семейства начало координат является неизолированной особой точкой сложной природы (линейная часть поля в этой особой точке может иметь тип «нильпотентная жорданова клетка»). А. О. Ремизовым (с соавторами) было показано, что для векторных полей рассматриваемого вида имеется однопараметрическое семейство фазовых кривых, входящих в сложную особую точку; в некоторых случаях имеется также исключительная фазовая кривая с тем же свойством. В настоящей работе рассматривается одно из векторных полей семейства Ремизова, по-видимому, не исследованных ранее. Для этого поля получены результаты, аналогичные указанным выше.

Ключевые слова: неизолированная особая точка, вырожденная особая точка, разрешенные особенности.

Введение

В работах [1–3], связанных с вырождениями метрики, была поставлена задача качественного исследования семейства векторных полей с неизолированными особыми точками:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = py, \quad \dot{p} = M(x, y, p), \quad (1)$$

где M — кубический многочлен от p специального вида:

$$M = \alpha(x, y)(p^2 - x) - yp(\beta_1(x, y)p^2 + \beta_2(x, y)p + \beta_3(x, y)).$$

Авторов интересовал вопрос, как устроен фазовый портрет векторного поля (1) в окрестности точки $x = y = p = 0$. В этих работах рассматривался многочлен M , удовлетворяющий некоторым ограничениям типичности (в частности, предполагалось, что все функции α и β_i , $i = 1, 2, 3$, гладкие и ненулевые в окрестности нуля).

Особые точки системы (1) образуют кривую $y = 0$, $x = p^2$. При этом имеется очень сложная особая точка $x = y = p = 0$: все собственные значения линейной части поля в этой точке равны нулю. О таких особых точках известно очень мало, соответствующие им фазовые портреты выглядят сложно. Однако можно ставить частные вопросы о структуре фазового портрета. Например, существуют ли фазовые кривые, входящие в особую точку? Сколько их? Как они располагаются? Как выглядят их проекции на (x, y) -плоскость?

Ответы на эти частные вопросы в основном получены в работах [1–3]. А именно, там показано (и даже для многочленов M более общего вида), что имеется однопараметрическое семейство фазовых кривых, входящих в сложную особую точку.

В работе [3] установлено, что для многочленов M указанного вида, имеющих корни кратности 2, также имеется особая фазовая кривая, входящая в сложную особую точку (её проекция на (x, y) -плоскость имеет вид «полукубическая парабола»).

В данной работе предпринята попытка исследования одного из векторных полей этого семейства, не удовлетворяющего условиям, налагаемым в работах [1–3] ($\alpha = -1, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$).

1. Основной результат

Рассматривается система (1) с коэффициентами $\alpha = -1, \beta_i \equiv 0, i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = py, \\ \dot{p} = p^2 - x. \end{cases} \quad (2)$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для системы (2) существует однопараметрическое семейство фазовых кривых, входящих в особую точку $(0, 0, 0)$. Проекция кривых этого семейства на (x, y) -плоскость есть кривые типа «полукубическая парабола». Кроме того, имеется ещё одна фазовая кривая, входящая в ту же особую точку; её проекция вырождается в точку $x = y = 0$.*

Доказательство теоремы приведено в пунктах 2–6.

Замечание 1. Отметим, что полученный результат в основном согласуется с результатами из [3], полученными при ограничениях $\beta_i \neq 0$.

2. Выпрямление кривой особых точек. Диаграмма Ньютона. Частное решение

Система (2) имеет неизолированную особую точку $(0, 0, 0)$: все точки кривой $y = 0, x = p^2$ являются особыми. Заменой $(x, y, p) \mapsto (x - p^2, y, p)$, выпрямляющей кривую особых точек, сведём систему (2) к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2px, \\ \dot{y} = py, \\ \dot{p} = -x. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) выглядит достаточно просто, и можно попробовать найти её частные решения. Для этого построим её диаграмму Ньютона [4; 5]. Видим, что её многогранник Ньютона — треугольник с вершинами $Q_1 = (-1, 1, 0)$, $Q_2 = (0, 0, 1)$, $Q_3 = (1, 0, -1)$. Эти три точки лежат в плоскости $2x + 3y + z = 1$; нормалью к этой плоскости является вектор $\bar{n} = (2, 3, 1)$. В соответствии с [4] решения системы (3), входящие в особую точку, должны иметь вид

$$x = \alpha\tau^2 + \dots, \quad y = \beta\tau^3 + \dots, \quad p = \gamma\tau \quad (\tau \rightarrow 0).$$

Подставляя эти выражение в (3), найдём $\alpha = -3, \beta = 12$ и $\gamma = 3$. Чудесным образом кривая, заданная главными членами асимптотики, даёт точное решение системы:

$$\begin{cases} x = -p^2/3, \\ y = 4p^3/9. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что проекция этой кривой на (x, y) -плоскость есть полукубическая парабола (это и будет «центральная» парабола семейства из теоремы 1).

3. Разрешение особенности. Фактор-система

С учётом найденного ранее частного решения перспективным выглядит разрешение особенности, заданное преобразованием вида

$$(x, y, p) \mapsto (u = xp^{-2}, v = yp^{-3}, p)$$

(оно выпрямляет найденное частное решение (4)). В координатах (u, v, p) система (3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = v + 2u + 2u^2, \\ \dot{v} = v + 3uv, \\ \dot{p} = -up. \end{cases} \quad (5)$$

Поскольку первые два уравнения не зависят от p , рассмотрим фактор-систему на (u, v) -плоскости:

$$\begin{cases} \dot{u} = v + 2u + 2u^2, \\ \dot{v} = v + 3uv. \end{cases} \quad (6)$$

Эта система имеет три особые точки: $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1/3, 4/9)$. В ходе доказательства теоремы нам понадобится полное исследование только двух особых точек: $(-1, 0)$ и $(-1/3, 4/9)$. Обозначим через A $(0, 0, 0)$, B $(-1, 0, 0)$, C $(-1/3, 4/9, 0)$ особые точки системы (5).

4. Анализ локального поведения системы в окрестности особых точек

4.1. Окрестность точки В

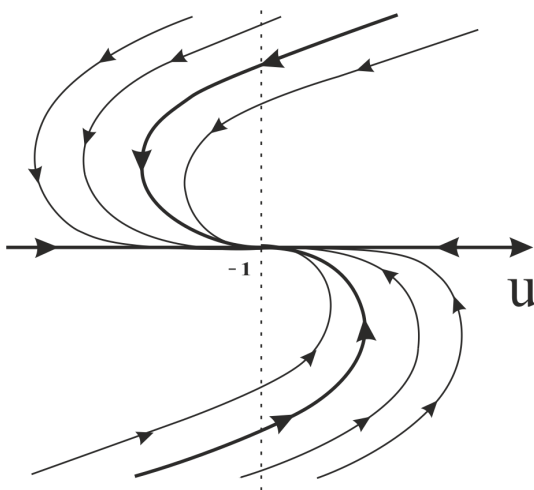


Рис. 1. Схематическое изображение фазового портрета фактор-системы в окрестности особой точки $(-1, 0)$ (устойчивый вырожденный узел)

Рассмотрим особую точку $(-1, 0)$ фактор-системы. Матрица линейной части системы (6) в этой особой точке имеет вид $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ и является жордановой клеткой с собственным значением $\lambda_1 = -2$ и с собственным вектором $e_1 = (1, 0)$. Фазовый портрет фактор-системы — устойчивый вырожденный узел (рис. 1).

Рассмотрим точку B $(-1, 0, 0)$ исходной системы (5), соответствующую точке $(-1, 0)$ фактор-системы (6). (Собственное значение $\lambda_3 = 1$). Поскольку два собственных значения отрицательны, а одно положительно, фазовый портрет является седлом с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым подмногообразиями [6]. Двумерное устойчивое инвариантное подмногообразие совпадает с плоскостью $\{p = 0\}$. Одномерное неустойчивое подмногообразие задаётся условием $\{u = -1, v = 0\}$. Следовательно, в окрестности точки B нет фазовых кривых, входящих в плоскость $\{p = 0\}$, кроме сепаратрисы $\{u = -1, v = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

4.2. Окрестность точки С

Рассмотрим особую точку $(-1/3, 4/9)$. Собственные значения матрицы линейной части: $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$; собственные векторы: $e_{1,2} = (1, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3})$. Точка является седловой (рис. 2).

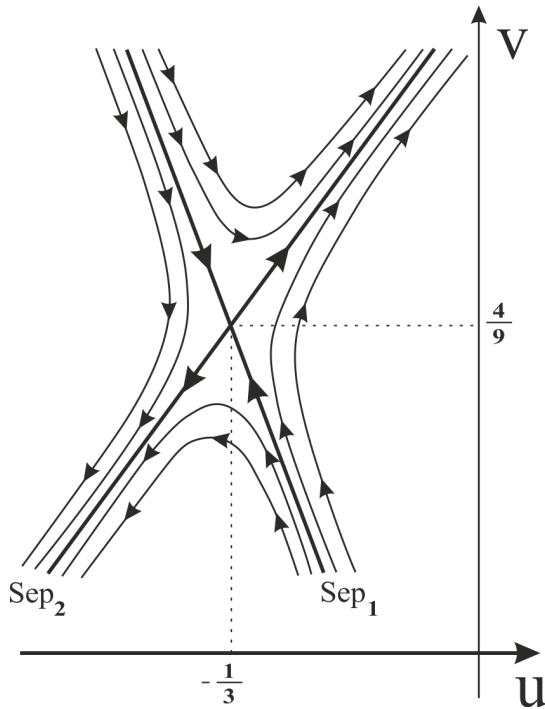


Рис. 2. Схематическое изображение фазового портрета фактор-системы в окрестности особой точки $(-1/3, 4/9)$ (седло)

Рассмотрим точку $C (-1/3, 4/9, 0)$ исходной системы (5), соответствующую точке $(-1/3, 4/9)$ фактор-системы (6). (Собственное значение $\lambda_3 = 1/3$). Поскольку два собственных значения положительны, а одно отрицательно, фазовый портрет является седлом с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым подмногообразиями [6]. Фазовый портрет сужения системы на плоскость $\{p = 0\}$ — седло. В двумерном неустойчивом подмногообразии — узел (неустойчивый). В устойчиво-неустойчивом двумерном подмногообразии, соответствующем собственным значениям λ_2 и λ_3 , — седло. В окрестности особой точки $(-1/3, 4/9, 0)$ есть три сепаратрисы. Две находятся на инвариантном подмногообразии $\{p = 0\}$, одна из которых устойчивая (Sep_1), вторая — неустойчивая (Sep_2) (рис. 2). Эти сепаратрисы входят в особую точку (все остальные фазовые кривые — типа «гипербола»). Третья сепаратриса задается уравнением $\{u = -1/3, v = 4/9\}$, она является неустойчивой. В итоге в особую точку «входят» две сепаратрисы, находящиеся на инвариантном подмногообразии $\{p = 0\}$, сепаратриса, заданная уравнением $\{u = -1/3, v = 4/9\}$, и все кривые из двумерного неустойчивого подмногообразия.

ёты уравнением $\{u = -1/3, v = 4/9\}$, она является неустойчивой. В итоге в особую точку «входят» две сепаратрисы, находящиеся на инвариантном подмногообразии $\{p = 0\}$, сепаратриса, заданная уравнением $\{u = -1/3, v = 4/9\}$, и все кривые из двумерного неустойчивого подмногообразия.

5. Фазовые портреты в цилиндрах

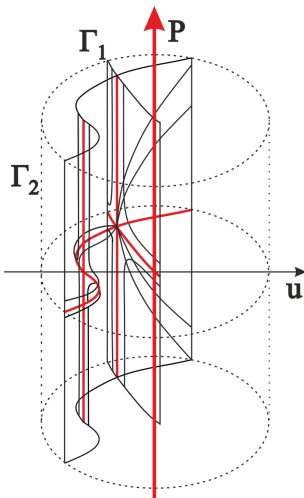


Рис. 3. Фазовые кривые в цилиндрах Γ_1 и Γ_2

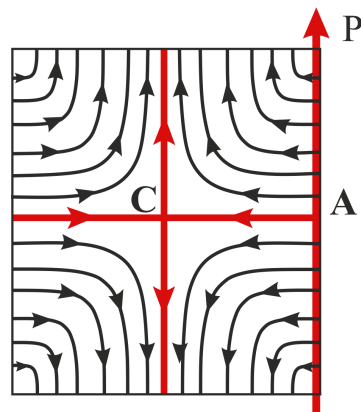


Рис. 4. Развёртка цилиндра Γ_1

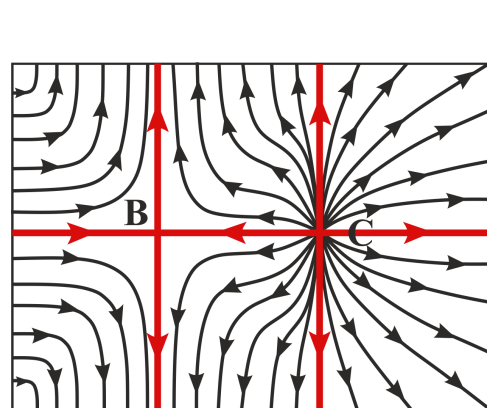


Рис. 5. Развёртка цилиндра Γ_2

В соответствии с полученными данными рассмотрим два цилиндра Γ_1 и Γ_2 , которые являются надстройками над сепаратрисами седла (особой точки $(-1/3, 4/9)$) (рис. 3). Развёртки цилиндров Γ_1 и Γ_2 изображены на рис. 4, 5.

6. Заключение

Вспомним зависимость координат раздутия: $(x, y, p) = (up^2, vp^3, p)$. При возврате в исходные координаты (x, y, p) плоскость $\{p = 0\}$ переходит в особую точку $(0, 0, 0)$ (данный процесс возврата в дальнейшем будем называть «схлопыванием»), и все кривые, проходящие через данную плоскость, теперь будут «втыкаться» в особую точку $(0, 0, 0)$. В частности, на цилиндре Γ_2 имеется особая точка C . Для сужения системы на данный цилиндр эта особая точка является узлом. Соответственно для сужения системы на цилиндр Γ_1 точка C является седлом. Это означает, что имеется две сепаратрисы, одна из которых при «схлопывании» плоскости $\{p = 0\}$ переходит в точку $(0, 0, 0)$, а другая (она принадлежит обоим цилиндрам) переходит в «центральную» кривую конструируемого семейства (её проекция на (x, y) -плоскость имеет тип «полукубическая парабола»). Фазовые кривые узла (в цилиндре Γ_2) схлопываются в семейство кривых, входящих в особую точку A и касающихся «центральной» кривой. Искомое семейство построено.

На цилиндре Γ_2 лежит ещё одна особая точка системы — точка B . Для сужения системы на цилиндр эта точка является седлом: имеется две сепаратрисы, одна из которых при «схлопывании» плоскости $\{p = 0\}$ переходит в точку $(0, 0, 0)$, а другая ($u = -1, v = 0$) переходит в кривую, втыкающуюся в точку $(0, 0, 0)$. Эта кривая задаётся уравнениями $x = -p^2, y = 0$, она касается кривой особых точек системы (3). Для системы (2) эта кривая и будет особой фазовой кривой, входящей в особую точку $(0, 0, 0)$ и проектирующейся в точку. Все утверждения теоремы доказаны.

Автор выражает благодарность профессору С. М. Воронину за постановку задачи и ценные советы.

Список литературы

1. **Ремизов, А. О.** Геодезические на двумерных поверхностях с псевдоримановой метрикой: особенности смены сигнатуры / А. О. Ремизов // Мат. сб. — 2009. — Т. 200, № 3. — С. 75–94.
2. **Павлова, Н. Г.** Геодезические на гиперповерхностях в пространстве Минковского: особенности смены сигнатуры / Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов // Успехи мат. наук. — 2011. — Т. 66, № 6. — С. 193–194.
3. **Павлова, Н. Г.** Полная классификация типичных особенностей геодезических потоков на 2-поверхностях с псевдоримановыми метриками / Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов // Успехи мат. наук. — 2017. — Т. 72, № 3. — С. 195–196.
4. **Брюно, А. Д.** Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. — М.: Наука, 1979. — 254 с.
5. **Брюно, А. Д.** Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А. Д. Брюно. — М.: Физматлит, 1998. — 144 с.
6. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. — М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004. — 416 с.

Поступила в редакцию 20.06.2018

После переработки 03.08.2018

Сведения об авторе

Чиркова Елена Анатольевна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: gloomson13@mail.ru.

INVESTIGATION OF A 3D SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NON-ISOLATED SINGULAR POINTS

E. A. Chirkova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
gloomson13@mail.ru

A system of the family, considered in the papers of A.O. Remizov, is investigated. For all the fields of the family, the origin is a non-isolated singular point of a complicated nature (the linear part of the field at the singular point can have the type "nilpotent Jordan cell"). It was shown by A.O. Remizov (with coauthors) that for the considered vector fields there exists one-parametric family of the phase curves entering into the singular point; for a certain case there is also one additional phase curve with the same property. In the present paper we consider one of the vector fields of the Remizov family, apparently not studied previously. For this vector field analogous results to the pointed above are obtained.

Keywords: *nonisolated singular point, degenerated singular point, blow-up.*

References

1. **Remizov A.O.** Geodesics on 2-surfaces with pseudo-Riemannian metric: singularities of changes of signature. *Sbornik: Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 3, pp. 385–403.
2. **Pavlova N.G., Remizov A.O.** Geodesics on hypersurfaces in Minkowski space: singularities of signature change. *Russian Mathematical Surveys*, 2011, vol. 66, no. 6, pp. 1201–1203.
3. **Pavlova N.G., Remizov A.O.** A complete classification of generic singularities of geodesic flows on 2-surfaces with pseudo-Riemannian metrics. *Russian Mathematical Surveys*, 2017, vol. 72, no. 3, pp. 577–579.
4. **Bruno A.D.** *Lokal'nyy metod nelineynogo analiza differentsial'nykh uravneniy* [Local method of nonlinear analysis for differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 254 p. (In Russ.).
5. **Bruno A.D.** *Stepennaya geometriya v algebraicheskikh i differentsial'nykh uravneniyakh* [Power geometry in algebraic and differential equations]. Moscow, Fizmathlit Publ., 1998. 144 p. (In Russ.).
6. **Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.** *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*. Part 1. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Scientific Publ., 1998. 1113 p.

Accepted article received 20.06.2018

Corrections received 03.08.2018