В. Н. Чубариков, Об одной аддитивной задаче с числами, не содержащими степеней, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, номер 1, 29–37

Теорема 8. *Пусть* $(X, \mathcal{T})$ — *линделефово* Σ-*пространство и* $\mathcal{T}'$ — *такая топология на* X, *что* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathrm{Tan}$. *Тогда* $nw(X, \mathcal{T})\leqslant hl((X, \mathcal{T}')^2)$.

Теорема 9. *Если* X — *компакт, то* $w(X)=w_t(X)$.

Теорема 10. *Если совершенно нормальный компакт* X *тангенциально метризуем, то* $w(X)\leqslant\omega$.

Предложение 10. *Пусть* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathcal{F}_{(t,c)}$. *Тогда* $l(X, \mathcal{T})\leqslant hl(X, \mathcal{T}')$ *и* $l(X, \mathcal{T}')\leqslant hl(X, \mathcal{T})$.

Теорема 11. *Пусть* $(X, \mathcal{T}')$ — *несчетное наследственно линделефово пространство,* $\mathcal{T}$ — *регулярная топология на* X *и* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathrm{Tan}$. *Найдется тогда несчетное множество* $Y\subset X$, *такое, что* $\mathcal{T}|Y\subset\mathcal{T}'|Y$. *Если, кроме того, и топология* $\mathcal{T}'$ *регулярна, то* $Y\subset X$ *можно выбрать так, что* $\mathcal{T}|Y=\mathcal{T}'|Y$.

Следствие 7. Пусть $hl(X, \mathcal{T}')\leqslant\omega$ и $hd(X, \mathcal{T}')\leqslant\omega$ — регулярная топология на X и $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathrm{Tan}$. Тогда $hd(X, \mathcal{T})\leqslant\omega$ и $(hl(X, \mathcal{T})\leqslant\omega)$.

Теорема 12. *Пусть* $(X, \mathcal{T}')$ — *регулярное наследственно линделефово пространство мощности* 2^ω, $\mathcal{T}$ — *регулярная топология на* X *и* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathrm{Tan}$. *Тогда найдется множество* $Y\subset X$, *такое, что* $|Y|=2^\omega$ *и* $\mathcal{T}|Y=\mathcal{T}'|Y$.

Предложение 11. *Пусть* $(X, \mathcal{T})$ — *пространство Фреше—Урысона и* $\mathcal{T}'$ — *экстремально несвязная топология на* X. *Тогда* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathrm{Tan}$ *в том и только том случае, если* $(X, \mathcal{T})$ *разрежено.*

Предложение 12. *Пусть* $(X, \mathcal{T})$ — *регулярное локально компактное пространство,* $\mathcal{T}'$ — *нульмерная топология на* X *и* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathcal{F}_0$. *Тогда* $(X, \mathcal{T})$ *нульмерно.*

Теорема 13. *Существует наследственно линделефово тихоновское пространство* $(X, \mathcal{T})$, *такое, что если* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')\in\mathrm{Tan}$, *то* $\mathcal{T}'$ *не нульмерна.*

Предложение 13. *Пусть* X — *любое пространство, точка* x_0 *не изолирована в* X *и* $\psi(x_0, X)=\chi(x_0, X)$. *Тогда* $x_0\in[X\setminus\{x_0\}]_{ch}$.

Теорема 14. *Пусть* X — *пространство точечно счетного типа и* $\psi_t(X)\leqslant\omega$. *Тогда* X *псевдорадиально.*

Следствие 8. Каждое тангенциально метризуемое пространство точечно счетного типа псевдорадиально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты//Успехи матем. наук. 1978. **33**, № 6. 29—84.
2. Архангельский А. В. Пространства функций в топологии поточечной сходимости//Успехи матем. наук. 1984. **39**, № 5. 11—50.

Поступила в редакцию
26.06.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 1

УДК 511

В. Н. Чубариков

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С ЧИСЛАМИ, НЕ СОДЕРЖАЩИМИ СТЕПЕНЕЙ

В настоящей работе продолжены исследования по методу тригонометрических сумм И. М. Виноградова (см. [1]): изучается поведение тригонометрических сумм, распространенных на натуральные числа, не делящиеся на l-ю степень целого числа; для каждой такой суммы получена либо асимптотическая формула, либо оценка сверху ее модуля (теорема 1). Этот результат позволил вывести асимптотическую формулу для количества решений системы уравнений Гильберта—Камке в числах, не делящихся на l-ю степень целого числа (теорема 2). В теореме 3 мы находим арифметические условия разрешимости этой системы уравнений.

Отметим, что новейшие исследования по проблеме Гильберта—Камке о базисных свойствах последовательности целочисленных векторов $(x, x^2, \ldots, x^n)$ и разнообразным родственным к ней проблемам были стимулированы работой Г. И. Архипова ([2], см. также учебник А. А. Карацубы [3, гл. XI, задачи 8 и 9]). По известной схеме (см. [2, 4]) можно доказать, что последовательность векторов $(x, x^2, \ldots, x^n)$, где x — целое число, не делящееся на l-ю степень, является базисом порядка 2^n в пространстве целочисленных векторов размерности n, удовлетворяющих найденным выше арифметическим условиям. Пусть l, $n\geqslant 2$, P — натуральные числа; A — точка в n-мерном пространстве, $A=(\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n))$, Ω — единичный n-мерный куб,

$$-(\tau(t))^{-1}\leqslant\alpha(t)<1-(\tau(t))^{-1}, \quad \tau(t)=P^{t-\frac{1}{6}}, \quad t=1, 2, \ldots, n.$$

Через $S=S(A)$ обозначим тригонометрическую сумму вида

$$S=\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)=\alpha(1)x+\alpha(2)x^2+\ldots+\alpha(n)x^n$.

Разобьем все точки куба Ω на два класса. К первому классу Ω_1 отнесем точки A, координаты $\alpha(t)$ которых можно представить в виде

$$\alpha(t)=\frac{a(t)}{q(t)}+\beta(t), \quad (a(t), q(t))=1, \quad 0\leqslant a(t)<q(t),$$

$$\delta=\max_{1\leqslant t\leqslant n} P^t|\beta(t)|\leqslant P^{0,1}, \quad t=1, \ldots, n,$$

причем наименьшее общее кратное Q чисел $q(1), \ldots, q(n)$ не превосходит $P^{0,1}$. Остальные точки куба Ω отнесем ко второму классу Ω_2.

Лемма 1. *Пусть $A\in\Omega_1$. Тогда имеет место оценка*

$$|S(A)|\ll PQ^{-\frac{1}{n}+\varepsilon},$$

если, кроме того, положить

$$\delta(t)=P^t\beta(t), \quad \delta=\max_{1\leqslant t\leqslant n}|\delta(t)|,$$

то при $\delta>1$ справедлива оценка

$$|S(A)|\ll P(Q\delta)^{-\frac{1}{n}+\varepsilon},$$

постоянные в знаках $\ll$ зависят только от n и ε. Пусть $A\in\Omega_2$. Тогда

$$|S(A)|\ll P^{1-\rho_1}, \quad \rho_1=\frac{c_1}{n^2\log n}, \quad c_1>0,$$

постоянная в знаке $\ll$ зависит только от n.

Доказательство см. в [5, гл. VII].

Обозначим далее через $S_q(A)$ тригонометрическую сумму вида

$$S_q(A) = \sum_{\substack{x \leqslant P \\ x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)}} e^{2\pi i f(x)}.$$

Лемма 2. *Пусть q удовлетворяет неравенству $q^n \leqslant P^{0,05}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $A \in \Omega_2$, то*

$$|S_q(A)| \ll P^{1-0,5\rho_1} q^{-1}, \quad \rho_1 = \frac{c_1}{n^2 \log n}.$$

2. *Если $A \in \Omega_1$, $\delta \leqslant P^{0,04}$ и $Q \leqslant P^{0,07}$, то*

а) $|S_q(A)| \ll Pq^{-1} Q_1^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}$,

б) *при* $\delta > 1$

$$|S_q(A)| \ll Pq^{-1} (Q_1 \delta)^{-\frac{1}{n}+\varepsilon},$$

где $Q_1 = Q/(Q, q^n)$.

3. *Для оставшихся точек $A \in \Omega_1$ имеет место оценка пункта* 1.

Доказательство см. в [5, гл. VII].

Рассмотрим новое разбиение точек куба Ω на точки первого класса Ω_1' и точки второго класса Ω_2'. К первому классу Ω_1' отнесем точки с условием $\delta \leqslant P^{0,04}$ и $Q \leqslant P^{0,07}$. Остальные точки куба Ω отнесем ко второму классу Ω_2'.

Теорема 1. *Пусть $A \in \Omega_2'$, тогда*

$$|S(A;\, l)| = \Bigl| \sum_{m \leqslant P} \mu_l(m) e^{2\pi i f(m)} \Bigr| \ll P^{1-0,5\rho_1},$$

где

$$\mu_l(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ не делится на } l\text{-ю степень целого числа}, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

величина ρ_1 определена в лемме 1 и постоянная в знаке $\ll$ зависит только от n.

Пусть $A \in \Omega_1'$, тогда справедлива формула

$$S(A;\, l) = PQ^{-1} I \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^l} \sum_{z=1}^{Q} e^{2\pi i g(zd^l)} + O(P^{1/l} Q),$$

где $g(z) = \sum_{s=1}^{n} \frac{a(s)}{q(s)} z^s$, $I = \int_0^1 e^{2\pi i h(u)}\, du$, $h(u) = \sum_{s=1}^{n} \delta_s u^s$.

Доказательство. Поскольку $\mu_l(m) = \sum_{d^l | m} \mu(d)$, то

$$S = S(A;\, l) = \sum_{m \leqslant P} \mu_l(m) e^{2\pi i f(m)} = \sum_{d \leqslant P^{1/l}} \mu(d) \sum_{\substack{m \leqslant P \\ m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, d^l)}} e^{2\pi i f(m)}.$$

Положим $K=P^{1/(20\,ln)}$. Тогда имеем $S=W_1+W_2$, где

$$W_1=\sum_{d\leqslant K}\mu(d)\sum_{m\leqslant P/d^l}e^{2\pi i f(md^l)},$$

$$W_2=\sum_{K<d\leqslant P^{1/l}}\mu(d)\sum_{m\leqslant P/d^l}e^{2\pi i f(md^l)}.$$

Оценив тривиально каждое слагаемое в сумме W_2, получим

$$|W_2|\leqslant\sum_{d>K}Pd^{-l}\leqslant PK^{-l+1}\leqslant P^{1-\frac{1}{40n}}.$$

Поскольку $d^{ln}\leqslant K^{ln}=P^{0,05}$, то для оценки внутренней суммы

$$W_1(d)=\sum_{m\leqslant P/d^l}e^{2\pi i f(md^l)}$$

применима лемма 2. Если $A\in\Omega_2'$, то

$$|W_1(d)|\ll P^{1-0,5\rho_1}d^{-l}$$

(лемма 2, п. 1 и п. 3).

Следовательно,

$$|W_1|\ll\sum_{d\leqslant K}P^{1-0,5\rho_1}d^{-l}\ll P^{1-0,5\rho_1}.$$

Пусть $A\in\Omega_1'$, тогда, подставляя m в виде

$$m=Qy+z,\ 1\leqslant z\leqslant Q,\ -zQ^{-1}<y\leqslant(Pd^{-l}-z)\,Q^{-1},$$

получим

$$W_1(d)=\sum_{z=1}^{Q}\sum_{y}e^{2\pi i f((Qy+z)d^l)}=\sum_{z=1}^{Q}e^{2\pi i g(zd^l)}\sum_{y}e^{2\pi i h_1((Qy+z)d^l)},$$

где

$$g(u)=\sum_{s=1}^{n}\frac{a(s)}{q(s)}u^s,\quad h_1(u)=\sum_{s=1}^{n}\beta(s)\,u^s.$$

Поскольку

$$\left|\frac{d}{dy}h_1((Qy+z)\,d^l)\right|=\left|\sum_{s=1}^{n}sQ\beta(s)\,(Qy+z)^{s-1}d^{ls}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}sQ|\beta(s)|\,P^{s-1}d^l\leqslant Qd^lP^{-1+0,04}\frac{n(n+1)}{2}\leqslant$$

$$\leqslant n^2P^{-1+0,11+1/(20n)}\leqslant n^2P^{-0,5}\leqslant 0,5,$$

то по лемме ван дер Корпута имеем

$$\sum_y e^{2\pi i h_1((Qy+z)d^l)} = \int\limits_{-zQ^{-1}}^{(Pd^{-l}-z)Q^{-1}} e^{2\pi i h_1((Qy+z)d^l)} dy + O(1) =$$

$$= PQ^{-1}d^{-l}I + O(1), \quad I = \int\limits_0^2 e^{2\pi i h(u)}\, du,$$

где $h(u) = \delta_1 u + \ldots + \delta_n u^n$, $\delta_s = \beta(s) P^s$. Отсюда получим

$$S = PQ^{-1}I \sum_{d \leqslant P^{1/l}} \frac{\mu(d)}{d^l} \sum_{z=1}^{Q} e^{2\pi i g(zd^l)} + O(P^{1/l}Q) = PQ^{-1}IR(Q) + O(P^{1/l}Q),$$

$$R(Q) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^l} \sum_{z=1}^{Q} e^{2\pi i g(zd^l)}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что имеет место равенство

$$R(Q) = \zeta^{-1}(l) \prod_{p|Q} S(g(z), p^\alpha)(1-p^{-l})^{-1},$$

где

$$Q = \prod_{p|Q} p^\alpha, \quad S_1(g(z), p^\alpha) = \sum_{\substack{z=1 \\ p^l \nmid z}}^{p^\alpha} e^{2\pi i g(z)}.$$

Теорема 2. *Пусть $I(N_n, \ldots, N_1)$ обозначает число решений системы уравнений*

$$\begin{cases} v_1 + \ldots + v_k = N_1, \\ v_1^2 + \ldots + v_k^2 = N_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_1^n + \ldots + v_k^n = N_n, \end{cases}$$

где неизвестные $v_1 > 0$, $v_k > 0$ пробегают значения чисел, не делящихся на l-ю степень целого числа. Тогда при $k \geqslant [2n^2(2\log n + \log\log n + 5)]$ для числа решений $I(N_n, \ldots, N_1)$ справедлива асимптотическая формула

$$I(N_n, \ldots, N_1) = \zeta^{-k}(l)\, \gamma\sigma P^{k-0,5n(n+1)} + O(P^{k-0,5n(n+1)-c/\log n}),$$

где $P = N_n^{1/n}$, $c > 0$ — некоторая постоянная, σ и γ — особый ряд и особый интеграл рассматриваемой проблемы:

$$\gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_0^1 \exp 2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)\, dx \right)^k \times$$

$$\times \exp\left(-2\pi i \left(\frac{N_n}{P^n}\alpha_n + \ldots + \frac{N_1}{P}\alpha_1\right)\right) d\alpha_n \ldots d\alpha_1,$$

$$\sigma=\prod_p \sigma_p, \quad \sigma_p=1+\sum_{\alpha=1}^{+\infty}{}' \sum_{\substack{q_n=1 \\ [q_n,\ldots,q_1]=p^\alpha}}^{p^\alpha}{}' \ldots \sum_{q_1=1}^{p^\alpha} A(q_n, \ldots, q_1),$$

$$A(q_n, \ldots, q_1)=\sum_{0\leqslant a_n<q_n}{}' \ldots \sum_{0\leqslant a_1<q_1}{}' T^k \times$$

$$\times \exp\left(-2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}N_n+\ldots+\frac{a_1}{q_1}N_1\right)\right),$$

$$T=T(a,q)=(p^\alpha-p^{\alpha-l})^{-1}\sum_{\substack{x=1 \\ p^l\nmid x}}^{p^\alpha}\exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}x^n+\ldots+\frac{a_1}{q_1}x\right)\right).$$

Доказательство. Очевидно, имеем

$$I=I(N_n, \ldots, N_1)=\int_\Omega S^k(A;l)\exp(-2\pi i A\times N)\,dA,$$

где

$$N=(N_n, \ldots, N_1), \quad A\times N=\alpha_n N_n+\ldots+\alpha_1 N_1,$$

$$S(A;l)=\sum_{m\leqslant P}\mu_l(m)\,e^{2\pi i f(m)}.$$

Согласно разбиению точек куба Ω на два класса Ω_1' и Ω_2' получим

$$I=I_1+I_2, \quad I_1=\int_{\Omega_1'}, \quad I_2=\int_{\Omega_2'}.$$

Сначала оценим сверху I_2. Представим k в виде $k=2n^2+k_1$, тогда по теореме 4 [1]

$$|I_2|\leqslant\max_{A\in\Omega_2'}|S(A;l)|^{2n^2}\int_\Omega|S(A;l)|^{k_1}dA\ll P^{k-0,5n(n+1)-c/\log n}.$$

Найдем асимптотическую формулу для интеграла I_1:

$$I_1=\sum_{Q\leqslant P^{0,07}}\sum_{\substack{q_n \\ [q_n,\ldots,q_1]=Q}}\cdots\sum_{q_1}\sum_{a_n=1}^{q_n}{}'\cdots\sum_{a_1=1}^{q_1}{}' I_3,$$

$$I_3=\int_{-\Delta_n}^{\Delta_n}\ldots\int_{-\Delta_1}^{\Delta_1}S^k(A;l)\exp(-2\pi i A\times N)\,dA,$$

$$\Delta_n=P^{-n+0,04}, \ldots, \Delta_1=P^{-1+0,04}.$$

Из теоремы 1 имеем

$$I_3=P^{k-0,5n(n+1)}Q^{-k}R^k(Q)\exp\left(-2\pi i\sum_{s=1}^n\frac{a_s}{q_s}N_s\right)\times$$

$$\times \int\limits_{-P^{0,04}}^{P^{0,04}} \cdots \int\limits_{-P^{0,04}}^{P^{0,04}} \left(\int\limits_0^1 \exp\left(2\pi i \sum_{s=1}^{n} \delta_s x^s\right) dx\right)^k \times$$

$$\times \exp\left(-2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{\delta_s}{P^s} N_s\right) d\delta_n, \ \ldots, \ d\delta_1 + R,$$

$$|R| \ll P^{k-0,5n(n+1)-c_1}, \quad c_1 > 0.$$

Отсюда получим

$$I_1 = \zeta^{-k}(l)\,\sigma\gamma P^{k-0,5n(n+1)} + O\left(P^{k-0,5n(n+1)-c/\log n}\right).$$

Теорема доказана.

Докажем теперь теорему об арифметических условиях разрешимости системы уравнений Гильберта — Камке в числах, не делящихся на l-ю степень целого числа. Заметим, что если $W_l(p^\alpha;\ k)$ — число решений системы сравнений

$$x_1^s + \ldots + x_k^s \equiv N_s \pmod{p^\alpha}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n, \tag{1}$$

$$1 \leqslant x_\nu \leqslant p^\alpha, \ p^l \nmid x_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant k,$$

то

$$\sigma_p = \lim_{\alpha \to +\infty} p^{\alpha n}(p^\alpha - p^{\alpha-l})^{-k} W_l(p^\alpha, k).$$

Следовательно, если $\sigma_p > 0$, то необходимо, чтобы система (1) была разрешима.

Представим натуральное число n в виде

$$n = p^l - 2 + m(p-1) + r, \quad 0 \leqslant r < p-1.$$

Рассмотрим систему сравнений

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ p^l \nmid x}}^{s} c_\nu \cdot \nu^t \equiv N_t \pmod{p^\alpha}, \quad 0 \leqslant t \leqslant n, \tag{2}$$

где неизвестные c_ν принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^α, $s = n + m + 1$.

Теорема 3. *Из разрешимости системы сравнений* (1) *следует разрешимость системы* (2), *и наоборот, из разрешимости* (2) *следует, что существует* k, $k \equiv N_0 \pmod{p^\alpha}$, *при котором* (1) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть разрешима система (2). Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant c_\nu < p^\alpha$, $p^l \nmid \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant s$. Полагая

$$k \equiv N_0 \equiv \sum_{\substack{\nu=1 \\ p^l \nmid \nu}}^{s} c_\nu \pmod{p^\alpha},$$

получим, что система (1) разрешима. Выведем теперь из разрешимости (1), что система (2) имеет решение. Для этого достаточно доказать, что при $p^l \nmid y$ имеет решение следующая система сравнений:

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ p^l\nmid \nu}}^{s} K_\nu\cdot \nu^t\equiv y^t \pmod{p^\alpha},\quad 0\leqslant t\leqslant n.$$

Действительно,

$$K_\nu\equiv\Bigl(\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu\\ p^l\nmid\mu}}^{s}(y-\mu)\Bigr)\Bigl(\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu\\ p^l\nmid\mu}}^{s}(\nu-\mu)\Bigr)^{-1}\pmod{p^\alpha}$$

при условии, что показатель, с которым p входит в K_ν, будет неотрицательным. Пусть $p^\beta \| y$, $p^\gamma \| \nu$, $p^{\delta_p(a)} \| a$. Покажем, что $\delta_p(K_\nu)\geqslant 0$.

Возможны два случая: а) $\gamma\geqslant\beta$, б) $\gamma<\beta$. Рассмотрим случай а). Очевидно,

$$\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu\\ p^l\nmid r}}^{s}(y-r)\Bigr)=\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu}}^{s}(y-r)\Bigr)-\beta\left[\frac{s}{p^l}\right]=A.$$

Поскольку

$$\left|\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu}}^{s}(y-r)\Bigr)\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu}}^{s}(\nu-r)\Bigr)^{-1}\right|=\binom{y}{\nu}\binom{y-\nu-1}{s-\nu},$$

то будем иметь

$$A\geqslant\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu}}^{s}(\nu-r)\Bigr)-\gamma\left[\frac{s}{p^l}\right]=\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu\\ p^l\nmid r}}^{s}(\nu-r)\Bigr).$$

Следовательно, в случае а) получим $\delta_p(K_\nu)\geqslant 0$. Пусть выполняются условия случая б): $y=p^\beta y_1$, $\nu=p^\gamma \nu_1$. Тогда справедливы неравенства

$$\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu\\ p^l\nmid r}}^{s}(p^\beta y_1-r)\Bigr)\geqslant\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu\\ p^l\nmid r}}^{s}(p^{\beta-1} y_1-r)\Bigr)\geqslant\ldots$$

$$\ldots\geqslant\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu\\ p^l\nmid r}}^{s}(p^\gamma y_1-r)\Bigr)\geqslant\delta_p\Bigl(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu\\ p^l\nmid r}}^{s}(p^\gamma \nu_1-r)\Bigr),$$

из которых имеем $\delta_p(K_\nu)\geqslant 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М., 1980.
2. Архипов Г. И. О проблеме Гильберта—Камке//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1984. 48, № 1. 3—52.
3. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М., 1983.

4. Чубариков В. Н. Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел//Докл. АН СССР. 1986. **286**, № 4. 828—831.
5. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М., 1987.

Поступила в редакцию
26.06.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 1

УДК 513.83

М. О. Окроян

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ СПЕКТРЫ ПАРАКОМПАКТНОГО G-ПРОСТРАНСТВА

Мы придерживаемся терминологии и обозначений работ [1—3]. Всюду предполагается, что G — произвольная топологическая группа. На случай паракомпактного пространства X, на котором непрерывно действует группа G, распространяется одна из известных теорем В. И. Пономарева о гомеоморфизме X верхнему пределу обратной системы (проекционного спектра) из T_0-пространств, являющихся нервами локально конечных замкнутых разбиений данного пространства (см. [2]).

Пусть $\mathcal{F}=\{F^\mu=[U^\mu]\}_{\mu\in\mathfrak{M}}$ — некоторое разбиение G-пространства X. Для каждого $g\in G$ определен класс множеств $\mathcal{F}^g=\{gF^\mu\}_{\mu\in\mathfrak{M}}$, который является разбиением X. Для паракомпактных хаусдорфовых пространств верно утверждение из [2] о том, что система всех разбиений конфинально измельчается, т. е. в любое открытое покрытие паракомпакта можно вписать некоторое разбиение и совокупность всех разбиений паракомпакта направлена (по включению). Пусть $\mathcal{H}=\{\mathcal{F}_\alpha;\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ — какое-нибудь направленное, конфинально измельчающееся множество разбиений G-пространства X. Нервы $K_\alpha(g)$ покрытий $\mathcal{F}_\alpha{}^g$, $g\in G$, образуют комплексы, состоящие из обыкновенных конечномерных симплексов. Вершине $\delta_\alpha^{\lambda(g)}$ комплекса $K_\alpha(g)$ соответствует множество $gF_\alpha^{\lambda(g)}\in\mathcal{F}^g_\alpha$, где $\lambda(g)\in\mathfrak{M}$. Множество $\delta_\alpha^{\lambda^0(g)},\ldots,\delta_\alpha^{\lambda^p(g)}$ есть остов симплекса

$$\Delta_\alpha^g\in K_\alpha(g),\ \text{если}\ gF_\alpha^{\lambda^0(g)}\cap\ldots\cap gF_\alpha^{\lambda^{p}(g)}\neq\varnothing.$$

Определение 1. Элемент $\Delta_\alpha=\{\Delta_\alpha^g;\ g\in G\}$ прямого произведения $\Pi\{K_\alpha(g);\ g\in G\}$ называем эквивариантным симплексом, если

$$\bigcap_{g\in G}(gF_\alpha^{\lambda^0(g)}\cap\ldots\cap gF_\alpha^{\lambda^{p}(g)})\neq\varnothing,$$

где $gF_\alpha^{\lambda^0(g)},\ldots,gF_\alpha^{\lambda^p(g)}$ соответствуют вершинам $\delta_\alpha^{\lambda^0(g)},\ldots,\delta_\alpha^{\lambda^p(g)}$ симплекса $\Delta_\alpha^g\in K_\alpha(g)$ ($\lambda^0(g),\ldots,\lambda^p(g)$ различны, количество вершин $(p+1)$ тоже зависит от g).

Определение 2. Эквивариантным комплексом K_α назовем совокупность всех эквивариантных симплексов.

Определим действие группы G на $\Pi\{K_\alpha(g);\ g\in G\}$ следующим образом:

$$(g_0,\ \Delta_\alpha)=(g_0,\ \{\Delta_\alpha^g;\ g\in G\})=\{\bar{\Delta}_\alpha^g;\ g\in G\},$$