



Общероссийский математический портал

Г. А. Тарнавский, Ударно-волновые режимы течения на входе в диффузор гиперзвукового прямого воздушного реактивного двигателя: влияние высоты и скорости полета, *ТВТ*, 2005, том 43, выпуск 1, 57–70

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

16 марта 2025 г., 22:33:26



ТЕПЛОМАССОБМЕН И ФИЗИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА

УДК 518.5:533.6

УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ НА ВХОДЕ В ДИФFUЗОР ГИПЕРЗВУКОВОГО ПРЯМОТОЧНОГО ВОЗДУШНО-РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ: ВЛИЯНИЕ ВЫСОТЫ И СКОРОСТИ ПОЛЕТА

© 2005 г. Г. А. Тарнавский

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию 11.11.2003 г.

На основе аналитических методов проведено исследование ударно-волновых структур с различным типом взаимодействия (маховского или регулярного) скачков уплотнения, возникающих в гиперзвуковых потоках. Для учета реальных свойств атмосферы применялась методология эффективного показателя адиабаты. Создан комплекс компьютерных программ, обеспечивающий определение топологии ударно-волновых картин и расчет газо- и термодинамических параметров в различных зонах течения между фронтами скачков в диапазоне высот от 0 до 100 км и скоростей полета от 2 до 7 км/с. Получены границы перехода “маховское/регулярное” отражение и определены области двойного решения, когда возможны оба типа взаимодействия.

ВВЕДЕНИЕ

Для высокоскоростных летательных аппаратов подача окислителя (воздуха) в тракт гиперзвукового прямооточного воздушно-реактивного двигателя (ГПВРД) с предварительным сжатием фактически полностью определяется скоростью полета и геометрией диффузора, на входе в который реализуется система косых скачков уплотнения, детерминирующих структуру газового потока в тракте. Развитие методов математического моделирования, обусловленное высокими качествами современной вычислительной техники, сделало возможным исследование пространственных высокоскоростных течений газа с образованием сложных ударно-волновых структур в потоке. При этом весьма важным становится изучение проблем неединственности и гистерезиса получаемых численных решений, анализа их адекватности реальным физическим процессам и возникающим режимам течения, а также исследование таких режимов при различных высотах и скоростях полета и прогнозирование последствий их возникновения. Основной целью настоящей работы является исследование взаимодействия ударных волн (например, в воздухозаборниках и соплах двигателей гиперзвуковых летательных аппаратов) при таких режимах полета, когда имеет место дуализм решения, т.е. возможность существования (при одних и тех же определяющих параметрах задачи) отражения двух различных типов: регулярного или маховского (парадокс Неймана).

Проведенные к настоящему времени исследования регулярного (РО) и маховского (МО) отражения ударных волн (УВ) позволяют сделать не-

которые выводы об областях их существования, в том числе и об областях существования двойного решения, т.е. наличия ряда поддиапазонов изменения определяющих параметров процесса, таких, как число Маха набегающего потока, угол отклонения потока и т.п., при которых возможно образование устойчивых картин как РО, так и МО. Схематическое изображение этих двух ударно-волновых структур, возникающих при отражении УВ в установившихся течениях, представлено на рис. 1.

Картина РО (рис. 1а), образовавшаяся при натекании сверхзвукового потока с числом Маха M_0 на два клина с углами β_1 и β_2 , включает соответственно два косых скачка уплотнения (СУ) i_1 и i_2 , сформированных вблизи поверхности клиньев и падающих внутрь области течения с углами наклона φ_1 и φ_2 (здесь и далее углы определяются по отношению к направлению вектора набегающего потока), и двух отраженных СУ r_1 и r_2 с углами наклона φ_3 и φ_4 . Эти СУ пересекаются в точке R . Спутная струя S с углом наклона δ образуется при прохождении потока через систему скачков с углами отклонения потока θ_1 , θ_2 , θ_3 и θ_4 на скачках i_1 , i_2 , r_1 и r_2 соответственно. Для стационарной картины выполняются соотношения

$$\theta_1 = \beta_1, \quad \theta_2 = \beta_2, \quad \theta_1 - \theta_3 = \theta_2 - \theta_4 = \delta.$$

Для симметричного ($\beta_1 = \beta_2$) отражения, безусловно, $\delta = 0$.

При возникновении волновой структуры с МО (рис. 1б) в дополнение к падающим и отраженным СУ i_1 , i_2 , r_1 и r_2 появляется центральный ска-

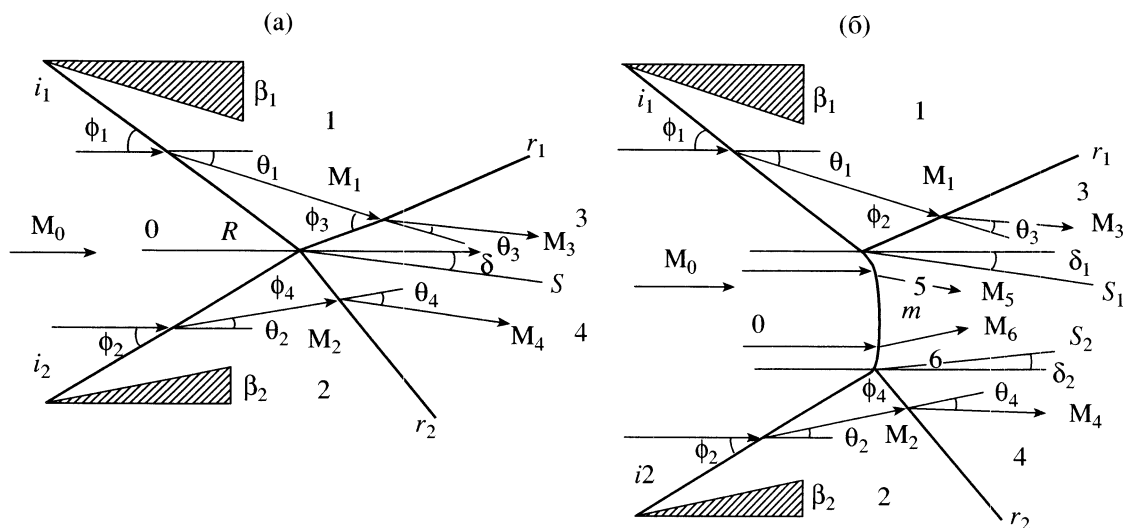


Рис. 1. Картины ударно-волновых структур при взаимодействии скачков уплотнения: регулярное (а) и маховское (б) отражения.

чок m , криволинейный фронт которого соединяет две тройные точки пересечения скачков (i_1, r_1, m) и (i_2, r_2, m), а также возникают две спутные струи S_1 и S_2 с углами наклона δ_1 и δ_2 . Для стационарной картины выполняются соотношения

$$\theta_1 = \beta_1, \quad \theta_2 = \beta_2, \quad \theta_1 - \theta_3 = \delta_1, \quad \theta_2 - \theta_4 = \delta_2.$$

В случае симметрии ($\beta_1 = \beta_2$), очевидно, $\theta_1 = \theta_2$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Вся область течения разделяется на ряд зон (см. рис. 1), в каждой из которых течение (в идеализированной постановке – однородное) имеет собственные характеристики. Зона 0 – область невозмущенного течения, ограничена слева любой линией, помещенной в область набегающего сверхзвукового потока (например, прямой линией, соединяющей вершины клиньев), а справа – фронтами СУ i_1 и i_2 (и дополнительно фронтом СУ m для МО). Зона 1 – область течения, развернутого (по часовой стрелке) на СУ i_1 вдоль поверхности верхнего клина, ограничена фронтами СУ i_1 и r_1 соответственно слева и справа. Аналогично зона 2 – область течения, развернутого (против часовой стрелки) на СУ i_2 вдоль поверхности нижнего клина, ограничена фронтами СУ i_2 и r_2 слева и справа соответственно. Зона 3 – сектор течения, развернутого (против часовой стрелки) на СУ r_1 , ограничена его фронтом и поверхностью контактного разрыва, который является границей спутной струи S (для МО – S_1). Зона 4 – сектор течения, развернутого (по часовой стрелке) на СУ r_2 , ограничена его фронтом и поверхностью контактного разрыва, который также является границей спутной струи S (для МО – S_2). В случае РО зоны 3 и 4 имеют общую границу (непосред-

венно смыкаются), а в случае МО между ними расположены зоны 5 и 6, являющиеся областями течения за фронтом СУ m .

Переходы между этими двумя типами отражения определяются критерием отделения и критерием Неймана. Оба эти критерия (точки бифуркации) разграничивают три области, в которых возможно существование: в первой – только МО, во второй – и МО, и РО, в третьей – только РО. Процесс перехода этих типов отражения одного в другой при вариации параметров, определяющих физику задачи, например скорости и высоты полета, может сопровождаться явлением гистерезиса (см. также [1], где показано, что тип отражения скачков в недорасширенной струе зависит от предистории течения).

Вследствие большого теоретического и практического интереса к данной проблеме в настоящее время проводится многостороннее изучение всех ее аспектов в аналитических, вычислительных и экспериментальных работах, дать подробный обзор которых здесь представляется невозможным. Так, в [2] динамика отражения косой УВ от оси симметрии связывается с сингулярностью Гудерлея. В [3] при моделировании дифракции слабых скачков рассматривается четырехволновая структура и делается вывод, что парадокс Неймана обусловлен исключительно недостаточно разрешающей способностью экспериментальных измерений и численных алгоритмов. В [4] в задаче об отражении слабых УВ на основании некоторого анализа констатируется, что за точкой встречи падающего и отраженного маховского СУ обнаружен “очень малый участок сверхзвукового течения разрежения”. В [5] утверждается принципиальная нестационарность процесса отражения Неймана при натекании УВ на клин с образова-

ем тройной конфигурации. Другой круг работ исследует проблему неединственности “маховского и регулярного отражения” на основе комплексного экспериментального и компьютерного моделирования, в том числе с применением схем [6, 7] высокого разрешения (повышенного порядка точности), а в [8] при этом учитывается турбулентность. При исследовании в [9] дифракции сильной УВ на поверхностях с углами наклона, немного меньшими критических, обнаружено, что возникновение маховского отражения задерживается и имеет место режим “предвестника” регулярного отражения (что, вообще говоря, противоречит теории Неймана для совершенного газа). Весьма интересным представляется изучение возможности организации перехода одного типа отражения в другой при воздействии на набегающий поток [10–12].

Как правило, исследование волновых структур двух типов (РО и МО) проводится в предположении неизменности физических свойств газового потока при прохождении через всю систему УВ, т.е. используется модель идеального политропного газа с постоянным значением показателя адиабаты (политропы) γ во всей области течения. Однако реальные процессы (см. [13, 14]), изучение которых связано с интенсификацией разработки гиперзвуковых летательных аппаратов, настоятельно требуют расширения этой физической модели. Поскольку задача, схематически изображенная на рис. 1, моделирует течение на входе в воздухозаборник ГПВРД, то уровень знания режимов этого течения, предсказание переходов от РО к МО и обратно, а также ответ на вопрос, какой из двух типов ударно-волновых структур реализуется в области неединственности решения и какие факторы влияют на это, весьма важны при создании системы управления режимом горения топлива для устойчивого функционирования двигательной установки в целом.

Иллюстрацией необходимости учета изменения термодинамических свойств газа в гиперзвуковых потоках с зонами высоких p и T является рис. 2, на котором приведена зависимость отношения теплоемкостей c_p/c_v для воздуха (классический показатель адиабаты $\gamma = c_p/c_v$) от температуры в параметрическом виде, где параметр – давление с фиксированными значениями для каждой кривой. Данные взяты из таблиц [15, 16]. “Волнообразное” поведение кривых связано с такими последовательно протекающими при увеличении T физическими процессами, как возбуждение колебательных степеней свободы молекул кислорода и их диссоциация, возбуждение колебаний в молекулах азота и их диссоциация, возбуждение электронных оболочек атомов и их ионизация.

В настоящей работе для исследования газо- и термодинамики физического процесса используется метод “эффективного показателя адиабаты”

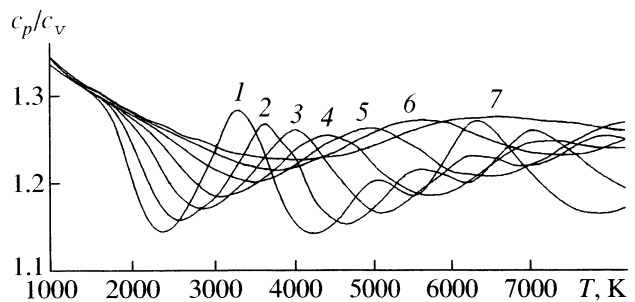


Рис. 2. Зависимость отношения c_p/c_v (для воздуха) от температуры при вариации давления: 1 – 0.001, 2 – 0.01, 3 – 0.1, 4 – 1, 5 – 10, 6 – 100, 7 – 1000 атм.

(см. [17–19]), позволяющий моделировать течение газа с учетом его реальных свойств при помощи вариации показателя адиабаты $\gamma(p, T)$, изменяющегося во всем поле течения в зависимости от локальных значений давления p и температуры T . При этом используется физико-математическая модель УВ с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка уплотнения, который предполагается бесконечно тонким разрывом. Основные газо- и термодинамические соотношения на разрыве, анализ области применимости модели и ее сравнение с моделью неизменности свойств газовой среды при переходе через СУ представлены в [20].

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Для анализа волновых структур, возникающих при взаимодействии падающих УВ i_1 и i_2 , которые определяет образование отраженных УВ r_1 и r_2 различных типов (РО и МО), весьма удобно использовать технику ударных поляр. Заметим, что эта техника широко применяется при решении задач классической аэродинамики (в предположении неизменности свойств газовой среды), но некоторые ее аспекты имеют свои особенности в случае скачкообразного изменения этих свойств на УВ (см. [21]). В результате применения техники ударных поляр сложный математический метод совместного решения нескольких нелинейных алгебраических уравнений (их число определяется количеством взаимодействующих УВ), связывающих значения параметров перед и за фронтом каждого СУ с необходимостью селекции решений (вследствие их неединственности), можно заменить наглядным графическим способом получения решения. Данный способ делает сам процесс получения решений и их анализ существенно более ясными и логичными, и выбор необходимого решения в случае их неединственности вызывает значительно меньше затруднений.

Под полярой ударной волны, или просто ударной полярой, понимается соотношение, связыва-

ющее угол отклонения потока θ и отношение давлений $\xi = p_+/p_-$, где p_+ – давление за, а p_- – перед фронтом СУ, при параметрической зависимости от числа Маха M_- и эффективных показателей адиабаты γ_+ и γ_- :

$$f(\theta, \xi, M_-, \gamma_-, \gamma_+) = 0. \quad (1)$$

График зависимости (1) в плоскости $(x, y) = (\theta, \xi)$ представляет собой замкнутую кривую, которую, собственно, и называют ударной полярой (в дальнейшем – УП). Она ограничена значениями $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, $\xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}$ и зеркально симметрична относительно прямой $\theta_s = 0.5 (\theta_{\min} + \theta_{\max})$. Конкретный вид (1) и подробный анализ УП при вариации γ_+ , γ_- и M_- приведены в [20, 21].

В классической модели неизменности свойств газа ударно-волновые структуры рассматриваемой задачи (рис. 1) определяются следующими параметрами:

$$F = (\beta_1, \beta_2, M_0, \gamma). \quad (2)$$

Однако для высокоскоростных течений газа необходимо применять физически более реальную модель, учитывающую изменение свойств газовой среды при прохождении потока через фронты СУ. В этом случае число параметров в (2) увеличивается:

$$F = (\beta_1, \beta_2, M_0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4), \quad (3)$$

где γ_i с $i \in [0, 4]$ – показатели адиабаты в различных зонах течения, разделенных фронтами СУ (см. рис. 1).

Заметим, что поляры, связывающие значения γ до и после прохождения потока через УВ, представляют два случая: уменьшение или рост γ . Согласно физике процесса первый реализуется чаще: за скачком возбуждаются дополнительные степени свободы (например, колебательные) молекул газа, и значение γ уменьшается (убывающие участки кривых на рис. 2). Второй случай представляет собой область параметров перед и за фронтом скачка, располагающихся на возрастающих участках кривых рис. 2, например, в диапазоне температур от 2400 до 3300 К для давления 10^{-3} атм или от 3100 до 4200 К для давления 1 атм. На этих участках доминирующим является не процесс возбуждения колебательных степеней свободы молекул, а их диссоциация, вызывающая рост γ . Подробное описание модели эффективно-го показателя адиабаты, область ее применимости, газодинамические соотношения, отличие от классической модели приведены в [18–20], а влияние γ_i на вид УП исследовано в [21].

В прикладных задачах аэродинамики о движении какого-либо объекта в земной атмосфере (в рассматриваемой работе – задача о течении в воздухозаборнике ГПВРД), как правило, задаются

следующие основные параметры: геометрия входа (углы β_1 и β_2 на рис. 1), высота H и скорость V полета. При этом как в области возмущенного течения, так и в зоне набегающего невозмущенного потока не известны ни значение числа Маха M_0 , ни значения эффективного показателя адиабаты, определяющие всю ударно-волновую картину. В некотором смысле это является положительным моментом, поскольку список определяющих параметров (3) не только существенно уменьшается:

$$F = (\beta_1, \beta_2, H, V), \quad (4)$$

но и его компоненты имеют более “прозрачный”, не допускающий неоднозначной трактовки смысл, так как задаются геометрические углы, отклоняющие поток, а также высота и скорость полета гиперзвукового летательного аппарата. При вариации значений параметров (4) возможно образование различных типов ударно-волновых структур. Весьма удобным для анализа является выделение из (4) одного из параметров, например, β_2 , который выбирается для исследования как “опорный”. В пространстве допустимых значений β_2 существуют две особые точки

$$\beta_2^* = \beta_2^*(\beta_1, H, V), \quad \beta_2^{**} = \beta_2^{**}(\beta_1, H, V), \quad (5)$$

называемые соответственно нижней и верхней (поскольку $\beta_2^* < \beta_2^{**}$) точками бифуркации решения и определяющие следующие диапазоны ударно-волновых структур:

если $\beta_2 < \beta_2^*$, то возможно только РО,

если $\beta_2^* \leq \beta_2 \leq \beta_2^{**}$, то возможно и РО, и МО, (6)

если $\beta_2 > \beta_2^{**}$, то возможно только МО.

Даже не зная численных значений β_2^* и β_2^{**} , по графикам ударных поляр (см., например, рис. 3) можно установить, какая из ударно-волновых структур (6) реализуется при определенном наборе параметров (4). Выпишем эти условия, аналогичные (6), в той же последовательности, но иной формулировке.

– Если поляры r_1 и r_2 пересекаются внутри

поляры i_1 , то МО невозможно.

– Если поляры r_1 и r_2 пересекаются вне поляры i_1 , то возможно и РО и МО. (7)

– Если поляры r_1 и r_2 не пересекаются, то РО невозможно.

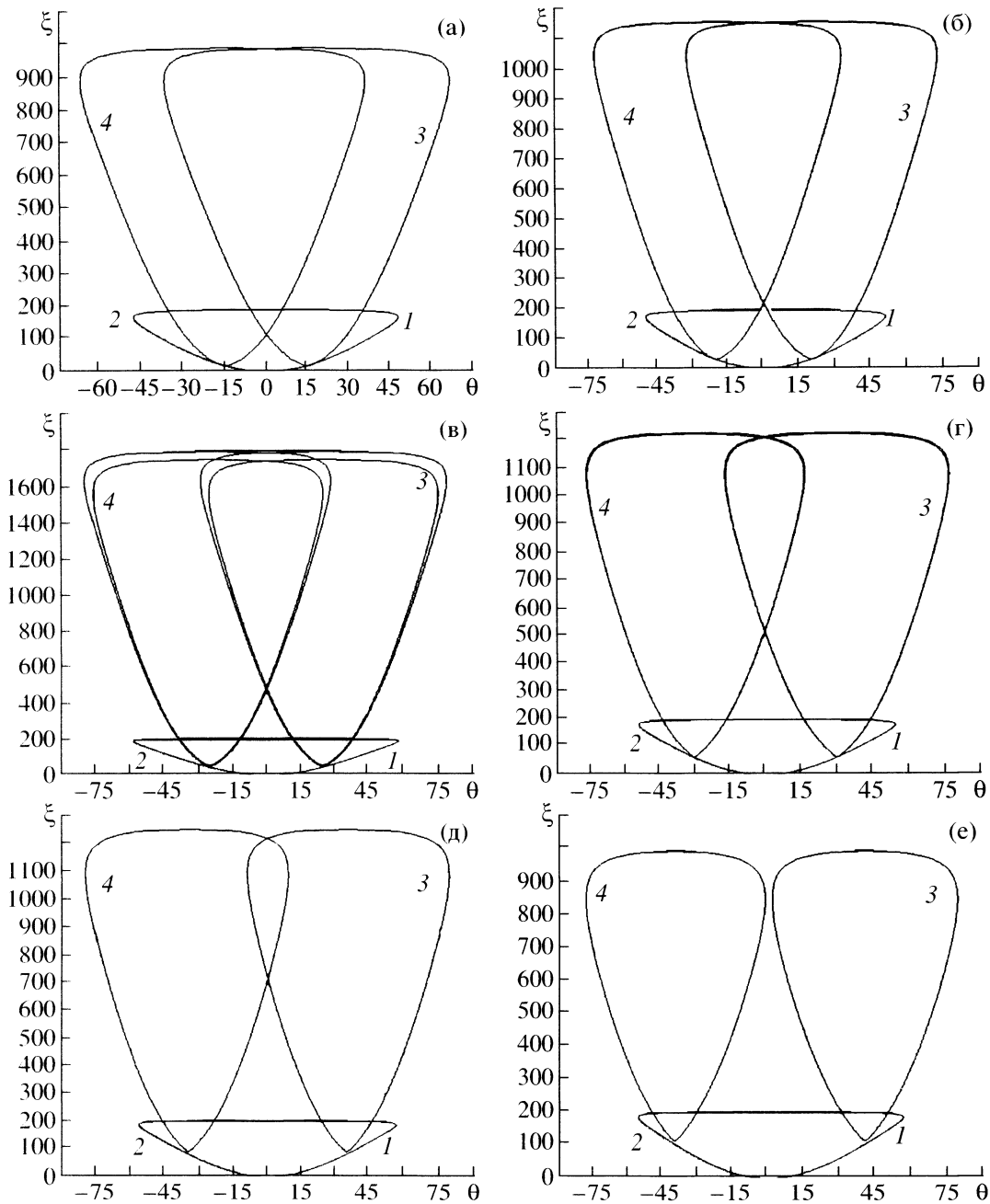


Рис. 3. Поляры двух падающих (1 – i_1 , 2 – i_2) и двух отраженных (3 – r_1 , 4 – r_2) ударных волн при фиксированных значениях $H = 40$ км, $V = 4$ км/с и вариации $\beta_1 = \beta_2 = 15$ (а), 20 (б), 25 (в), 30 (г), 35 (д), 40° (е).

Вообще говоря, не только для β_2 , но и для каждого из параметров (4) можно ввести понятие нижней и верхней точки бифуркации

$$\begin{aligned} f_k^* &= f_k^*(f_1, \dots, f_{k-1}), \\ f_k^{**} &= f_k^{**}(f_1, \dots, f_{k-1}), \end{aligned} \tag{8}$$

где $k = 1, 2, 3, 4$, а вектор $\mathbf{f} = (\beta_1, \beta_2, H, V)$ состоит из четырех компонент, которые для унификации записи (8) можно располагать в любой последовательности.

В общем виде точки бифуркации есть некоторые трехмерные гиперповерхности в четырехмерном пространстве (4):

$$f^*(\beta_1, \beta_2, H, V) = 0, \quad f^{**}(\beta_1, \beta_2, H, V) = 0. \tag{9}$$

Формы записи (5), (8) и (9), естественно, эквивалентны, и для каждой конкретной задачи может быть использован их наиболее подходящий вид.

Заметим, что помимо определения границ режимов техника ударных поляр позволяет получить численные характеристики течений (рис. 1а, 1б), та-

кие как относительное и абсолютное значения давления и углов отклонения потока на фронтах всех СУ, по которым затем можно определить остальные газодинамические параметры и углы наклона ударных волн во всей области течения.

Рассмотрим последовательно влияние главных параметров (углов входа, высоты и скорости полета) на газодинамику течения в диффузоре с учетом реальных физических свойств воздушной среды в широком диапазоне изменения температур и давления.

В настоящей работе расчеты были проведены для интервалов высот $H \in [0, 100]$ км и скоростей полета $V \in [1, 7]$ км/с. Разумеется, это существенно перекрывает диапазон применимости ГПВРД. Более того, вблизи границы параметрической области (H, V), например, (0, 7), само существование летательного аппарата сколько-нибудь заметное время невозможно (некоторые параметры скорее относятся к задаче о падении метеорита на Землю или заключительной фазе неуправляемого схода космического аппарата с орбиты). Однако такой диапазон представляет интерес и выбран для исследования по следующим двум основным причинам. Во-первых, безусловно, очень важно получить глобальное представление об ареале исследований и знать, что может происходить вне реального поддиапазона функционирования ГПВРД в ближних и, в меньшей степени, относительно удаленных областях полного диапазона вариации H, V . Это знание весьма полезно как с практической (возможные последствия выхода из штатного режима работы ГПВРД), так и чисто теоретической (насколько широк диапазон применимости модели) точки зрения. Кроме того, приводимые ниже результаты при анализе допускают определенную степень интерполяции и, с некоторой осторожностью, экстраполяции по параметрам. Во-вторых, эта аналитическая работа имеет прикладное продолжение: на ее основе создается банк данных (БД), в который помещаются результаты математического моделирования этой проблемы. Система управления БД требует "прямоугольности" массивов данных, даже если их часть малоинтересна, например, в окрестности углов параметрической области (0, 7) или (10, 2). Применение современных компьютерных технологий обеспечит получение нужных результатов при любых H и V путем сплайн-интерполяции по опорным значениям в БД без проведения расчетов вообще.

СИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Вариация геометрии

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования (итерационный вычислительный алгоритм детально описан в [21]) задачи при

фиксированных значениях высоты $H = 40$ км и скорости $V = 4$ км/с полета в земной атмосфере. Углы входа в воздухозаборник ГПВРД принимались равными ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$, при этом поляры i_1 и i_2 совпадают) и имели значения $15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$ и 40° (рис. 3а–3е). Согласно (7) можно сразу сделать вывод, что при $\beta = 15^\circ$ возможна только регулярная, а при $\beta = 40^\circ$ только маховская ударно-волновые структуры течения. В остальных приведенных вариантах вероятными являются оба типа ударно-волновых структур. При таких H и V значения нижней и верхней точек бифуркации (5) приблизительно равны $\beta^* \approx 19.9^\circ$ и $\beta^{**} \approx 37.5^\circ$. В области дуализма решения поляры r_1 и r_2 расщепляются на маховские r_{1M}, r_{2M} и регулярные r_{1R}, r_{2R} поляры (на рис. не обозначены). Степень их расщепления и порядок вложенности друг в друга зависят от того, на каком конкретно участке рис. 2 зависимости $\gamma(p, T)$, восходящей или нисходящей, происходит ударно-волновой переход (подробно см. [21]). Заметим, что вопрос селекции решений требует особого исследования и лежит вне рамок настоящей работы.

Наиболее важные параметры в различных зонах течения: показатель адиабаты γ , локальное число Маха M , давление p (в атм.), температура T (в град. К) для углов $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ и 40° – представлены в табл. 1. Эти параметры соответствуют вариантам, показанным на рис. 3а, 3г, 3е. Порядок следования зон в таблицах приведен для удобства сравнения расположенных рядом чисел. Скачок параметров на падающей ударной волне i_1 означает переход от значений в зоне 0 к зоне 1. Скачок на отраженных УВ есть переход величин от зоны 1 к значениям в зоне 3 (для r_1) и от значений в зоне 2 к значениям в зоне 4 (для r_2). В случае симметричности задачи числа в колонках 1 и 2, 3 и 4 совпадают; они сохранены с целью унификации представляемой информации в других таблицах для несимметричных задач.

Обратим внимание на ряд моментов. На скачке i_1 происходит существенное изменение свойств газовой среды. Так, показатель адиабаты γ меняется от 1.40 до 1.33 для $\beta = 15^\circ$, до 1.23 для $\beta = 30^\circ$ и до 1.20 для $\beta = 40^\circ$. Уменьшение γ связано с весьма существенным увеличением возбуждения колебательных степеней свободы в молекулах кислорода O_2 при $\beta = 15^\circ$ и даже в молекулах азота N_2 при $\beta = 40^\circ$, когда достигаются существенные значения температур ≈ 5840 К при давлении в 0.3 атм (статическое давление в набегающем потоке на этой высоте 0.0028 атм). Переход потока через отраженный, менее интенсивный скачок уплотнения r_1 меняет свойства газовой среды слабее, причем по-разному, в зависимости от β . При $\beta = 15^\circ$ показатель адиабаты уменьшается, как и на i_1 , но незначительно (продолжается возбуждение молекул O_2), до 1.31. При $\beta = 30^\circ$ γ сохраняет свое

Таблица 1. Параметры течения при $H = 40$ км, $V = 4$ км/с и вариации $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

	Зона		0	1	3	2	4
	Параметр						
$\beta = 15^\circ$	γ		1.40	1.33	1.31	1.33	1.31
	M		12.61	6.57	7.77	6.57	7.77
	p		0.00283	0.0548	0.0548	0.0548	0.0548
	T		250	1145	1325	1145	1325
$\beta = 30^\circ$	γ		1.40	1.23	1.23	1.23	1.23
	M		12.61	4.18	3.44	4.18	3.44
	p		0.00283	0.181	0.567	0.181	0.567
	T		250	3600	4600	3600	4600
$\beta = 40^\circ$	γ		1.40	1.20	1.22	1.20	1.22
	M		12.61	3.01	2.51	3.01	2.51
	p		0.00283	0.295	0.572	0.295	0.572
	T		250	5840	6390	5840	6390

значение 1.23, а при $\beta = 40^\circ$ имеет место рост γ от 1.20 до 1.22, что связано с процессом уже не возбуждения колебаний, а диссоциации молекул N_2 .

Следует обратить внимание также на обстоятельство, связанное с неединственностью решения при $\beta = 30^\circ$. В табл. 1 в зоне 3 (и 4) приведены значения, соответствующие маховскому отражению. При регулярном отражении здесь получают значения $\gamma = 1.22$, $M = 2.44$, $p = 1.47$, $T = 6530$, которые существенно отличаются, за исключением γ , от "маховских" величин.

При визуальном анализе отличие МО- и РО-параметров определяется удаленностью точек пересечения поляр ($i_1 \times r_1$) и ($r_1 \times r_2$). В частности, при $\beta_2 = \beta_2^*$ (рис. 3б) эти параметры совпадают, а при $\beta_2 = \beta_2^{**}$ (рис. 3е) различие максимально. Таким образом, вопрос о том, какое именно решение – маховское или регулярное – устанавливается в области неединственности, весьма важен для функционирования ГПВРД.

Смещение точек бифуркации представлено на рис. 4а–4г в виде зависимостей критических значений углов – нижней β^* (рис. 4а, 4в) и верхней β^{**} (рис. 4б, 4г) точек бифуркации от высоты полета H . На рис. 4а, 4б приведен полный диапазон вариации H от 0 до 100 км при постоянных скоростях полета $V = 1.5, 2, 3, 4, 5, 6$ км/с (кривые 1–6 соответственно). На рис. 4в, 4г представлен штатный поддиапазон функционирования ГПВРД по высотам полета от 14 до 34 км и при постоянных числах Маха полета $M_0 = 6, 8, 10, 12, 14, 16$ (кривые 1–6 соответственно). При этом числам Маха на разных высотах, естественно, соответствуют различные значения V . Так, при указанных выше M_0 скорость полета составляет: на высоте 14 км –

1.77, 2.36, 2.95, 3.54, 4.13 и 4.72 км/с, а на высоте 34 км – 1.84, 2.45, 3.06, 3.68, 4.29 и 4.90 км/с. Приведенные данные (для реальной атмосферы) дают возможность проанализировать поведение β^* и β^{**} в полном диапазоне $0 < H < 100$ км (рис. 4а, 4б) и поддиапазоне $14 < H < 34$ км (рис. 4в, 4г) высот полета с целью прогнозирования последствий выхода за его пределы. Заметим, что в идеальном газе бифуркационные кривые являются прямыми линиями $\beta^* = C_1$ и $\beta^{**} = C_2$, т.е. значения критических углов не зависят от H и являются функцией M_0 (и γ). Для указанных выше значений M_0 значения констант C_1 и C_2 (для $\gamma = 1.4$) соответственно: $C_1 = 20.6, 20.0, 19.5, 19.2, 18.9, 18.7$ и $C_2 = 29.0, 30.3, 30.9, 31.2, 31.5, 31.7$.

Сделаем краткий анализ рис. 4. Во-первых, имеет место "непредсказуемость" поведения β^* и β^{**} как функций от (H, V) или (H, M_0), выраженная в их существенной немонотонности для реальной атмосферы. Причем только для β^* наблюдается монотонность в каких-то интервалах, а β^{**} существенно немонотонна и по первой, и по второй своим переменным, что связано с немонотонностью свойств земной атмосферы (см. рис. 2).

Во-вторых, обратим внимание на то, что β^{**} меняются более значительно, чем β^* . Следовательно область неединственности решения $\Delta\beta = \beta^{**} - \beta^*$ не просто смещается при изменении H и M_0 (или V), но ее размер заметно зависит от их конкретных значений. Так, при $V = 1.5$ км/с (кривые 1 на рис. 4а, 4б) значения β^* максимальны, а β^{**} минимальны по сравнению с их значениями при других V и область неединственности решения $\Delta\beta \approx 7^\circ$. Отметим, что интервал $\Delta\beta$ максимален не при максимальном $V = 6$ км/с, а в подобластях

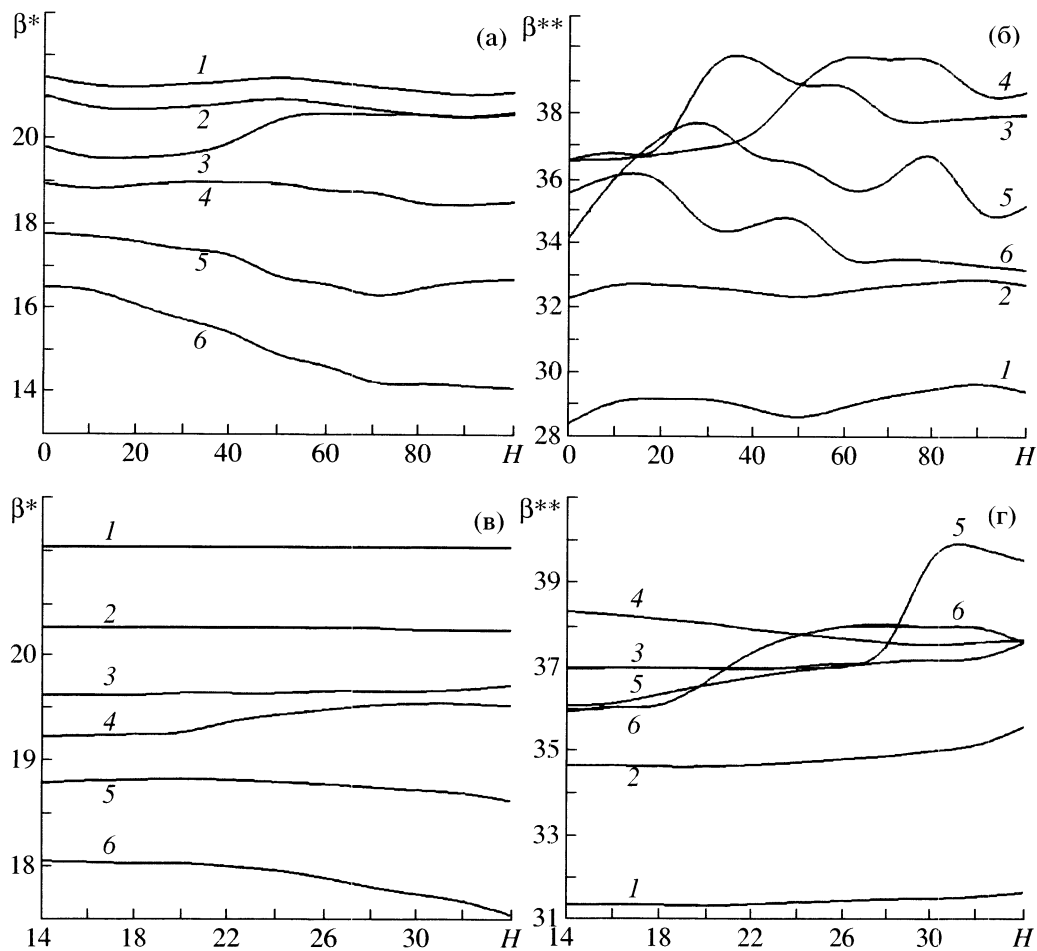


Рис. 4. Зависимость критических значений углов – нижней β^* (а), (в) и верхней β^{**} (б), (г) точек бифуркации от высоты полета H . Глобальный диапазон (а), (б) изменения параметров: $H \in [0, 100]$ км, $V = 1.5, 2, 3, 4, 5, 6$ км/с (кривые 1–6 соответственно). Рабочий диапазон ГПВРД (в), (г): $H \in [14, 34]$ км, $M_0 = 6, 8, 10, 12, 14, 16$ (кривые 1–6 соответственно).

$V = 3$ км/с, $H \approx 35$ км и $V = 4$ км/с, $H \approx 70$ км и составляет около 20° .

В поддиапазоне ГПВРД нелинейность $\Delta\beta(H, M_0)$ проявляется более мягко. В среднем увеличение M_0 при фиксированном H приводит к росту $\Delta\beta$: кривые β^* (рис. 4в) с меньшими номерами лежат выше, чем с большими (монотонность по V), а кривые β^{**} (рис. 4г) – наоборот (но только для $M_0 < 12$ – немонотонность по V). При этом размер области неединственности решения $\Delta\beta$ минимален при $M_0 = 6$ и достигает 10° (практически постоянен и не смещается при вариации H) и максимален при $M_0 = 14$ с “пиком” при $H = 31$ км. Здесь β^{**} максимально и составляет около 40° и $\Delta\beta$ также максимально $\approx 23^\circ$. Таким образом, в не очень большом поддиапазоне штатного функционирования ГПВРД область дуализма решения, когда возможно и маховское, и регулярное отражения, может изменяться в 2.5 раза. В классическом случае неизменности свойств газовой среды ($\gamma = 1.4$ во всех зонах течения) размер этой области варь-

ируется незначительно: от $\Delta\beta \approx 8^\circ$ при $M_0 = 6$ до $\Delta\beta \approx 13$ при $M_0 = 14$ – и не зависит от высоты полета.

В-третьих, обратим внимание на пересечения кривых β^{**} (рис. 4б, 4г). Они означают наличие локальных экстремумов (5), и вопрос о том, являются ли эти особенности седловыми точками или фокусами, весьма важен при анализе устойчивости образующихся ударно-волновых структур. Однако этот вопрос слишком объемён, лежит за пределами данной работы и станет предметом специального исследования.

НЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Вариация высоты полета

Рассмотрим влияние на структуру течения высоты полета H при фиксированных остальных параметрах (4): $V = 4$ км/с, $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$. Системы поляр, соответствующие значениям $H = 0, 20, 40, 60, 80$ и 100 км, приведены на рис. 5а–5е. Выбор значений β_1 и β_2 связан со следующими обстоятельствами. Угол 40° близок к предельному, при

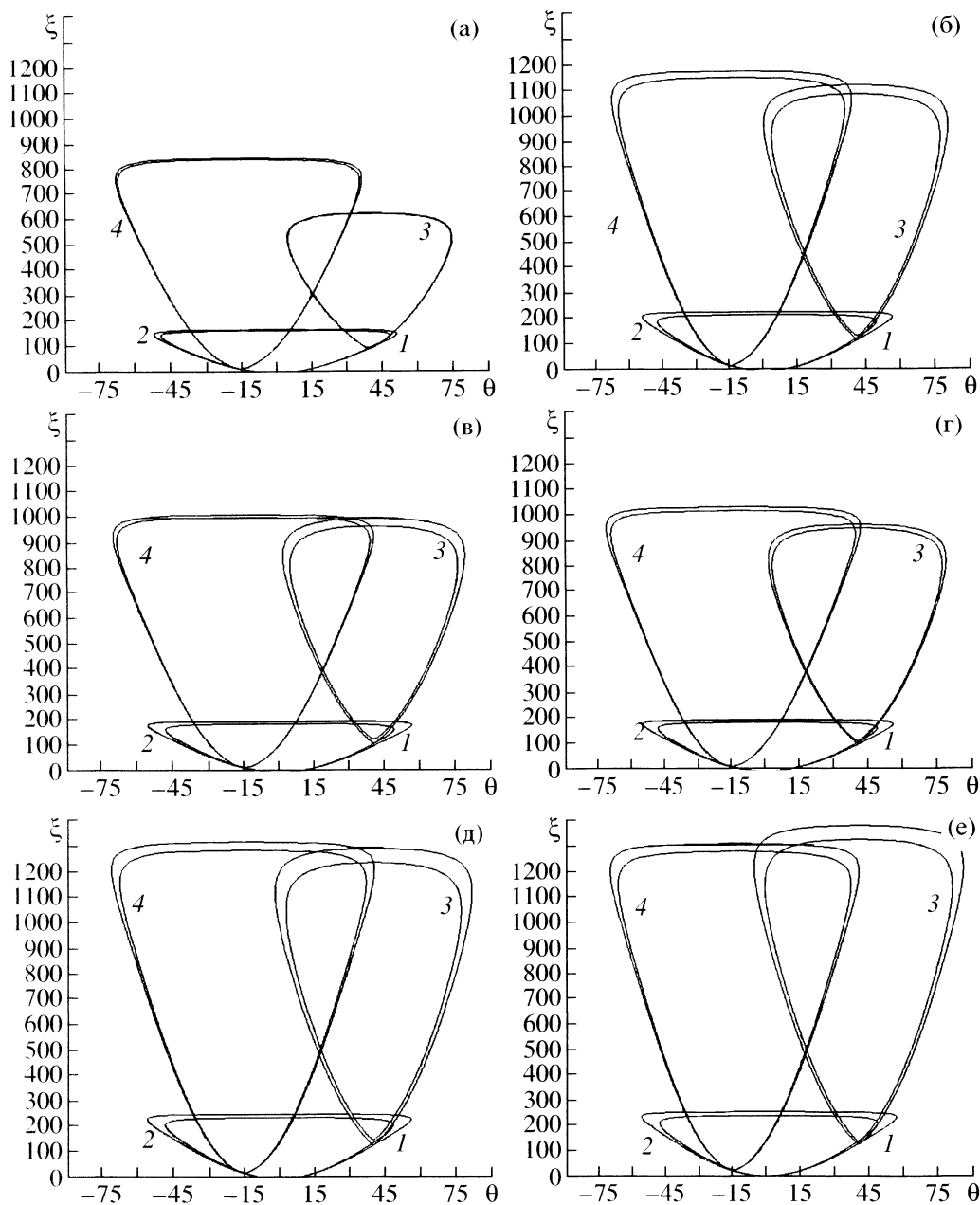


Рис. 5. Поляры двух падающих ($1 - i_1, 2 - i_2$) и двух отраженных ($3 - r_1, 4 - r_2$) ударных волн при фиксированных значениях $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$, $V = 4$ км/с и вариации $H = 0$ (а), 20 (б), 40 (в), 60 (г), 80 (д) и 100 (е) км.

котором может существовать скачок уплотнения, присоединенный к вершине клина, и возможно образование ударно-волновых структур, показанных на рис. 1. Небольшой угол 15° обеспечивает (почти всегда) регулярный тип отражения. Таким образом, все практически интересные структуры течения формируются углами, лежащими в данном диапазоне. Это дает возможность при анализе ударных поляр на рис. 5 приблизительно определить структуры течения при других значениях β_1 и β_2 , мысленно передвигая поляры r_1 и r_2 к соответствующим этим значениям опорным точкам

поляры i_1 . Разумеется, такая визуальная аппроксимация не обеспечит получения точных чисел, но может дать полезное представление об изменении ударно-волновой структуры течения при вариации β_1 и β_2 .

Обратим внимание на расщепление поляр падающих УВ i_1 и i_2 вследствие того, что $\beta_1 \neq \beta_2$. Размах поляры зависит от значения γ за фронтом падающего СУ: чем γ меньше, тем больше ширина и высота поляры (детальное исследование проведено в [20, 21]). Это значение определяется всеми параметрами (4). При таком сочетании H, V, β_1, β_2

Таблица 2. Параметры течения при $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$, $V = 4$ км/с и вариации H (км)

	Зона		0	1	3	2	4
	Параметр						
$H = 0$	γ		1.40	1.27	1.25	1.32	1.23
	M		11.8	2.42	2.16	6.47	4.61
	ρ		1.00	94.4	170	17.0	167
	T		288	5660	6660	1210	3160
$H = 40$	γ		1.40	1.20	1.22	1.33	1.19
	M		12.6	3.01	2.51	6.57	5.20
	ρ		0.00283	0.295	0.572	0.0548	0.543
	T		250	5840	6390	1150	3210
$H = 100$	γ		1.40	1.20	1.27	1.33	1.21
	M		14.1	3.09	2.66	6.70	4.72
	ρ		3.15×10^{-7}	4.07×10^{-4}	7.97×10^{-4}	7.48×10^{-5}	7.52×10^{-4}
	T		197	5680	6300	1050	2840

поляра i_2 вложена в поляр i_1 (см. значения γ в табл. 2). Природа расщепления поляр r_1 и r_2 уже описана выше.

Анализируя рис. 5, можно сделать вывод о существовании при данных значениях β_1 , β_2 , V во всем диапазоне вариации H области неединственности решения: возможно как МО, так и РО.

В практике разработки ГПВРД этот набор параметров является весьма неприятным при создании систем управления, поскольку нельзя точно прогнозировать, какой именно режим будет реализовываться вследствие влияния на этот процесс большого числа факторов, в частности предыстории течения (подробнее см. [22–24]). Границы области дуализма решения могут быть очень приблизительно оценены на основе визуального анализа. Например, на рис. 5в ($H = 40$ км), мысленно перемещая поляр r_1 влево (так, чтобы центральная точка r_1 все время опиралась на поляр i_1) и одновременно расширяя ее, что соответствует уменьшению β_1 , можно отследить перемещение точки пересечения r_1 и r_2 . Момент входа этой точки внутрь поляры i_1 , т.е. появления точки пересечения сразу трех поляр i_1 , r_1 , r_2 , представляет собой границу существования маховского типа отражения. Это – нижняя точка бифуркации решения β_1^* ($\approx 18^\circ$). Далее, при $\beta_1 < \beta_1^*$ возможно существование только единственного типа УВ-структуры, а именно регулярного отражения.

Визуальным анализом, естественно, с небольшой точностью аналогично можно определять и верхнюю по (8) точку бифуркации β_1^{**} . Например, для того же значения $H = 40$ км (рис. 5в) видно, что данная точка при фиксированном $\beta_2 = 15^\circ$ существовать не может, поскольку движение по-

ляры r_1 по поляр i_1 вправо ограничено значением $\theta_{\max} \approx 55^\circ$. При этом точка пересечения поляр r_1 и r_2 всегда будет существовать, т.е. всегда будет сохраняться возможность существования РО вместе с МО. Запрета на РО можно добиться только увеличением β_2 , т.е. только сдвигом r_2 -поляры влево.

Некоторые численные результаты компьютерного моделирования этого типа задач для высот полета 0, 40 и 100 км приведены в табл. 2. Структура таблицы та же, что и табл. 1. Заметим, что вопрос о правомерности применения модели сплошной среды (точности получаемых результатов) на высоте 100 км является достаточно дискуссионным, однако эти данные весьма полезны, в частности, для анализа динамики изменения УВ-структур и газодинамических параметров в различных зонах течения при вариации высоты полета. Кроме того, в [22] результаты, полученные в численных экспериментах при решении уравнений Эйлера (Навье–Стокса) и Больцмана, хорошо коррелировали до значений $H \approx 120$ км.

Проанализируем данные, помещенные в табл. 2. Числа Маха набегающего потока при постоянном значении $V = 4$ км/с и высотах полета $H = 0, 40$ и 100 км, естественно, различаются и соответственно равны 11.8, 12.6 и 14.1. Показатель адиабаты γ , равный 1.40 в зоне невозмущенного потока, усредненно отражает физико-химические процессы при переходе газа через скачки уплотнения (возбуждение колебаний атомов в молекулах, их диссоциацию, а при высоких температурах – ионизацию). На падающих СУ i_1 и i_2 значение γ уменьшается. Эта зависимость монотонна по β ($\gamma(\beta_1) < \gamma(\beta_2)$ при $\beta_1 > \beta_2$) и квазимонотонна по H .

Так, в зоне 1 $\gamma(H=0) = 1.27$, $\gamma(40) = 1.20$, $\gamma(100) = 1.20$; в зоне 2 $\gamma(H=0) = 1.32$, $\gamma(40) = 1.33$, $\gamma(100) =$

Таблица 3. Параметры течения при $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$, $H = 40$ км и вариации V (км/с)

	Зона		0	1	3	2	4
	Параметр						
$V = 2$	γ		1.40	1.29	1.27	1.39	1.32
	M		6.31	2.00	1.74	4.23	2.65
	p		0.00283	0.0826	0.137	0.0183	0.132
	T		250	1660	1920	5160	1180
$V = 5$	γ		1.40	1.24	1.24	1.30	1.24
	M		15.8	2.72	2.36	7.41	4.92
	p		0.00283	0.467	0.878	0.0813	0.859
	T		250	8660	9880	1630	4060
$V = 7$	γ		1.40	1.32	1.33	1.18	1.20
	M		22.1	2.16	1.78	10.5	6.73
	p		0.00283	0.960	1.65	0.146	1.77
	T		250	15700	17800	3120	6150

= 1.33. Это достаточно ожидаемый результат, поскольку $\gamma(p, T)$, являясь в целом немонотонной функцией, имеет большой начальный участок монотонности (см. рис. 2) и всякое воздействие на газовую среду на этом участке, связанное с увеличением T в широком интервале p , всегда приводит к уменьшению γ . Далее при высоких T участки $\gamma(p, T)$ представляют собой колебательные аperiодические функции с априори непрогнозируемым характером изменения на СУ. Так, при $H = 40$ км γ умеренно возрастает от 1.20 до 1.22 при переходе через отраженный скачок r_1 , а на r_2 значительно падает от 1.33 до 1.19.

В результате прохождения через всю систему скачков поток становится весьма неоднородным. Например, если при том же $H = 40$ км поток на входе в диффузор имел значения $p = 0.0028$ атм и $T = 250$ К, то на выходе из системы СУ в зоне 3 $p = 0.572$ атм и $T = 6390$ К, а в зоне 4 $p = 0.543$ атм и $T = 3210$ К. Заметим, что эти данные приведены для маховского типа отражения. Если реализуется регулярный тип отражения, то будут иметь место существенно большие значения: в зоне 3 $p = 1.14$ атм и $T = 7260$ К, а в зоне 4 $p = 1.14$ атм и $T = 5160$ К. Напомним, что при РО давления в зонах 3 и 4 всегда совпадают и эти зоны разделены тангенциальным разрывом, а при МО между зонами 3 и 4 находятся метастабильные зоны 5 и 6 течения за центральным скачком m (см. рис. 1).

Таким образом, оптимизация формы входа в диффузор по ряду показателей (максимум статического давления или расхода на выходе) требует предварительного ответа на основной вопрос: какой реализуется тип ударно-волновой структуры. Разработанный специальный вычислительный алгоритм определения точек бифуркации решения в параметрическом пространстве (4) показал высо-

кую эффективность функционирования в широком диапазоне определяющих параметров. Следует, однако, отметить, что процесс поиска экстремумов в четырехмерном пространстве при их немонотонной зависимости от некоторых “координат” (4) требует больших затрат компьютерного времени. Ускорение вычислений может быть получено организацией параллельного счета на мультипроцессорных системах (о распараллеливании алгоритмов решения задач газовой динамики см. [25, 26]).

НЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Вариация скорости полета

Перейдем к анализу влияния на структуру течения вариации скорости полета V при фиксированной высоте $H = 40$ км и несимметричной геометрии $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$. Выбор этих углов определяется теми же причинами, что и в предыдущем разделе. Системы поляр, соответствующие значениям $V = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ км/с, приведены на рис. 6а–6е. Такой большой диапазон вариации V выбран специально, чтобы полностью рассмотреть влияние скорости полета на возникающие УВ-структуры.

Картины поляр в целом аналогичны рассмотренным ранее. Имеются две расщепленные поляры скачков i_1 и i_2 , падающих внутрь области с углов клиньев β_1 и β_2 . Для данных параметров поляра i_2 вложена в поляру i_1 при $V \leq 5$ км/с, а при $V \geq 6$ км/с, наоборот, i_1 вложена в i_2 .

Поляры отраженных скачков r_1 и r_2 также расщепляются на маховскую и регулярную поляры. Это происходит в случае дуализма решений, когда могут существовать как МО, так и РО, что имеет место почти во всем диапазоне исследован-

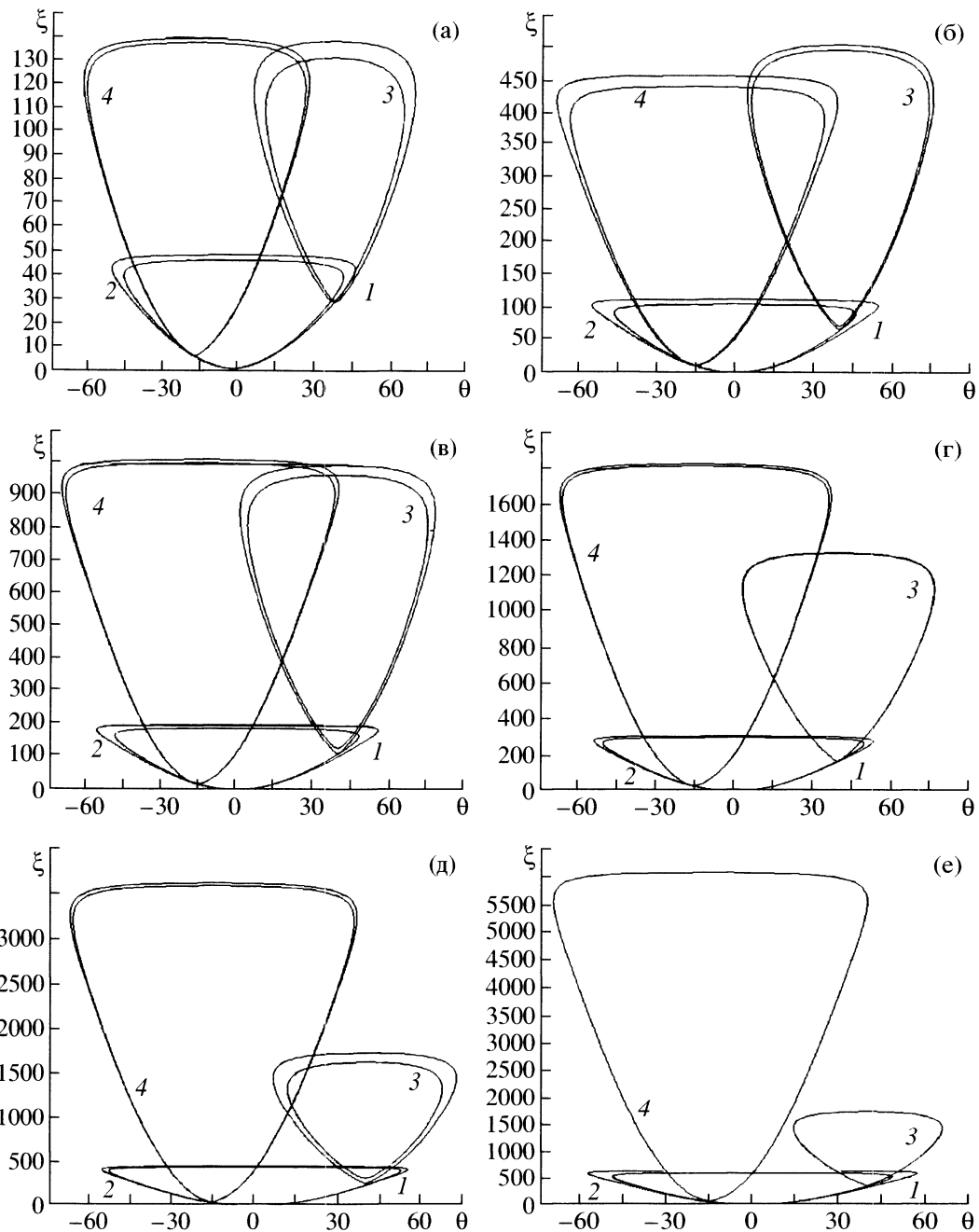


Рис. 6. Поляры двух падающих ($1 - i_1, 2 - i_2$) и двух отраженных ($3 - r_1, 4 - r_2$) ударных волн при фиксированных значениях $\beta_1 = 40^\circ, \beta_2 = 15^\circ, H = 40$ км и вариации $V = 2$ (а), 3 (б), 4 (в), 5 (г), 6 (д) и 7 (е) км/с.

ных скоростей полета, за исключением варианта с $V = 7$ км/с, когда РО невозможно. Заметим, что расщепление поляр максимально при $V = 2$ км/с (рис. 6а). Приведенные значения скоростей соответствуют числам Маха набегающего потока $M_0 = 6.31, 9.46, 12.6, 15.8, 18.9$ и 22.1 . Течения с такими M_0 в настоящее время интенсивно исследуются в гиперзвуковых аэродинамических трубах.

В табл. 3 приводятся некоторые числовые данные для течений с $V = 2, 5$ и 7 км/с, соответствующим рис. 6а, 6г, 6е.

Падающие внутрь потока СУ i_1 и i_2 воздействуют на газовую среду существенно по-разному. Показатель адиабаты изменяется от значения 1.40 в набегающем потоке для скоростей 2, 5 и 7 км/с соответственно на СУ i_1 (в зоне 1) до значений 1.29, 1.24, 1.32, а на СУ i_2 (в зоне 2) – до значений 1.39, 1.30, 1.18. Обратим внимание на значение $\gamma = 1.18$. Для не слишком высоких скоростей 2 и 5 км/с скачок, присоединенный к клину с $\beta = 40^\circ$, приводит к большему изменению γ , чем скачок от клина с $\beta = 15^\circ$. Этот результат достаточно ожидаем, по-

сколькo интенсивность СУ i_1 выше, чем СУ i_2 . При высокой скорости 7 км/с значение γ за фронтом СУ i_2 существенно меньше, чем за фронтом СУ i_1 . При этом температура от значения в набегающем потоке $T_0 = 250$ К за СУ i_1 и i_2 (в зонах 1 и 2) повышается до $T_1 = 1660$ К, $T_2 = 516$ К при $V = 2$ км/с и до $T_1 = 15700$ К, $T_2 = 3200$ К при $V = 7$ км/с. В области температур $T \approx 3000$ К происходит интенсивное возбуждение колебаний в молекулах O_2 , а в области $T \approx 15000$ К газовая среда почти полностью диссоциирована и отклонение γ от его значения для одноатомного газа $5/3$ обеспечивает только возбуждение электронных оболочек атомов.

После прохождения системы СУ r_1 и r_2 в зонах 3 и 4 температуры имеют значения $T_3 = 1920$ К (2230 К) и $T_4 = 1180$ К (1560 К) для варианта с $V = 2$ км/с. Здесь приведены значения как для маховского, так и регулярного (в скобках) типов отражения.

Гораздо большая неоднородность температуры потока на выходе наблюдается для высокоскоростного полета с $V = 7$ км/с, где реализуется только МО: $T_3 = 17800$ К и $T_4 = 3120$ К. Существенно отличаются также показатели адиабаты ($\gamma_3 = 1.33$, $\gamma_4 = 1.20$) и локальные числа Маха ($M_3 = 1.78$, $M_4 = 6.73$, число Маха набегающего потока $M_0 = 22.1$). Заметим, что давление в этих зонах отличается не очень существенно: $p_3 = 1.65$ атм и $p_4 = 1.77$ атм.

В целом графики ударных поляр и дополняющие их данные в таблицах представляют весьма интересную информацию об ударно-волновых структурах и значениях газодинамических параметров в различных зонах течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прямое численное моделирование течений на основе, например, уравнений Эйлера в области неединственности решения ставит свои особые, специфические проблемы. Поскольку существуют два аналитических решения (их, как показано в [21], может быть и больше), а численный алгоритм любого программного комплекса может получить только какое-то одно, то возникают вопросы: какое это решение (МО или РО) и какие факторы влияют на получение именно этого решения. В частности, каковы области существования решения при использовании различных начальных данных, при вариации других алгоритмических параметров (размерности и конфигурации расчетной сетки) и т.п.? Устойчиво ли полученное решение и каков уровень допустимых возмущений? Интересным является вопрос о характере вычислительного процесса вблизи точек бифуркации решения: есть ли спонтанные переходы с одной ветви решения на другую (аналогично полученным в [24]), в

особенности при попытке получить в финале один тип решения, стартуя с другого типа? Или алгоритм самостоятельно определяет только один тип решения, полностью игнорируя другой?

В представленной работе для задачи о расчете высокоскоростных течений на входе в диффузор ГПВРД изучены помимо других аспектов границы области дуализма решения в широком диапазоне определяющих параметров (высот и скоростей полета). Одной из важных конечных целей этого направления исследования должна стать математически строгая, опирающаяся на сущность физического процесса формулировка правила отбора решений в области их неединственности. Подчеркнем, что основной опасностью прямого численного моделирования сложных задач газовой динамики в малоизученной или вообще не изученной области, где нет поддержки ни аналитическими соотношениями, ни экспериментальными данными, служащими определенным ориентиром, является вероятность получения какого-либо собственного решения (детально подобные вопросы обсуждаются в [24, 27]). Это особенно касается разработанных в последнее время алгоритмов так называемого повышенного порядка точности и их применения для расчета задач со сложной ударно-волновой конфигурацией. Например, в работах [28, 29] было показано, что все примененные алгоритмы дали различные (некоторые – кардинально) решения одной и той же задачи.

Поэтому теоретические исследования, выявляющие особые области поведения решений, вновь становятся весьма важным элементом развития методов численного моделирования и их продвижения в область гиперзвуковых течений реального газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 02-01-00097 и 04-07-90002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gribben B.J., Badcock K.J., Richards B.E. Numerical Study of Shock-reflection Hysteresis in a Underexpanded Jet // AIAA J. 2000. V. 38. № 2. P. 275.
2. Hornung H.G., Schwendeman D.W. Oblique Shock Reflection from an Axis of Symmetry: Shock Dynamics and Relation to the Guderley Singularity // J. Fluid Mech. 2001. V. 438. P. 231.
3. Васильев Е.И., Крайко А.Н. Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана. Сб. статей: Газовая динамика. Избранное. Т. 2. М.: Физматлит, 2001. С. 235.
4. Zakharian A.R., Brio M., Hunter J.K., Webb G.M. The von Neumann Paradox in Weak Shock Reflection // J. Fluid Mech. 2000. V. 422. P. 193.
5. Kobayashi S., Adachi T., Suzuki T. Non-self-similar Behavior of the von Neumann Reflection // Phys. Fluids. 2000. V. 12. № 7. P. 1869.

6. *Timofeev E., Takayama K., Voinovich P.* Regular-to-Mach Reflection Transition on the Side Surface of an Inclined Cylinder: Numerical and Experimental Study: Tohoku: Repts. Inst. Fluid Sci. Tohoku Univ., 1999. V. 11. P. 1.
7. *Li H., Ben-Dor G.* Analytical and Experimental Investigations of the Reflection of Asymmetric Shock Waves in Steady Flows // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 390. P. 25.
8. *Schmisser J.D., Gaitonde D.V.* Numerical Investigation of Strong Crossing Shock-wave / Turbulent Boundary-layer Interactions // *AIAA J.* 2001. V. 39. № 9. P. 1742.
9. *Henderson L.F., Takayama K., Srutchfield W.Y.* The Persistence of Regular Reflection During Strong Shock Diffraction over Rigid Ramps // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 431. P. 273.
10. *Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Хотяновский Д.В.* Численное моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн под действием локальных возмущений // *Докл. РАН.* 2000. Т. 373. № 3. С. 332.
11. *Kudryavstev A.N., Khotjanovsky D.V., Ivanov M.S. et al.* Numerical Investigations of Transition Between Regular and Mach Reflections Caused by Free-stream Disturbances // *Shock Waves.* 2002. V. 12. № 2. P. 157.
12. *Yan H., Adelgren R., Elliott G., Knight D. et al.* Effect of Energy on MR - RR Transition // *Shock Waves.* 2003. V. 13. № 2. P. 113.
13. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 502 с.
14. *Кларк Дж., Макчесни М.* Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967. 566 с.
15. *Tables of Thermal Properties of Gases.* N. Y.: Nat. Bureau of Standards (USA), 1955, Circular 564, 90 p.
16. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963. 708 с.
17. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002. 461 с.
18. *Tarnavsky G.A., Shpak S.I.* Effective Specific Heat Ratio for Problems of Real Gas Hypersonic Flows at Bodies // *Thermophysics and Aeromechanics.* 2001. V. 8. № 1. P. 39.
19. *Тарнавский Г.А., Шпак С.И.* Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений // *Сибирский журн. индустриальной математики.* 2001. Т. 4. № 1(7). С. 177.
20. *Тарнавский Г.А.* Ударные волны в газах с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка // *Вычисл. методы и программирование.* 2002. Т. 3. № 2. С. 129.
21. *Тарнавский Г.А.* Неединственность ударно-волновых структур в реальных газах: маховское и/или регулярное отражение // *Вычисл. методы и программирование.* 2003. Т. 4. № 2. С. 258.
22. *Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990. 247 с.
23. *Тарнавский Г.А., Шпак С.И.* Некоторые аспекты компьютерного моделирования гиперзвуковых течений: устойчивость, неединственность и бифуркации численных решений уравнений Навье-Стокса // *ИФЖ.* 2001. Т. 74. № 3. С. 125.
24. *Тарнавский Г.А., Хакимзянов Г.С., Тарнавский А.Г.* Моделирование гиперзвуковых течений: влияние стартовых условий на финальное решение в окрестности точек бифуркации // *ИФЖ.* 2003. Т. 76. № 5. С. 71.
25. *Тарнавский Г.А., Шпак С.И.* Декомпозиция методов и распараллеливание алгоритмов решения задач аэродинамики и физической газовой динамики // *Программирование.* 2000. № 6. С. 45.
26. *Тарнавский Г.А., Корнеев В.Д., Вайнер Д.А. и др.* Вычислительная система "Поток - 3": опыт параллелизации вычислительного комплекса. Ч. 1. Идеология распараллеливания // *Вычисл. методы и программирование.* 2003. Т. 4. № 1. С. 37.
27. *Волков В.Ф., Тарнавский Г.А.* Нарушение симметрии и гистерезис стационарных и квазистационарных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса // *Журн. вычислительной математики и математической физики.* 2001. Т. 41. № 11. С. 1742.
28. *Pandolfi M., D'Ambrosio D.* Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the "Carbuncle" Phenomena // *J. Comput. Phys.* 2001. V. 166. № 2. P. 271.
29. *Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W.* Resolution of High Order WENO Schemes for Complicated Flow Structures // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 186. № 2. P. 690.