R. B. Salimov, E. N. Karabasheva, The new approach to solving the Riemann boundary value problem with infinite index, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2014, Volume 14, Issue 2, 155–165

DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-2-155-165

References

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II. *Arch. Math. (Basel)*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 252–260.
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 309 p. (Rus. ed. : Bahturin Yu. A. Tozhdestva v algebrah Li. Moscow, Nauka, 1985).
4. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Math. Surv. and Monographs*. Providence, R.I., American Math. Soc., 2005, vol. 122.
5. *Ratseev S. M.* Poisson algebras of polynomial growth. *Siberian Math. J.* 2013, vol. 54, no. 3, pp. 555–565.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4694.
7. *Cherevatenko O. I.* On nilpotent Leibnitz algebras. *Nauchnyye vedomosti BelGU. Ser. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. Mathematics. Physics], 2012, no. 23(142), iss. 29, pp. 14–16.

УДК 517.54

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Р. Б. Салимов[1], Э. Н. Карабашева[2]

[1] Доктор физико-мататематических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov@5354.ru

[2] Аспирант кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, enkarabasheva@bk.ru

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия и аналогичный тому, с помощью которого в случае конечного индекса задачи ранее в работах Ф. Д. Гахова устранялись разрывы коэффициента краевого условия с помощью специально подобранных функций, отличных от используемых в настоящей работе.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D^+ и D^- — соответственно верхняя и нижняя полуплоскости в плоскости переменного $z = x + iy$ с действительной осью L, $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — функции, аналитические соответственно в областях D^+ и D^-. Требуется определить функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, ограниченные в областях D^+ и D^- соответственно, если их граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ \ t \in L, \tag{1}$$

в котором $G(t)$, $g(t)$ — заданные на L функции. В случае, когда $\ln G(t)$ и $g(t)$ — функции, удовлетворяющие условию H_L (условию Гёльдера) всюду на L, включая окрестность точки $t = \infty$ [1, с. 67], решение задачи (1) дано в монографиях [1, с. 136–139; 2, с. 118–121]. Решение задачи зависит от её индекса, равного $\big(\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty)\big)/2\pi$.

Начало исследованиям задачи (1) в случае, когда ее индекс бесконечен, т. е. $\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty) = \infty$, было положено Н. В. Говоровым. Результаты его работ в дальнейшем вошли в монографию [3]. Этой проблеме посвящен ряд работ других авторов; отметим из них статьи [4–7], в которых изучены новые случаи задачи Римана с бесконечным индексом, в статье [8] рассмотрен особый случай задачи, в [9] изучен случай, когда в задаче (1) при $g(t) \equiv 0$ в качестве L берется произвольный гладкий замкнутый контур, в окрестностях некоторых точек которого $\arg G(t)$ неограничен.

Авторы указанного ряда работ решение задачи (1) получают путем построения канонического решения — частного решения соответствующей однородной задачи:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L, \tag{2}$$

обладающего нужными свойствами, аналогично тому, как это было сделано ранее Н. В. Говоровым.

В настоящей работе для решения задачи (1) с бесконечным индексом используется другой подход, основанный на устранении разрыва $\arg G(t)$ и аналогичный тому, с помощью которого в работе [2, с. 428–439] устранялись разрывы первого рода у функции $\ln G(t)$.

Подход, аналогичный используемому здесь, применялся ранее при решении краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости [10].

2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Будем считать, что коэффициент $G(t)$ этого краевого условия удовлетворяет следующим условиям:
1) $\ln|G(t)|$ удовлетворяет условию H_L $\big(\ln|G(t)| \in H_L\big)$,
2)

$$\arg G(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho + \nu(t), & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho + \nu(t), & t < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\nu(t)$ — заданная функция, $\nu(t) \in H_L$, ν^-, ν^+, ρ — заданные числа, $0 < \rho < 1$.

Здесь индекс задачи равен бесконечности, так как $(\nu^- - \nu^+)|t|^\rho \to \infty$ при $t \to \infty$, когда $(\nu^- - \nu^+) \neq 0$.

Взяв действительные постоянные α, β, введем в рассмотрение функции

$$\begin{cases} E^+(z) = \exp\{(\alpha + i\beta) z^\rho\}, & 0 \le \arg z \le \pi, \\ E^-(z) = \exp\{(\alpha - i\beta) z^\rho\}, & -\pi \le \arg z \le 0, \end{cases} \tag{4}$$

аналитические и однозначные в областях соответственно D^+, D^-, понимая под $\arg z$ ветвь, непрерывную в соответствующей области.

Для точки $re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \le \theta \le \pi$, области D^+ (когда $re^{-i\theta} \in D^-$) имеем:

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| = \exp\{(\alpha \cos\rho\theta - \beta \sin\rho\theta) r^\rho\}, \tag{5}$$

$$\arg E^+(re^{i\theta}) = -\arg E^-(re^{-i\theta}) = (\alpha \sin\rho\theta + \beta\cos\rho\theta) r^\rho.$$

Поэтому при $\theta = 0$, когда $re^{\pm i\theta} = t > 0$, получим

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = \exp\{i2\beta t^\rho\}, \ t > 0, \tag{6}$$

при $\theta = \pi$, когда $re^{\pm i\pi} = t < 0$, будем иметь:

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = \exp\{i2(\alpha \sin\rho\pi - \beta\cos\rho\pi)|t|^\rho\}, \ t < 0. \tag{7}$$

Краевое условие (2) запишем в виде

$$\Phi^+(t) E^+(t) = G_1(t) \Phi^-(t) E^-(t), \tag{8}$$

где

$$G_1(t) = \frac{E^+(t)}{E^-(t)} |G(t)| e^{i \arg G(t)}. \tag{9}$$

Принимая во внимание (3), (6), (7), постоянные α, β формул (4) выберем так, чтобы $2\beta = -\nu^+$, $2(\alpha \sin\pi\rho - \beta\cos\pi\rho) = -\nu^+$, т. е. чтобы

$$\beta = -\nu^-/2, \quad \alpha = (\nu^- \cos\pi\rho - \nu^+)/(2\sin\pi\rho). \tag{10}$$

Тогда формула (9) примет вид

$$G_1(t) = |G(t)| e^{i\nu(t)},$$

причем $\ln G_1(t) \in H_L$.

Далее находим аналитическую и ограниченную в областях D^+, D^- функцию [2, с. 119]

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z},$$

значения которой на L как слева, так и справа удовлетворяют условию H_L [1, с. 66, 68]. Затем определяем аналитические в областях D^+, D^- функции соответственно:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},\ X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}, \tag{11}$$

где $\Gamma^+(z) = \Gamma(z)$ при $z \in D^+$, $\Gamma^-(z) = \Gamma(z)$ при $z \in D^-$, причем $X^+(z)$, $X^-(z)$ отличны от нуля всюду в областях D^+, D^- соответственно, включая границу L.

Найденные функции удовлетворяют краевому условию:

$$X^+(t) = G_1(t)X^-(t). \tag{12}$$

Учитывая последнее, краевое условие (8) запишем так

$$\frac{\Phi^+(t)E^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)E^-(t)}{X^-(t)}.$$

Отсюда видно, что функция $\dfrac{\Phi^-(z)E^-(z)}{X^-(z)}$ является аналитическим продолжением функции $\dfrac{\Phi^+(z)E^+(z)}{X^+(z)}$, т. е. они образуют целую функцию $F(z)$ в плоскости z и

$$\frac{\Phi^+(z)E^+(z)}{X^+(z)} = F(z),\ \frac{\Phi^-(z)E^-(z)}{X^-(z)} = F(z), \tag{13}$$

для точек соответственно D^+, D^-, включая L.

Обозначим

$$\max_{0\le\theta\le\pi}(\alpha\cos\rho\theta - \beta\sin\rho\theta) = M_1$$

тогда согласно (5) имеем:

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| \le \exp\{M_1 r^\rho\}, \qquad 0 \le \theta \le \pi. \tag{14}$$

Для отличных от нуля функций $X^+(z)$, $X^-(z)$ имеем

$$|1/X^+(z)| < C_1,\ |1/X^-(z)| < C_1, \qquad C_1 = \mathrm{const}, \tag{15}$$

для всех z области соответственно D^+, D^-, включая L. Кроме того, поскольку решения $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ относятся к классу ограниченных функций, то

$$|\Phi^+(z)| < C_2,\ |\Phi^-(z)| < C_2, \qquad C_2 = \mathrm{const}, \tag{16}$$

для всех z области соответственно D^+, D^-, включая L. Поэтому согласно (13), (14) будем иметь:

$$M(r) = \max_{-\pi\le\theta\le\pi}|F(re^{i\theta})| \le C_1C_2\exp\{M_1r^\rho\},$$

$$\ln M(r) \le \ln(C_1C_2) + M_1r^\rho = M_1r^\rho(1 + \frac{\ln(C_1C_2)}{M_1r^\rho}),$$

$$\ln\ln M(r) \le \rho\ln r + \ln M_1 + \ln(1 + \frac{\ln(C_1C_2)}{M_1r^\rho}).$$

Следовательно, порядок ρ_F целой функции $F(z)$ [11, с. 217] не превышает ρ:

$$\rho_F = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \le \rho.$$

С учетом (10) формулу (5) запишем так:

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| = \exp\{r^\rho(\nu^- \cos\rho(\pi-\theta) - \nu^+ \cos\rho\theta)/(2\sin\rho\pi)\}, \tag{17}$$

где $r > 0$, $0 \le \theta \le \pi$.

Отсюда при $\theta = 0$, когда $r = t > 0$, получаем:

$$|E^+(t)| = |E^-(t)| = \exp\{t^\rho(\nu^- \cos\rho\pi - \nu^+)/(2\sin\rho\pi)\},\ t > 0. \tag{18}$$

при $\theta = \pi$, когда $re^{\pm i\pi} = -|t| = t < 0$, будем иметь:

$$|E^+(t)| = |E^-(t)| = \exp\{|t|^\rho(\nu^- - \nu^+ \cos\rho\pi)/(2\sin\rho\pi)\},\ t < 0. \tag{19}$$

Теперь, принимая во внимание (15), (16), на основании (13) получаем:

$$\begin{cases} |F(t)| < C\exp\{t^\rho(\nu^- \cos\rho\pi - \nu^+)/(2\sin\rho\pi)\}, t > 0, \\ |F(t)| < C\exp\{|t|^\rho(\nu^- - \nu^+ \cos\rho\pi)/(2\sin\rho\pi)\}, t < 0, \end{cases} \tag{20}$$

где $C = \mathrm{const}$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если однородная задача* (2) *имеет ограниченные решения* $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, *то они представляются формулами*

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{E^+(z)}F(z),\ \Phi^-(z) = \frac{X^-(z)}{E^-(z)}F(z), \tag{21}$$

в которых $F(z)$ *— любая целая функция порядка* $\rho_F \le \rho$, *удовлетворяющая условию* (20).

Справедлива также обратная теорема.

Теорема 2. *Если* $F(z)$ *— любая целая функция порядка* $\rho_F \le \rho$, *удовлетворяющая условиям* (20)*, то ограниченные решения задачи* (2) *определяются формулами* (21).

В самом деле, используя указанную в этой теореме функцию $F(z)$, мы по формулам (21) находим функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, удовлетворяющие краевому условию (2).

Кроме того, согласно (18)–(21), замечая, что $X^+(t)$, $X^-(t)$ — ограниченные функции на L, получим для $t \in L$

$$\Phi^\pm(t) < \tilde{C} = \mathrm{const}.$$

Примем во внимание, что $X^+(z)$, $X^-(z)$ — функции, ограниченные в областях соответственно D^+, D^-

$$|X^\pm(z)| \le C_* = \mathrm{const}, \qquad z \in D^\pm, \tag{22}$$

согласно (17)

$$|E^+(re^{i\theta})|^{-1} = |E^-(re^{-i\theta})|^{-1} \le \exp\{r^\rho(|\nu^-| + |\nu^+|)/(2\sin\rho\pi)\}, \tag{23}$$

где $r > 0$, $0 \le \theta \le \pi$, кроме того,

$$|F(re^{i\theta})| < \exp\{r^{\rho_F+\varepsilon}\}, \qquad -\pi < \theta \le \pi,$$

для всех достаточно больших r, здесь $\varepsilon > 0$ — малое число, при котором $\rho_F + \varepsilon < \rho_1$, где ρ_1 — число, удовлетворяющее условию $\rho < \rho_1 < 1$.

Тогда с учетом (21)–(23) будем иметь:

$$|\Phi^\pm(re^{\pm i\theta})| \le \exp\{\ln C_* + r^\rho(|\nu^-| + |\nu^+|)/(2\sin\rho\pi) + r^{\rho_F+\varepsilon}\},$$
$$|\Phi^\pm(re^{\pm i\theta})| < \exp\{r^{\rho_1}\}, \quad 0 < \theta \le \pi,$$

для всех достаточно больших $r > r_\varepsilon$, поскольку для указанных $r > r_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\left(\ln C_* + r^\rho(|\nu^-| + |\nu^+|)/(2\sin\rho\pi) + r^{\rho_F+\varepsilon}\right)/r^{\rho_1} < 1.$$

Поэтому согласно теореме Фрагмена – Линделёфа [11, с. 206, 211] всюду в области $D^\pm$ будем иметь $|\Phi^\pm(z)| < \tilde{C}$. Теорема доказана. Утверждение теоремы 2 можно сформулировать также следующим образом.

Теорема 3. *Общее решение краевой задачи* (2) *в классе ограниченных функций выражается формулами* (21), *в которых* $F(z)$ *есть любая целая функция порядка* $\rho_F \le \rho$, *удовлетворяющая условиям* (20).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Полученный результат нуждается в уточнении в связи с тем, что в некоторых случаях однородная краевая задача (2) будет иметь только нулевое решение. В самом деле, пусть $\rho < 1/2$ и выполняется условие

$$\nu^- \cos\rho\pi - \nu^+ < 0,$$

в этом случае согласно (20) имеем:

$$\lim_{t\to+\infty} |F(t)| = 0,$$

и в силу теоремы Фрагмена – Линделёфа для полуплоскости с разрезом по положительной части действительной оси получим $F(z) = \mathrm{const} = 0$.

Такой же результат мы получим в случае $\rho < 1/2$, когда выполняется условие

$$\nu^- - \nu^+ \cos\rho\pi < 0.$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть $\rho < 1/2$, тогда однородная краевая задача* (2) *имеет только нулевое решение, если*

$$\nu^- \cos\rho\pi - \nu^+ < 0 \quad \textit{или} \quad \nu^- - \nu^+ \cos\rho\pi < 0.$$

Если $\rho < 1/2$ и выполняется условие

$$\begin{cases} \nu^- \cos\rho\pi - \nu^+ = 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos\rho\pi > 0, \end{cases} \tag{24}$$

где $\nu^- > 0$, или условие

$$\begin{cases} \nu^- - \nu^+ \cos\rho\pi = 0, \\ \nu^- \cos\rho\pi - \nu^+ > 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $\nu^+ < 0$, мы придем к заключению, что $F(z) = A = \mathrm{const}$, тогда на основании (21) получим искомое решение:

$$\Phi^+(z) = \frac{AX^+(z)}{E^+(z)},\ \Phi^-(z) = \frac{AX^-(z)}{E^-(z)}. \tag{26}$$

Итак, справедлива

Теорема 5. *Пусть $\rho < 1/2$. Если выполняются условия* (24) *или* (25)*, то однородная краевая задача* (2) *имеет решение, определяемое формулами* (26).

Пусть $\nu^- - \nu^+ < 0$. Тогда в силу (17) имеем:

$$|E^\pm(re^{\pm i\pi/2})| = \exp\bigl\{r^\rho(\nu^- - \nu^+)\cos\frac{\rho\pi}{2}/(2\sin\rho\pi)\bigr\} < 1$$

и $|E^\pm(re^{\pm i\pi/2})| \to 0$ при $r \to +\infty$. Тогда согласно (13), (15), (16) получим:

$$|F(re^{\pm i\pi/2})| \le C = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad |F(re^{\pm i\pi/2})| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

Поэтому в силу теоремы Фрагмена – Линделёфа, замечая, что $\rho_F < 1$, будем иметь $|F(z)| \le C$, как для $\operatorname{Re} z > 0$, так и для $\operatorname{Re} z < 0$, поэтому $|F(z)| \equiv C_1 = const = 0$. Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Если $\nu^- - \nu^+ < 0$, то краевая задача* (2) *имеет только нулевое решение при* $0 < \rho < 1$.

Пусть выполняются условия

$$\begin{cases} \nu^- \cos\rho\pi - \nu^+ > 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos\rho\pi > 0. \end{cases} \tag{27}$$

В этом случае имеем $\nu^- - \nu^+ > 0$, кроме того, при $\rho \ge 1/2$ будут справедливы неравенства $\nu^- > 0$, $\nu^+ < 0$. При выполнении неравенств (27) условия (20) имеют место для любой целой функции порядка $\rho_F < \rho$. Действительно, при любом ε, $0 < \varepsilon < \rho - \rho_F$ и $r > r_\varepsilon$, обозначая

$$\tilde\nu = \min\left\{\frac{\nu^- \cos\rho\pi - \nu^+}{2\sin\rho\pi},\ \frac{\nu^- - \nu^+\cos\rho\pi}{2\sin\rho\pi}\right\}, \qquad \tilde\nu > 0,$$

получим:

$$\max_{-\pi\le\theta\le\pi}|F(re^{i\theta})|<\exp\{r^{\rho_F+\varepsilon}\}=\frac{C\exp\{\tilde\nu r^{\rho}\}}{\exp\{\tilde\nu r^{\rho}+\ln C-r^{\rho_F+\varepsilon}\}},$$

где $C=\mathrm{const}>0$. Поэтому для всех достаточно больших r, для которых $r>r_\varepsilon$,

$$\tilde\nu+\ln C/r^{\rho}-\frac{1}{r^{\rho-\rho_F-\varepsilon}}>0,$$

будут выполняться неравенства

$$\max_{-\pi\le\theta\le\pi}|F(re^{\pm i\theta})|<C\exp\{\tilde\nu r^{\rho}\},$$

т. е. будет иметь место (20).

Следовательно, в рассматриваемом случае приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Если имеют место неравенства* (27)*, то общее решение однородной краевой задачи* (2) *в классе ограниченных функций определяется формулами* (21)*, в которых $F(z)$ есть любая целая функция порядка $\rho_F\le\rho$ и при $\rho_F=\rho$ удовлетворяющая соотношениям* (20) *для достаточно больших $|t|$.*

Пусть $\rho\ge 1/2$. Если обе разности левых частей неравенств (27) отрицательны или одна из них отрицательна, а другая неположительна, то будет выполняться условие $\nu^- -\nu^+<0$, и задача (2) в силу теоремы 6 будет иметь только нулевое решение; к такому же выводу мы придем в случае, когда выполняются неравенства

$$(\nu^-\cos\rho\pi-\nu^+)(\nu^- -\nu^+\cos\rho\pi)<0,$$
$$(\nu^-\cos\rho\pi-\nu^+)+(\nu^- -\nu^+\cos\rho\pi)<0,$$

так как в силу последнего неравенства имеем $\nu^- -\nu^+<0$.

В случае, когда при $\rho\ge 1/2$ выполняются соотношения

$$\begin{cases}(\nu^-\cos\rho\pi-\nu^+)(\nu^- -\nu^+\cos\rho\pi)<0,\\(\nu^-\cos\rho\pi-\nu^+)+(\nu^- -\nu^+\cos\rho\pi)\ge 0.\end{cases}\tag{28}$$

в формулах (21) под $F(z)$ нужно понимать целую функцию порядка $\rho_F=\rho$. В самом деле, при $1/2\le\rho_F<\rho$, когда выполняются соотношения (28) и, например, $\nu^-\cos\rho\pi-\nu^+<0$, поэтому $\nu^- -\nu^+\cos\rho\pi>0$, $\nu^- -\nu^+\ge 0$, согласно первому условию (20) будем иметь:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln|F(t)|}{t^{\rho_F}}=-\infty,$$

но тогда будет выполняться соотношение [12, с. 74, 75]

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\ln|F(t)|}{|t|^{\rho_F}}=-\infty,$$

при $\nu^- -\nu^+\cos\rho\pi<0$ рассуждения аналогичны. Следовательно, $F(t)\to 0$ при $t\to-\infty$ и $t\to+\infty$, поэтому $F(z)\equiv 0$, и по формулам (21) получаем нулевое решение задачи (2). При $\rho_F<1/2\le\rho$ условие $F(z)\equiv 0$ является следствием равенства $\nu^- -\nu^+\cos\rho\pi<0$ или $\nu^-\cos\rho\pi-\nu^+<0$. Таким образом, не нулевое решение этой задачи мы можем получить, считая $\rho_F=\rho$. Поэтому справедлива

Теорема 8. *Пусть $\rho\ge 1/2$ и выполняются неравенства* (28)*. Тогда общее решение однородной краевой задачи* (2) *в классе ограниченных функций определяется формулами* (21)*, в которых $F(z)$ есть любая целая функция порядка ρ, удовлетворяющая соотношениям* (20) *для достаточно больших $|t|$.*

Утверждение этой теоремы остается в силе для $\rho\ge 1/2$, если условия (28) заменить на соотношения

$$\nu^-\cos\rho\pi-\nu^+=0,\qquad \nu^- -\nu^+\cos\rho\pi>0$$

или

$$\nu^{-}\cos\rho\pi-\nu^{+}>0,\qquad \nu^{-}-\nu^{+}\cos\rho\pi=0.$$

В этих случаях под $F(z)$ нужно понимать любую целую функцию порядка $\rho_F \le \rho$, которая при $\rho_F<\rho$ условию (20) с положительной разностью в правой части удовлетворяет автоматически. Здесь надо учесть, что при $\rho=1/2$ решение задачи (2) будет определяться формулами (26), если в соотношениях (21) $F(z)$ означает целую функцию порядка ρ минимального типа [11, с. 256].

Приведенная выше картина разрешимости задачи содержит общие утверждения, но не полностью совпадает с полученной в работах [4, 5]. Причины такого отличия требуют отдельного рассмотрения; здесь надо принять во внимание, в частности, что в отдельных деталях постановок задач в настоящей статье и в последних цитированных работах имеются отличия, и это может отразиться на результатах исследования в задачах с бесконечным индексом.

Таким образом, используемый здесь подход позволяет сравнительно простыми средствами провести достаточно полное исследование однородной краевой задачи (2).

4. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим решение неоднородной задачи (1) при вышеуказанных условиях, которым удовлетворяют коэффициент $G(t)$ и свободный член $g(t)\in H_L$.

По аналогии с предыдущим условие (1) представим в виде

$$\Phi^{+}(t)E^{+}(t)=G_1(t)\Phi^{-}(t)E^{-}(t)+E^{+}(t)g(t), \tag{29}$$

где $G_1(t)$ — функция, определяемая по формулам (7), (9), и принимая во внимание соотношение (12), связывающее функции (11), краевое условие (29) запишем так

$$\Phi^{+}(t)\frac{E^{+}(t)}{X^{+}(t)}=\Phi^{-}(t)\frac{E^{-}(t)}{X^{-}(t)}+\frac{E^{+}(t)}{X^{+}(t)}g(t). \tag{30}$$

При $\nu^{-}\cos\rho\pi-\nu^{+}>0$, $\nu^{-}-\nu^{+}\cos\rho\pi>0$, как это видно из формул (18), (19), $|E^{+}(t)|\to\infty$ при $t\to\infty$, следовательно, в указанном случае на основании (30) не удается непосредственно найти искомые функции $\Phi^{\pm}(z)$, поступая, как это сделано в [2, с. 120]; появляется необходимость устранить отмеченную особенность функции $E^{+}(t)$ в соотношении (30). Нетрудно убедиться в том, что в случае, когда вышеуказанные разности формул (18), (19) отрицательны и $E^{\pm}(t)$ обращаются в нуль в точке $t=\infty$, целесообразно в условии (30) эти нули устранить. Покажем, что упомянутой цели можно добиться, деля соотношение (30) на значения в точках L целой функции $F_0(z)$ с нужными свойствами. Возьмем целую функцию

$$F_0(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_k e^{i\theta_0}}\right), \tag{31}$$

в которой θ_0 — фиксированная величина, $0<\theta_0<\pi$, $\{r_k\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, которая будет определена ниже. Примем, что порядок этой функции равен ρ (т. е. показатель сходимости ее нулей равен ρ). Предположим, что существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\rho}}=\Delta,\qquad 0<\Delta<\infty,$$

где $n(r)$ — число нулей функции $F_0(z)$ в круге $|z|\le r$. Логарифмируя равенство (30), получим ряд

$$\ln F_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{z}{r_k e^{i\theta_0}}\right),$$

причем под $\arg(1+z/r_k e^{i\theta_0})$ будем понимать ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z=re^{i(\theta_0+\pi)}$, $r>r_k$, принимающую нулевое значение на луче $z=te^{i\theta_0}$, $-r_k<t<+\infty$. Поступая аналогично тому, как это сделано в статье [13], получим:

$$\ln F_0(z)=ze^{-i\theta_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{n(x)dx}{x(x+ze^{-i\theta_0})}.$$

Отсюда, замечая, что

$$z\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\rho}(x+z)} = \frac{\pi z^\rho}{\sin\rho\pi}, \qquad -\pi < \arg z < \pi,$$

заменяя здесь z на $ze^{-i\theta_0}$, будем иметь:

$$\ln F_0(z) = \frac{\pi\Delta(ze^{-i\theta_0})^\rho}{\sin\rho\pi} + ze^{-i\theta_0}\int_0^\infty \frac{n(x)-\Delta x^\rho}{x(x+ze^{-i\theta_0})}\,dx, \tag{32}$$

где $-\pi+\theta_0 < \arg z < \pi+\theta_0$.

Поступая, как в книге [3, с. 127] и статье [13], примем:

$$n(x) = [\Delta x^\rho + 1/2],\ \ r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta}\right)^{1/\rho}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

здесь в первой формуле правая часть означает целую часть стоящей там суммы, тогда будем иметь:

$$\left|\int_0^\zeta \Big(n(x) - \Delta x^\rho\Big)x^{\rho-1}dx\right| < C = \mathrm{const}, \qquad 0 < \zeta < \infty. \tag{33}$$

Рассмотрим свойства входящей в формулу (32) функции

$$I(z,\theta_0) = ze^{-i\theta_0}\int_0^\infty \frac{n(x)-\Delta x^\rho}{x(x+ze^{-i\theta_0})}dx. \tag{34}$$

При $t > 0$ имеем:

$$I(t,\theta_0) = te^{-i\theta_0}\int_0^\infty \frac{n(x)-\Delta x^\rho}{x(x+te^{-i\theta_0})}\,dx, \tag{35}$$

поэтому

$$\frac{dI(t,\theta_0)}{dt} = \frac{e^{-i\theta_0}}{t^{\rho+1}}\int_0^\infty (n(x)-\Delta x^\rho)x^{\rho-1}[U(x/t,\theta_0) + iV(x/t,\theta_0)]\,dx, \tag{36}$$

где для $x/t = x_1$ имеем:

$$U(x_1,\theta_0) = \frac{x_1^{-\rho+1}(x_1^2 + 2x_1\cos\theta_0 + \cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)}{(x_1^2+2x_1\cos\theta_0+1)^2}, \qquad V(x_1,\theta_0) = \frac{2x_1^{-\rho+1}(x_1+\cos\theta_0)\sin\theta_0}{(x_1^2+2x_1\cos\theta_0+1)^2}.$$

Нас интересует поведение интеграла $I(t,\theta_0)$ при $t\to\infty$. В связи с этим в формулах (35), (36) будем считать $t > r_1$. Тогда для $0 < x < \infty$ будем иметь $0 < x_1 < \infty$. В последнем интервале функции $U(x_1,\theta_0)$, $V(x_1,\theta_0)$ непрерывны, обращаются в ноль при $x_1 = 0$,

$$\lim_{x_1\to\infty} U(x_1,\theta_0) = 0,\ \ \lim_{x_1\to\infty} V(x_1,\theta_0) = 0,$$

последние соотношения справедливы при любом фиксированном $t > r_1$ и $x\to\infty$.

Легко проверить, что в интервале $0 < x_1 < \infty$ функции $U(x_1,\theta_0)$ и $V(x_1,\theta_0)$ имеют не более шести и пяти экстремумов соответственно, поэтому существуют конечные значения $\max\limits_{0<x_1<\infty}|U(x_1,\theta_0)|$ и $\max\limits_{0<x_1<\infty}|V(x_1,\theta_0)|$, независящие от t при фиксированной величине θ_0. Учитывая это и принимая во внимание (33), на основании результатов [3, с. 127, 128] придем к заключению, что действительная и мнимая части интеграла формулы (36) являются ограниченными функциями от t, поэтому в силу последней формулы (36)

$$\left|\frac{d\,\mathrm{Re}\,I(t,\theta_0)}{dt}\right| < \frac{\mathrm{const}}{t^{\rho+1}}, \qquad \left|\frac{d\,\mathrm{Im}\,I(t,\theta_0)}{dt}\right| < \frac{\mathrm{const}}{t^{\rho+1}},$$

и $\mathrm{Re}\,I(t,\theta_0)$, $\mathrm{Im}\,I(t,\theta_0)$ удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности точки $t = +\infty$.

Полагая в формуле (34) $z = te^{i\pi}$, $t > 0$, получим $I(te^{i\pi}, \theta_0) = I(-t, \theta_0) = I(t, \theta_0 - \pi)$. Поэтому $\operatorname{Re} I(-t, \theta_0)$, $\operatorname{Im} I(-t, \theta_0)$ удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности точки $-t = -\infty$.

На основании формул (32), (34) имеем:

$$\ln F_0(z) = \frac{\pi\Delta(ze^{-i\theta_0})^\rho}{\sin\rho\pi} + I(z, \theta_0), \tag{37}$$

где $-\pi + \theta_0 < \arg z < \pi + \theta_0$.

Отсюда видно, что на любой конечной части действительной оси L, не содержащей окрестности точки $t = 0$, $I(t, \theta_0)$, $t \in L$ представляет собой значения аналитической функции, а в окрестности точки $t = 0$ удовлетворяет условию Гёльдера, поэтому $I(t, \theta_0) \in H_L$. Следовательно, $I(z, \theta_0)$ является ограниченной функцией на всей действительной оси L.

Используя функцию $F_0(z)$, условие (30) представим в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}\frac{E^+(t)}{F_0(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}\frac{E^-(t)}{F_0(t)} + \frac{E^+(t)}{F_0(t)}\frac{g(t)}{X^+(t)},$$

считаем, что функция $\Phi^-(z)$ имеет те же нули, что и $F_0(z)$. Согласно формулам (4), (37) имеем:

$$\frac{E^+(z)}{F_0(z)} = \frac{\exp\{(\alpha + i\beta)z^\rho\}}{\exp\{\frac{\pi\Delta(z^{-i\theta_0})^\rho}{(\sin\rho\pi)}\}}\exp\{-I(z, \theta_0)\}, \qquad 0 \le \arg z \le \pi. \tag{38}$$

Выберем величины Δ, θ_0 так, чтобы

$$\alpha + i\beta = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi}e^{-i\rho\theta_0}, \tag{39}$$

т. е. чтобы

$$\alpha = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi}\cos\rho\theta_0, \qquad \beta = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi}\sin\rho\theta_0,$$

отсюда с учетом (10) будем иметь:

$$\begin{cases} \Delta\cos\rho\theta_0 = \dfrac{\nu^-\cos\rho\pi - \nu^+}{2\pi}, \\ \Delta\sin\rho\theta_0 = \dfrac{\nu^-\sin\rho\pi}{2\pi}. \end{cases} \tag{40}$$

Мы получим систему уравнений с неизвестными Δ, θ_0. Из этой системы вначале, исключая $\rho\theta_0$, определим

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\Big((\nu^-)^2 - 2\nu^-\nu^+\cos\rho\pi + (\nu^+)^2\Big)^{1/2}. \tag{41}$$

Пусть выполняются неравенства

$$\nu^-\cos\rho\pi - \nu^+ > 0, \qquad \nu^- > 0. \tag{42}$$

Тогда согласно формулам (40) будем иметь:

$$0 < \rho\theta_0 < \frac{\pi}{2}, \tag{43}$$

и из второго уравнения(40) находим

$$\rho\theta_0 = \arcsin\Big(\frac{1}{2\Delta\pi}\nu^-\sin\rho\pi\Big).$$

При $\rho \ge 1/2$ из (43) получаем $0 < \theta_0 < \pi$. В случае $\rho < 1/2$ будем считать, что $\nu^+ < 0$ и выполняются условия (42). При этом в силу (41) будем иметь $\nu^-/2\pi\Delta < 1$, тогда согласно второму уравнению (40) $0 < \rho\theta_0 < \rho\pi$ и $0 < \theta_0 < \pi$.

В силу соотношений (40), равносильных (39) формула (38) при $z = t \in L$ дает

$$\frac{E^+(t)}{F_0(t)} = e^{-I(z,\theta_0)} \in H_L, \tag{44}$$

поэтому

$$\left(\frac{E^+(t)}{F_0(t)}\frac{g(t)}{X^+(t)}\right) \in H_L.$$

Применяя метод Ф. Д. Гахова [2, с. 118–121] и вводя аналитическую функцию, определяемую формулой

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{E^+(t)}{F_0(t)}\frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{t-z}, \tag{45}$$

приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi^+(z)}{X^+(z)}\frac{E^+(z)}{F_0(z)} = \Psi(z), \quad z \in D^+, \\ \dfrac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}\frac{E^-(z)}{F_0(z)} = \Psi(z), \quad z \in D^-, \end{cases} \tag{46}$$

из которых находятся выражения для частных решений $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ неоднородной задачи (1). Эти решения являются ограниченными в соответствующих областях. Здесь надо учесть, что согласно (44) имеем

$$\left|\frac{F_0(t)}{E^+(t)}\right| = e^{ReI(t,\theta_0)} \in H_L, \tag{47}$$

поэтому $F_0(t)/E^+(t)$ — ограниченная на L функция. Порядок функции $F_0(z)/E^+(z)$ в области D^+ $(0 \le \arg z \le \pi)$ не превышает ρ_1, $\rho < \rho_1 < 1$, отсюда следует, что функция $F_0(z)/E^+(z)$ является ограниченной в области D^+ [12, с. 69]. Замечая, что

$$\left|\frac{F_0(t)}{E^-(t)}\right| = \left|\frac{F_0(t)}{E^+(t)}\right| \in H_L,$$

аналогично придем к заключению, что $F_0(z)/E^-(z)$ есть функция ограниченная в области D^-.

Общее решение неоднородной задачи (1) представляется как сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной задачи.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 9. *Если выполняются неравенства* (42) *при* $\rho \ge 1/2$ *или неравенства* (42) *и* $\nu^+ < 0$ *при* $\rho < 1/2$, *то формулы* (45), (46) *определяют ограниченное частное решение неоднородной задачи* (1).

Библиографический список

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.

2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.

3. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 239 с.

4. *Толочко М. Э.* О разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. науки. 1972. № 5. С. 34–41.

5. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, № 10. С. 872–875.

6. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 544–547.

7. *Алехно А. Г.* Достаточные условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Тр. Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2002. Т. 14. С. 71–77.

8. *Гарифьянов Ф. Н.* Об одном особом случае задачи Римана // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1984. № 22. С. 66–68.

9. *Кац Б. А.* Об одной задаче Римана с осциллирующим коэффициентом // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1977. № 14. С. 110–120.

10. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Метод регуляризующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом // Изв. вузов. Математика. № 4. 2001. С. 76–79.

11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1968. Т. 2. 624 с.

12. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

13. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 5. С. 724–734.

The New Approach to Solving the Riemann Boundary Value Problem with Infinite Index

R. B. Salimov, E. N. Karabasheva

Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya str., 420043, Kazan, Tatarstan, Russia, salimov@5354.ru, enkarabasheva@bk.ru

This research considers Riemann – Hilbert boundary value problem with infinite index where edge condition of problem is established by the real axis. To solve this problem the approach based on the removal of the infinite discontinuity of the argument of boundary condition coefficient is used. The approach is analogous to the one which, in the context of the finite index of the problem in researches by F. D. Gakhov, helps to remove a discontinuity of initial genre of boundary condition coefficient with specially created functions, different from the ones in this research.

Key words: Riemann boundary value problem, analytical function, infinite index.

References

1. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka, 1968, 511 p. (in Russian).
2. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
3. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).
4. Tolochko M. E. About the solvability of the homogeneous Riemann boundary value problem for the half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 1972, no. 5, pp. 34–41 (in Russian).
5. Sandrygailo I. E. On Hilbert – Rieman boundary value problem for half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1974, no. 6, pp. 872–875 (in Russian).
6. Monahov V. N., Semenko E. V. Boundary value problem with infinite index in Hardy spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 544–547 (in Russian).
7. Alehno A. G. Sufficient conditions for the solvability of homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*, Kazan, 2002, vol. 14, pp. 71–77 (in Russian).
8. Garifianov F. N. About a special case of the Riemann problem. *Trydu seminara po kraevum zadacham*. Kazan, 1984, no 22, pp. 66–68 (in Russian).
9. Katc B. A. About Riemann problem with an oscillating coefficient. *Trydu seminara po kraevum zadacham*. Kazan, 1977, no. 14, pp. 110–120 (in Russian).
10. Salimov R. B., Shabalin P. L. The regularizing factor method for solving a homogeneous Hilbert problem with an infinite index. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2001, vol. 45, iss. 4, pp. 74–77.
11. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions : in 2 vol.* Moscow, Nauka, 1968, vol. 2, 624 p. (in Russian).
12. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostechizdat, 1956, 632 p. (in Russian).
13. Salimov R. B., Shabalin P. L. Solution of the Hilbert Problem with infinite index. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, iss. 5, pp. 680–689. DOI: 10.4213/mzm221.

УДК 517.538.7

РАСХОДИМОСТЬ ВСЮДУ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

С. В. Тышкевич[1], А. В. Шаталина[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tyszkiewicz@yandex.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, teh-plast@bk.ru

Изучаются вопросы сходимости интерполяционных процессов Лагранжа в замкнутом единичном круге. Выбор матрицы с определённым распределением узлов интерполирования позволил построить множество, полностью покрывающее единичную окружность, и функцию, для которой процесс расходится всюду на этом множестве.

Ключевые слова: интерполирование, полиномы Лагранжа.

Пусть AC — множество функций $f(z)$, аналитических в $|z| < 1$ и непрерывных в $|z| \leqslant 1$, с обычным модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$ и равномерной нормой; Ω — множество функций ω типа модуля непрерывности, Ω_0 — функции $\omega \in \Omega$, для которых

$$\lim_{\delta\to 0+} \frac{\delta}{\omega(\delta)} = 0.$$