G. M. Zhislin, The essential spectrum of many-particle systems in magnetic fields,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 1, 127–136

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 1

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

© Г. М. Жислин

1. Проблема локализации существенного спектра многочастичных систем в магнитном и внешнем потенциальном полях изучалась в работах [1–3].

При наличии внешнего потенциального поля решение этой задачи не представляет трудностей [1, 2]). Мы не рассматриваем этот случай и будем всюду предполагать присутствие только магнитного поля.

Случай однородного магнитного поля был изучен в [1]. Было показано, что возможны две различные ситуации:

i) Отношение k_t/e_t массы и заряда частиц нашей системы не зависит от номера t частицы. В этом случае возможно отделить движение центра масс (ц.м.) в пространстве R^3 и затем доказать теорему о локализации существенного спектра энергии относительного движения в обычной формулировке (ХВЖ-теорема).

ii) Отношение k_t/e_t зависит от t. В этом случае отделение движения центра масс возможно лишь в направлении магнитного поля.

Для нахождения существенного спектра оператора H_o, полученного после такого отделения, в [1] был предложен метод фиксации псевдомомента и для каждого фиксированного значения псевдомомента была доказана теорема о локализации существенного спектра H_o.

В [2] изучались случаи растущего и однородного магнитного поля. Для растущего поля теорема о локализации существенного спектра n-частичного гамильтониана в магнитном поле доказана в обычной формулировке ХВЖ-теоремы без фиксации псевдомомента. Для однородного (и слабо убывающего) магнитного поля в [2] предложено использование $SO(2)$-симметрии (вместо фиксации псевдомомента), и теорема о локализации доказана в пространствах с фиксированным типом $SO(2)$-симметрии для систем частиц с зарядами одного знака.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 94-01-01376) и Международного научного фонда (грант R 94000).

Системы частиц с зарядами произвольных знаков в однородном магнитном поле изучены в работе [3], где теорема о локализации доказана на пространстве с заданной $SO(2)$ симметрией для не нейтральных систем.

В настоящей работе мы возвращаемся к результатам статьи [2]. Мы проясним основную физическую идею, лежащую в основе математического доказательства в [2] и затемненную в [2] техническими деталями. Мы продемонстрируем также, что требования теоремы 1 в [2] достаточны для справедливости более общих и естественных утверждений. Мы сформулируем эти утверждения и покажем, что доказательство [2] справедливо и для них. Некоторые нерешенные проблемы рассматриваются в конце статьи.

Ради упрощения будем пренебрегать перестановочной симметрией, поскольку учет ее может быть проведен аналогично тому, как это сделано в [2].

2. Рассмотрим $D_1 = (1, \dots, n)$ — n-частичную квантовую систему в магнитном поле, направленном вдоль оси z и не зависящем от z. Можно отделить движение центра масс этой системы в направлении оси z и затем записать оператор энергии этой системы в виде

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j}(i\nabla_{\rho_j} + e_j a_j)^2 - \Delta_{03} + \sum_{s<t}^{1,n} V_{st}(|r_{st}|),$$

где $\rho_j = (x_j, y_j)$; $r_j = (\rho_j, z_j)$, k_j, e_j — координаты, масса и заряд j-й частицы; $r_{st} = r_s - r_t$; Δ_{03} — оператор $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2}$ на подпространстве

$$R_{03} = \left\{ Z \mid Z = (z_1, \dots, z_n),\ \sum_{t=1}^{n} k_t z_t = 0 \right\}$$

относительного движения в направлении z, снабженном новым скалярным произведением

$$(Z, \widetilde{Z})_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i z_i \widetilde{z}_i;$$

$\nabla_{\rho_j} = (\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j})$; $a_j = a(\rho_j) = (B_1(\rho_j), B_2(\rho_j), 0)$ — магнитный вектор-потенциал.

Мы предполагаем, что функции $B_j(\rho_1)$, $V_{st}(|r_1|)$ вещественны, принадлежат пространствам $L_{2,\mathrm{loc}}(R^2)$ и $L_{2,\mathrm{loc}}(R^3)$, соответственно, $B_j(\rho_1) \in C^1$ и $V_{st}(|r_1|)) \to 0$ при $|r_1| \to \infty$.

Пусть $R_\rho = \{\rho \mid \rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)\}$, $R_0 = \{r \mid r = (r_1, \dots, r_n),\ z_1, \dots, z_n \in R_{03}\}$, и H_0 — самосопряженное расширение оператора H в $L_2(R_0)$. Будем обозначать $\sum(A)$, $\sum_{\mathrm{ess}}(A)$, $\sum_d(A)$ спектр, существенный спектр и дискретный спектр произвольного оператора A.

Наша цель — определить положение $\sum_{\mathrm{ess}}(H_0)$.

3. Опишем физические идеи, стоящие за доказательствами в [2] и теоремами 1 и 2 данной работы.

Мы знаем, что для каждой точки $\lambda \in \sum_{\text{ess}}(H_0)$ существует такая последовательность функций ψ_s (последовательность Вейля), что

$$\|H_0\psi_s - \lambda\psi_s\| \to 0 \quad \text{при } s \to \infty, \ \|\psi_s\| = 1 \tag{1}$$

и ψ_s слабо сходится к нулю в $L_2(R_0)$.

Поскольку $\lim_{s\to\infty}(H_0\psi_s, \psi_s) = \lambda$, можно написать

$$\mu := \inf \sum\nolimits_{\text{ess}}(H_0) = \min_{\{\psi_s\}\in\mathcal{W}_0} \big(\lim_{s\to\infty}(H_0\psi_s, \psi_s)\big), \tag{2}$$

где $\mathcal{W}_0$ — класс всех последовательностей Вейля для оператора H_0. По теореме вложения, для некоторой подпоследовательности из ψ_s (мы сохраняем обозначение ψ_s) и любой компактной области Ω

$$\int\limits_{\Omega} |\psi_s|^2 dR_0 \to 0 \quad \text{при } s \to \infty. \tag{3}$$

Это означает, что каждая последовательность Вейля есть последовательность состояний, описывающих уход нашей системы из любой компактной области конфигурационного пространства.

Следовательно, для последовательности Вейля ψ_s существуют две возможности:

I. ψ_s описывает некоторое распадение (или суперпозицию разбиений) нашей системы;

II. ψ_s описывает движение системы как целого (т.е. движение центра масс).

4. Рассмотрим случай I. Поскольку любое распадение начальной системы D_1 можно представить как распадение на два кластера, то в случае I мы можем сказать, что последовательность Вейля ψ_s описывает распадение $D_2 = (C_1, C_2)$ (или некоторую суперпозицию таких распадений) системы D_1 на кластеры $C_1, C_2 \subset D_1$, $C_1 \cup C_2 = D_1$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Положим

$$H(D_2) = H_0 - \sum_{s\in C_1, t\in C_2} V_{st}(r_{st}).$$

$H(D_2)$ — оператор энергии двухкластерной системы $D_2 = (C_1, C_2)$ при невзаимодействующих друг с другом кластерах. По приведенным выше причинам, для $\{\psi_s\} \subset \mathcal{W}_0$

$$\lim_{s\to\infty}(H_0\psi_s, \psi_s) \ge \min_{D_2} \inf H_0(D_2).$$

Пусть

$$\mu' = \min_{D_2} \inf H_0(D_2). \tag{4}$$

В силу (2), (3)

$$\mu \geq \mu' \tag{5}$$

Далее, для системы D_2 третья координата центра масс фиксирована, так как центры масс D_2 и D_1 совпадают, но z-координата центра масс кластера $C_1(C_2)$ не является фиксированной. Именно поэтому оператор $H(D_2)$ имеет только существенный спектр, так как спектр относительного движения системы D_2 покрыт непрерывным энергетическим спектром движения кластеров C_1 и C_2 относительно друг друга в направлении оси z. Пусть $\phi_s(r)$ — последовательность Вейля для оператора $H(D_2)$, соответствующая такому движению. Для этой последовательности

$$\|H_0\phi_s - H(D_2)\phi_s\| \to 0, \quad s \to \infty. \tag{6}$$

Следовательно, $\sum_{\text{ess}}(H(D_2)) \subseteq \sum_{\text{ess}}(H_0)$. В силу (5) и (6)

$$\mu = \mu'$$

и $\sum_{\text{ess}}(H_0) = [\mu, +\infty)$.

Вышеприведенные соображения и являются основой математических доказательств теорем о локализации существенного спектра при рассмотрении случая I.

5. Обратимся теперь к случаю II. Если последовательность ψ_s из $\mathcal{W}_0$ описывает движение системы как целого, то неравенство (5) может не выполняться, т.е. начало существенного спектра H_0 может и не быть связано с некоторым распадением системы.

Поэтому мы можем надеяться доказать теорему о локализации существенного спектра в случае I, а в случае II подобных надежд нет. В этом причина того, что мы сводим проблему локализации существенного спектра к доказательству невозможности случая II при некоторых условиях, налагаемых на магнитное поле.

6. Поскольку z-координата ц.м. фиксирована в пространстве R_0, для исключения случая II необходимо доказать невозможность движения центра масс только в плоскости x, y. Ясно, что такое движение не реализуется, если оно приводит к неограниченному росту кинетической энергии системы. Чтобы получить условия такого роста, рассмотрим операторы A_j и A кинетической энергии движения в плоскости x, y для j-й частицы и для всей системы:

$$A_j = \frac{1}{k_j}\left(i\nabla_{\rho_j} + e_j a_j\right)^2, \quad A = \sum_{j=1}^{n} A_j.$$

Предположим, что оператор A имеет лишь дискретный спектр, т.е. оператор $A_0 := (A+I)^{-1}$ компактен. В следующем разделе мы покажем, что если последовательность соответствует движению центра масс в плоскости x, y, то

$$\lim_{s\to\infty}(A\psi_s, \psi_s) = +\infty. \tag{7}$$

Следовательно, такая последовательность не может быть последовательностью Вейля и случай II исключен при $\sum(A) = \sum_d(A)$.

7. Пусть $\psi_s(r)$ — некоторая нормированная последовательностью функций из области определения оператора A, описывающего движение центра масс в плоскости x, y. Обозначим через $\rho_c = \sum_{t=1}^n k_t\rho_t / \sum_{t=1}^n k_t$ координаты центра масс в R_ρ. Тогда

$$\int\limits_{|\rho_c|<N} |\psi_s|^2 dR_0 \to 0 \quad \text{при } s\to\infty \tag{8}$$

для любого $N > 0$. Имеем $\psi_s = \sum_{t=1}^\infty f_{st}(Z)u_t(\rho)$ и

$$(A\psi_s, \psi_s) = \sum_{t=1}^\infty \lambda_t \|f_{st}(Z)\|^2, \tag{9}$$

где λ_t и $u_t(\rho)$ — собственные значения и собственные функции оператора A, $\lambda_t \to +\infty$ при $t\to\infty$,

$$f_{st}(Z) = (\psi_s, u_t)_{R_\rho}, \qquad \sum_{t=1}^\infty \|f_s(Z)\|^2_{R_{03}} = \|\psi_s\|^2 = 1.$$

Из (8) для фиксированного t получаем

$$\|f_{st}(Z)\| \to 0 \quad \text{при } s\to\infty,$$

и в силу (9)

$$\lim_{s\to\infty}(A\psi_s, \psi_s) \geq \lim \sum_{t=1}^\infty \lambda_t \|f_{st}\| \geq \lambda_N$$

для любого $N \geq 1$. Таким образом, неравенство (7) доказано.

8. Теперь мы можем сформулировать первый результат.

Теорема 1. *Если оператор* $A_0 = (A+I)^{-1}$ *компактен, то* $\sum_{\mathrm{ess}}(H_0) = [\mu, +\infty)$, *где число* $\mu = \mu'$ *определено в* (4).

Достаточные условия компактности оператора A_0 получены в [1]:

$$|\Phi(\rho_1)| := \left|\frac{\partial B_2(\rho_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1(\rho_1)}{\partial y_1}\right| \to \infty \quad \text{при } \rho_1 \to \infty. \tag{10}$$

Здесь $B_1(\rho_j)$, $B_2(\rho_j)$ — компоненты вектора $a_j = (B_1(\rho_j), B_2(\rho_j), 0)$ и $\Phi(\rho_j)$ — магнитное поле, для которого a_j есть соответствующий магнитный вектор-потенциал (см. п. 2).

Ясно, что рост магнитного поля не даст возможности системе стремиться к бесконечности в плоскости x, y; следовательно, в ситуации (10) случай II (п. 3) невозможен.

Заметим, что в специальном случае магнитного вектор-потенциала

$$a_j = B(|\rho_j|)(-y_j, x_j, 0) \tag{11}$$

условие (10) имеет простой вид:

$$|2B(t) + B'(t)| \to +\infty \quad \text{при } t \to \infty. \tag{12}$$

9. Мы можем ослабить условия теоремы, если магнитный вектор-потенциал a_j имеет $SO(2)$-симметрию. Наиболее общая форма такого потенциала задается соотношением (11); в дальнейшем мы будем предполагать, что a_j имеют вид (11). Пусть $SO(2)$ — группа вращений вокруг оси z, m — вес неприводимого представления этой группы и $P^{(m)}$ — проектор в $L_2(R_0)$ и в $L_2(R_\rho)$ на подпространство функций симметрии m.

Оператор $P^{(m)}$ коммутирует с операторами H_0, A, $A_0, H(D_2)$, и поэтому мы можем рассмотреть ограничения этих операторов на подпространства функций и m. Положим

$$H_0^{(m)} = P^{(m)} H_0, \qquad H^{(m)}(D_2) = P^{(m)} H(D_2),$$
$$A_0^{(m)} = P^{(m)} A_0 = (A^{(m)} + I)^{-1} \qquad A^{(m)} = P^{(m)} A.$$

Ясно, что

$$H_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_0^{(m)}.$$

10. Положим $\mu^{(m)} = \inf \sum_{\text{ess}}(H_0^{(m)})$, $\mu'^{(m)} = \min_{D_2} \inf H^{(m)}(D_2)$ и повторим рассуждения пп. 3–7, беря $H_0^{(m)}$, $H^{(m)}(D_2)$, $\mu^{(m)}$, $\mu'^{(m)}$, $A^{(m)}$, $A_0^{(m)}$ вместо H_0, $H(D_2)$, μ, μ' и т. д. Видно, что если оператор $A_0^{(m)}$ компактен, то последовательность Вейля для оператора $H_0^{(m)}$ не может описывать движение всей системы. Следовательно, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Если оператор* $A_0^{(m)} = (A^{(m)} + I)^{-1}$ *компактен, то*

$$\sum\nolimits_{\text{ess}}(H_0^{(m)}) = [\mu^{(m)}, +\infty).$$

Достаточные условия компактности оператора $A_0^{(m)}$ даются соотношениями:

$$\text{(i)}\quad t|B(t)| \to \infty \text{ при } t \to +\infty; \qquad \text{(ii)}\quad e_p e_s > 0,\ p, s = 1, \dots, n. \tag{13}$$

Сравним условия (10), (12), (13). Условие (10) (или (12)) гарантирует дискретность спектра одночастичного оператора A_j в $L_2(R_{\rho_j})$, $R_{\rho_j} = \{x_j, y_j\}$ (см. п. 6) и, следовательно, дискретность спектра оператора $A = \sum_{j=1}^n A_j$ (компактность оператора A_0).

Более слабое условие (13i) гарантирует дискретность спектра оператора A_j только в пространстве $P^{(m_j)} L_2(R_{\rho_j})$ для произвольного фиксированного значения магнитного квантового числа m_j и в пространстве

$$\sum_{m'=0}^{\infty} P^{(\alpha_j m')} L_2(R_{\rho_j}), \quad \text{где } \alpha_j = \lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn}(B(t) e_j).$$

К сожалению, задавая общее m для всей системы D_1, мы не можем фиксировать числа m_j для каждой частицы; мы фиксируем только сумму $\sum_{j=1}^n m_j = m$. Поэтому условие (13i) не является достаточным для компактности оператора $A_0^{(m)}$, в отличие от всего условия (13).

11. Для того чтобы понять роль условия (13ii), рассмотрим двухчастичную систему в однородном магнитном поле ($B(\rho_j) = \text{const}$). Мы знаем, что каждый одночастичный оператор A_j имеет чисто точечный спектр (уровни Ландау)

$$\lambda_0(j) < \lambda_1(j) < \dots < \lambda_p(j) < \dots,$$

где $\lambda_p(j) \to +\infty$ при $p \to \infty$, и все $\lambda_p(j)$ бесконечно вырождены относительно магнитного квантового числа m_j. Характер этого вырождения зависит от знака заряда e_j частицы с номером j. Если $e_j > 0$ ($e_j < 0$), то $\lambda_p(j)$ имеет бесконечное вырождение относительно отрицательного (положительного) m_j

и конечное вырождение для положительного (отрицательного) m_j. Для данного m_j оператор $A_j^{(m_j)} = P^{(m_j)}A_j$ имеет простой спектр и

$$\inf A_j^{(m_j)} = \lambda_0^{(m_j)}(j) \to +\infty \quad \text{при } m_j \operatorname{sgn} e_j \to +\infty. \tag{14}$$

Далее, каждое собственное значение $\lambda^{(m)}$ оператора $A^{(m)}$ есть сумма некоторых собственных значений $\lambda_{t_j}^{(m_j)}(j)$ операторов $A_j^{(m)}$:

$$\lambda^{(m)} = \lambda_{t_1}^{(m_1)}(1) + \lambda_{t_2}^{(m_2)}(2). \tag{15}$$

Если $e_1 > 0$, $e_2 < 0$, то собственные значения $\lambda_{t_j}(j)$ бесконечно вырождены относительно отрицательного m_j при $j = 1$ и относительно положительного m_j при $j = 2$, и существует бесконечное число таких $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$, что $m_1 + m_2 = m$. Это означает, что $\lambda^{(m)}$ бесконечно вырождены несмотря на то, что m фиксировано; таким образом, оператор A_0 не компактен. Если $e_1 > 0$, $e_2 > 0$ (или $e_1 < 0$, $e_2 < 0$), т. е. (13ii) выполняется, такая ситуация невозможна. Действительно, бесконечное вырождение собственного значения $\lambda^{(m)}$ может реализоваться, только если существует бесконечное число пар m_{1i}, m_{2i}, $i = 1, 2$, для которых

$$\lambda_{t_{1i}}^{(m_{1i})}(1) + \lambda_{t_{2i}}^{(m_{2i})}(2) = \lambda^{(m)}, \quad m_{1i} + m_{2i} = m.$$

Это означает, что одно из чисел m_{ji}, $j = 1, 2$, стремится к $+\infty$, а другое к $-\infty$ при $i \to \infty$, что противоречит (14), поскольку при $e_1 > 0$, $e_2 > 0$, $e_1 < 0$, $e_2 < 0$ никакие m_1, m_2 не могут стремиться к $+\infty$ $(-\infty)$.

Поэтому условие (13ii) гарантируют компактность оператора $A_0^{(m)}$ для случая однородного магнитного поля. Для неоднородного магнитного поля условие (13ii) играет ту же роль, если выполняется (13i).

12. Доказательство утверждений теорем 1, 2 дано в [2] при условиях (12), (13). Но фактически доказательство в [2] использует лишь компактность операторов A_0 или $A_0^{(m)}$. Следовательно, это доказательство работает также и для теорем 1 и 2.

13. Требование компактности оператора A_0 (или $A_0^{(m)}$) очень жесткое и не является необходимым для утверждений теорем 1 и 2. На самом деле это требование запрещает последовательности Вейля ψ_s не только описывать движение центра масс в плоскости x, y (см. уравнение (8)), но также соответствовать любому распадению в этой плоскости. Действительно, если ψ_s, $\|\psi_s\| = 1$, описывает некоторое распадение в плоскости x, y, то

$$\int\limits_{|\rho|<N} |\psi_s|^2 dR_0 \to 0, \quad s \to \infty, \tag{16}$$

для любого $N > 0$. Но тогда можно показать (так же как в п. 7), что

$$\lim_{s\to\infty}(A\psi_s, \psi_s) = +\infty \quad (\text{или} \lim_{s\to\infty}(A^{(m)}\psi_s, \psi_s) = +\infty),$$

т.е. (16) не выполняется.

Очевидно, что запрет распадений в плоскости x, y не является необходимым для справедливости теорем 1 и 2. В то же время мы не знаем, какое условие должно заменить требование компактности операторов A_0 и $A_0^{(m)}$ в теоремах 1 и 2 в случае произвольного магнитного поля. Для однородного магнитного поля такое условие получено в [3] — оно состоит в том, что полный заряд системы не должен быть равен 0.

Теорема 3 (см. [3]). *Пусть магнитное поле однородно, т.е.* $a_j = \mathrm{const}(-y_j, x_j, 0)$ *и* $Q \doteq \sum_{j=1}^n e_j \neq 0$. *Тогда для любого* m *справедливо соотношение* $\sum_{\mathrm{ess}}(H_0^{(m)}) = [\mu^{(m)}, +\infty)$.

Для $Q = 0$ утверждение теоремы 3 неверно [4].

Если $e_i e_j > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, теорема 3 совпадает с теоремой 2 для $B(\rho_j) = \mathrm{const}$.

Если присутствуют заряды разных знаков, то теорема 3 дает новый результат, поскольку оператор $A_0^{(m)}$ не компактен (см. п. 11).

14. Утверждения теоремы 2 для однородного магнитного поля и теоремы 3 аналогичны, но содержат принципиальное отличие. Чтобы увидеть это, рассмотрим произвольное распадение $D_2 = (C_1, C_2)$ системы D_1; пусть $H(D_2)$ будет оператором энергии для D_2 (см. п. 4). Отделим движение центра масс кластера C_1 или C_2 в направлении оси z и обозначим полученный оператор через $H_0(D_2)$. Положим $H_0^{(m)}(D_2) = P^{(m)}H_0(D_2)$. Оператор $A^{(m)}$ является оператором энергии движения в плоскости x, y как для всей системы, так и для D_2. Следовательно, если $A_0^{(m)}$ компактен, мы можем утверждать, что

$$\sum\nolimits_{\mathrm{ess}}(H_0^{(m)}(D_2)) = [\nu^{(m)}, +\infty),$$

где число $\nu^{(m)}$ определяется разбиениями D_2 на три кластера, т.е. разбиениями одного из кластеров C_1, C_2. Поэтому теорема 2 справедлива не только для оператора $H_0^{(m)}$, но и для оператора $H_0^{(m)}(D_2)$ для любого $D_2 = (C_1, C_2)$, если заменить $\mu^{(m)}$ на $\nu^{(m)}$.

Теперь рассмотрим теорему 3. Если заряды не все одного знака, но $Q = \sum_{j=1}^n e_j \neq 0$, то теорема 3 справедлива для оператора $H_0^{(m)}$, но может быть неверна для оператора $H_0^{(m)}(D_2)$ в отличие от теоремы 2. Это возможно, если один из кластеров C_i нейтрален [4] или если заряды $Q(C_i) = \sum_{j\in C_i} e_j$, $i = 1, 2$, имеют разные знаки в случае двухчастичных систем. Для того чтобы пояснить этот второй вариант, возьмем $D_1 = (1, 2)$, $e_1e_2 < 0$, $D_2 = \{(1), (2)\}$. Тогда $H_0^{(m)}(D_2) = A^{(m)}$, и существенный спектр оператора $H_0^{(m)}(D_2)$ состоит из изолированных бесконечно вырожденных собственных значений, что было бы невозможно, если бы теорема 3 была справедлива для оператора $H_0^{(m)}(D_2)$.

Заметим, что если $e_1e_2 > 0$, то $\sum_{\text{ess}}(H_0^{(m)}(D_2)) = \varnothing$, что согласуется с теоремой 3, поскольку не существует никаких разбиений D_2.

Список литературы

[1] Avron J., Herbst I., Simon B., *Separation of center of mass in homogeneous magnetic fields*, Ann. Physics **114** (1978), 431–451.

[2] Вугальтер С., Жислин Г., *О локализации существенного спектра операторов энергии n-частичных квантовых систем в магнитном поле*, Теор. и мат. физ. **97** (1993), № 1, 94–112.

[3] Vugal'ter S., Preprint no. 67, ESI.

[4] Вугальтер С., устное сообщение.

Радиофизический институт
603600, Нижний Новгород
Большая Печерская, 25/14

Поступило 13 сентября 1995 г.