Л. В. Канторович, Об интегральных операторах,
УМН, 1956, том 11, выпуск 2, 3–29

https://www.mathnet.ru/rm7766

1956 г. март—апрель т. XI, вып. 2 (68)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Л. В. Канторович

Цель этой статьи — установление некоторых теорем об интегральных операторах, представляющих по существу обобщение тех предложений об интегралах типа потенциала, которые были использованы С. Л. Соболевым [1], [2] при доказательстве основных теорем о пространствах функций многих переменных, так называемых «Теорем вложения». Эти теоремы, имеющие в настоящее время фундаментальное значение в математической физике, представляют в то же время основные факты собственно функционального анализа. Поэтому я считаю полезным связать их с общей теорией интегральных операторов, что, между прочим, даёт, пожалуй, и наиболее краткий путь их получения. Последнему вопросу посвящена вторая половина работы.

§ 1. Линейные и вполне непрерывные интегральные операции в пространствах L^p

1. Рассмотрим в области D с конечной мерой m-мерного евклидова пространства суммируемую функцию точки $U(P)$. Будем рассматривать составленные из таких функций пространства L_D^p $(p \geqslant 1)$ и L_D^∞ с обычным определением нормы

$$\|U\|_p = \|U\|_{L_D^p} = \left[\int_D |U(P)|^p dP\right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1), \quad \|U\|_{L_D^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_D |U(P)|.$$

Аналогичным образом для суммируемых функций $V(Q)$, определённых в некоторой области D' n-мерного пространства, будем рассматривать пространства $L_{D'}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Для удобства в дальнейшем будем предполагать, что $mD' = 1$, что не является существенным ограничением.

В качестве ядра интегральной операции будем рассматривать функцию $K(P, Q)$ пары точек (P, Q), измеримую в области $D \times D'$ $(n+m)$-мерного пространства. Она будет, как известно, измерима и по каждой из переменных P и Q при почти всех значениях другой переменной.

Теорема 1. *Если выполнены следующие условия* ($r > 0$, $t > 0$, $p \geqslant 1$, $s \geqslant 1$):

1) $$\left[\int\limits_{D'} |K(P, Q)|^r \, dQ \right]^{\frac{1}{r}} \leqslant C_1 \tag{1}$$

(*для почти всех* $P \in D$);

2) $$\left[\int\limits_{D} |K(P, Q)|^t \, dP \right]^{\frac{1}{r}} \leqslant C_2 \tag{2}$$

(*для почти всех* $Q \in D'$);

3) $s \geqslant p$, $s \geqslant t$ *и выполнено неравенство*[1])

$$\left(1 - \frac{t}{s}\right) p' \leqslant r, \tag{3}$$

то интегральный оператор $U = TV$, *определённый равенством*

$$U(P) = \int\limits_{D'} K(P, Q) V(Q) \, dQ, \tag{4}$$

для почти всех P, *есть линейный оператор из пространства* $L^p_{D'}$ *в* L^s_D, *причём*

$$\| U \|_{L^s_D} \leqslant C_1^{1-\frac{t}{s}} C_2^{\frac{t}{s}} \| V \|_{L^p_{D'}}, \qquad \| T \| \leqslant C_1^{1-\frac{t}{s}} C_2^{\frac{t}{s}}. \tag{5}$$

Доказательство. Преобразуем очевидную и верную для почти всех P оценку для $U(P)$ следующим образом:

$$|U(P)| \leqslant \int\limits_{D'} |K| \cdot |V| \, dQ = \int\limits_{D'} [|V|^p |K|^t]^{\frac{1}{s}} |V|^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)} |K|^{1-\frac{t}{s}} \, dQ.$$

Применив к последнему интегралу неравенство Гёльдера

$$\left| \int\limits_T f g h \, dt \right| \leqslant \| f \|_{\lambda_1} \cdot \| g \|_{\lambda_2} \cdot \| h \|_{\lambda_3} \quad \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 1 \right)$$

с показателями

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}}, \quad \lambda_3 = p' = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}},$$

получим:

$$|U(P)| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{D'} |V|^p |K|^t \, dQ \right]^{\frac{1}{s}} \left[\int\limits_{D'} |V|^p \, dQ \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}} \left\{ \left[\int\limits_{D'} |K|^{\left(1-\frac{t}{s}\right)p'} \, dQ \right]^{\frac{1}{p'\left(1-\frac{t}{s}\right)}} \right\}^{\left(1-\frac{t}{s}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{D'} |V|^p \cdot |K|^t \, dQ \right]^{\frac{1}{s}} \| V \|^{1-\frac{p}{s}} C_1^{1-\frac{t}{s}}. \tag{6}$$

При этом при оценке последнего множителя был использован тот факт,

---

[1]) Здесь и ниже p' означает показатель, сопряженный с p $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $\left(p' = \frac{p}{p-1}\right)$.

что если $mD'=1$ и $\lambda \leqslant r$ $\left(\lambda = p'\left(1-\frac{t}{s}\right)\right)$, то

$$\left[\int_{D'} |K|^{\lambda} dQ\right]^{\frac{1}{\lambda}} \leqslant \left[\int_{D'} |K|^{r} dQ\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{7}$$

а интеграл, стоящий справа, согласно (1) оценивается числом C_1. Оценивая $\|U\|_{L_D^s}$, меняя порядок интегрирования и пользуясь (2), имеем:

$$\|U\|_{L_D^s} = \left[\int_D |U|^s dP\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{1-\frac{t}{s}} \|V\|^{1-\frac{p}{s}} \left[\int_D dP \int_{D'} |V(Q)|^p |K(P,Q)|^t dQ\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{1-\frac{t}{s}} \|V\|^{1-\frac{p}{s}} \left[\int_{D'} |V(Q)|^p dQ \int_D |K(P,Q)|^t dP\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{1-\frac{t}{s}} \|V\|^{1-\frac{p}{s}} \left[\int_{D'} |V(Q)|^p dQ\right]^{\frac{1}{s}} C_2^{\frac{t}{s}} = C_1^{1-\frac{t}{s}} C_2^{\frac{t}{s}} \|V\|_{L_{D'}^p},$$

что и приводит к утверждению теоремы.

Замечание 1. В случае, если фигурирующее в условии 3) требование $s \geqslant t$ и не выполнено, основное заключение теоремы о том, что (4) есть линейный оператор из L^p в L^s, остаётся в силе. Действительно, если $s < t$, то, заменяя s на $s_1 = t$, сохраним неравенство (3). А в таком случае заключаем, что T есть линейная операция из L^p в L^{s_1}, но так как $s < s_1$, то T будет линейной операцией U из L^p в L^s.

Если же не выполнено условие $s \geqslant p$, то операция T будет линейной из L^p в L^s в том случае, если при замене s на $s_1 = p$ будет выполнено неравенство (3), т. е.

$$\left(1-\frac{t}{p}\right) p' \leqslant r.$$

Если $t \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$, то это последнее условие заведомо выполнено.

Замечание 2. Поставленное условие ($mD' = 1$) не является существенным. Если оно не выполнено, то его выполнения можно добиться путём преобразования подобия. При этом только неравенство (5) заменится аналогичным неравенством, отличающимся дополнительным постоянным множителем A, зависящим лишь от меры области и показателей.

Замечание 3. Отметим предельный случай теоремы, когда $p = 1$, т. е. когда операция переводит L в L^s. Для этого случая имеет место следующее предложение:

Для того чтобы интегральная операция T представляла линейную операцию из L в L^s, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left[\int_D |K(P,Q)|^s dP\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant C_2 \tag{2'}$$

для почти всех Q; при этом для нормы операции T имеет место оценка

$$\|T\| \leqslant C_2. \tag{5'}$$

Таким образом, условия 1) и 3) отбрасываются, а 2) должно выполняться для $t=s$. Доказательство для этого случая упрощается тем, что при установлении (6) будет отсутствовать последний множитель и достаточно будет использовать обычное неравенство Гёльдера.

Отметим ещё, что, как может быть доказано [3], в этом случае (4) есть общая форма линейной операции из L в L^s, а неравенство для нормы (5') обращается в равенство, если для C_2 в (2') взято минимальное значение.

Замечание 4. Отметим другой важный предельный случай, когда $s=\infty$. В этом случае теорема формулируется так:

Интегральная операция T переводит пространство L^p ($p>1$) в L^∞, если выполнено условие (1) *при некотором $r \geqslant p'$, при этом $\|U\|_{L^\infty} \leqslant C_1 \|V\|_{L^p}$.*

Утверждение получается непосредственным применением к (4) неравенства Гёльдера.

Замечание 5. Теорема сохраняет силу и в том случае, когда в неравенстве (1) правая часть зависит от P, именно, если неравенства (1) и (2) заменяются на следующие:

$$\left\{\int_{D'} |K(P,Q)|^r\, dQ\right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant C_1 \Psi(P), \tag{1a}$$

$$\left\{\int_{D} \left[|K(P,Q)| \cdot |[\Psi(P)]^{\frac{s}{t}-1}|\right]^t dP\right\}^{\frac{1}{t}} \leqslant C_2. \tag{2a}$$

В частности, сохраняет силу и неравенство (5).

2. Переходим к описанию вполне непрерывных операций. Начнём со следующей теоремы (С. Банах [5]).

Теорема 2. *Интегральная операция* (4) *есть линейная и вполне непрерывная операция из L^p в L^s, если её ядро суммируемо со степенью r', где $r=\min(p, s')$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, т. е. если*

$$\left[\int_D \int_{D'} |K(P,Q)|^{r'}\, dQ\, dP\right]^{\frac{1}{r'}} \leqslant C < \infty, \tag{8}$$

при этом

$$\|T\| \leqslant AC. \tag{9}$$

Доказательство. Прежде всего установим справедливость указанной оценки для нормы T.

Пользуясь неравенством Гёльдера и неравенством $\|V\|_{L^r} \leqslant \|V\|_{L^p}$ ($r \leqslant p$, $mD'=1$), имеем:

$$|U(P)| \leqslant \left[\int_{D'} |K(P,Q)|^{r'}\, dQ\right]^{\frac{1}{r'}} \cdot \left[\int_{D'} |V(Q)|^r\, dQ\right]^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{D'} |K(P,Q)|^{r'}\, dQ\right]^{\frac{1}{r'}} \|V\|_{L^p}.$$

Далее, оценивая $\|U\|$ в L_D^s и применяя неравенство Гёльдера к внешнему интегралу с показателями $\frac{r'}{s}$, $\left(\frac{r'}{s}\right)'$, где $\frac{1}{\left(\frac{r'}{s}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{r'}{s}\right)'}=1$, $r'\geqslant s$, найдём:

$$\|U\|_{L_D^s}=\left[\int_D |U(P)|^s dP\right]^{\frac{1}{s}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_D\left[\int_{D'}|K(P,Q)|^{r'}dQ\right]^{\frac{s}{r'}}\cdot 1\cdot dP\right\}^{\frac{1}{s}}\cdot\|V\|_{L^p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\left[\int_D\int_{D'}|K(P,Q)|^{r'}dQ\,dP\right]^{\frac{s}{r'}}(mD)^{\frac{1}{\left(\frac{r'}{s}\right)'}}\right\}^{\frac{1}{s}}\cdot\|V\|_{L^p}\leqslant AC\cdot\|V\|_{L^p},$$

и неравенство (9) установлено.

Ядро $K(P, Q)$ может быть аппроксимировано непрерывными ядрами $K_n(P, Q)$ так, что

$$\left[\int_D\int_{D'}|K_n(P,Q)-K(P,Q)|^{r'}dP\,dQ\right]^{\frac{1}{r'}}\leqslant\varepsilon_n, \tag{10}$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда, если обозначить через T_n интегральную операцию с ядром K_n, то она вполне непрерывна, и согласно (9) и (10)

$$\|T-T_n\|\leqslant A\varepsilon_n, \tag{11}$$

т. е. операции T_n сильно сходятся к T, и следовательно, последняя также вполне непрерывна (см. [4], стр. 215), что и требовалось доказать.

Замечание 6. Если ядро $K(P, Q)$ таково, что

$$B=\left\{\int_D\left[\int_{D'}|K(P,Q)|^{p'}dQ\right]^{\frac{s}{p'}}dP\right\}^{\frac{1}{s}}<\infty, \tag{12}$$

то оператор T как оператор из L^p в L^s линеен и вполне непрерывен, причём $\|T\|\leqslant B$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1, *если только* $s>t$ *и в неравенстве* (3) *имеет место знак* $<$, *интегральный оператор* (4) *представляет вполне непрерывный оператор из* L^p *в* L^s.

Доказательство: Выберем число $\rho<r$ такое, чтобы соблюдалось условие (3):

$$\left(1-\frac{t}{s}\right)p'\leqslant\rho.$$

Далее, введём ядро $K_n(P, Q)$, положив:

$$K_n(P,Q)=\begin{cases} -n, & \text{если } K(P,Q)\leqslant -n,\\ K(P,Q), & \text{если } -n\leqslant K(P,Q)\leqslant n,\\ n, & \text{если } K(P,Q)\geqslant n.\end{cases}$$

Оценим величину

$$C_1^{(n)} = \sup_{P \in D} \left\{ \int_{D'} |K(P, Q) - K_n(P, Q)|^\rho dQ \right\}^{\frac{1}{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{P \in D} \left\{ \int_{e_n(P)} |K(P, Q)|^\rho dQ \right\}^{\frac{1}{\rho}},$$

$e_n(P)$ — совокупность точек $Q \in D'$, где $|K(P, Q)| > n$. Имеем, очевидно, при $Q \in e_n(P)$, так как $|K(P, Q)| > n$:

$$|K(P, Q)|^\rho \leqslant \frac{1}{n^{r-\rho}} |K(P, Q)|^r,$$

а потому

$$C_1^{(n)} \leqslant \sup_{P \in D} \left\{ \left\{ \int_{e_n(P)} \frac{1}{n^{r-\rho}} |K(P, Q)|^r dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \right\}^{\frac{r}{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{\frac{r}{\rho}-1}} \sup_{P \in D} \left\{ \left[\int_{D'} |K(P, Q)|^r dQ \right]^{\frac{1}{r}} \right\}^{\frac{r}{\rho}} \leqslant \frac{C_1^{\frac{r}{\rho}}}{n^{\frac{r}{\rho}-1}}.$$

Применяя теперь к операции $T - T_n$, определяемой ядром $K - K_n$, неравенство (5) теоремы 1 с заменой C_1 на $\dfrac{C_1^{\frac{r}{\rho}}}{n^{\frac{r}{\rho}-1}}$, получим:

$$\|T - T_n\| \leqslant \left(\frac{C_1^{\frac{r}{\rho}}}{n^{\frac{r}{\rho}-1}} \right)^{1-\frac{t}{s}} C_2^{\frac{t}{s}},$$

откуда ясно, что операции T_n сильно сходятся к T. Между тем операция T_n задана посредством ограниченного ядра $K_n(P, Q)$, которое суммируемо с любой степенью и потому по теореме 2 определяет вполне непрерывную операцию из L^p в L^s, а тогда и операция T также вполне непрерывна.

З а м е ч а н и е 7. Утверждение теоремы остаётся в силе и в случае, когда в неравенстве (3) имеет место знак равенства, если только найдётся такая возрастающая функция $\Phi(\lambda)$, что $\dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda}$, возрастая, стремится к $+\infty$, а неравенство (1) имеет место в усиленной форме $\left\{ \int_{D'} [\Phi(|K(P, Q)|)]^r dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant C_1$.

3. Введём в рассмотрение пространство $\operatorname{Lip} \beta$ функций, определённых в области D и удовлетворяющих условию Липшица с показателем $0 < \beta \leqslant 1$, в котором норма определяется следующим образом:

$$\|U\|_{\operatorname{Lip} \beta} = \sup_{P;\, P+\Delta P \in D} \frac{|U(P + \Delta P) - U(P)|}{|\Delta P|^\beta},$$

где $(P, P + \Delta P)$ обозначает произвольный промежуток с концами P и $P + \Delta P$, целиком лежащий в области D, а $|\Delta P|$ — длину его. (Две функции, отличающиеся на постоянную, рассматриваются как один и тот же элемент пространства).

Установим некоторую теорему об интегральных преобразованиях, относящуюся к случаю, когда D и D' расположены в одном и том же евклидовом пространстве, а ядро может оказаться сингулярным при совпадении точек P и Q, но при $P \neq Q$ представляет дифференцируемую функцию по координатам точки P.

Теорема 4. *Пусть ядро $K(P, Q)$ таково, что*

$$1) \qquad \left\{ \int_{D'} [|\mathrm{grad}_P K(P, Q)| R^{1-\beta}(P, Q)]^r dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant E, \tag{13}$$

где $R(P, Q)$ — расстояние между точками P и Q, grad_P обозначает градиент, вычисленный по переменной P;

$$2) \qquad \left\{ \int_{D'} \left[\frac{K(P, Q)}{R^\beta(P, Q)} \right]^r dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant F. \tag{14}$$

Тогда интегральный оператор (4) *переводит пространство $L^{r'}$ (и любое L^p при $p \geqslant r'$) в $\mathrm{Lip}\,\beta$, при этом*

$$\|U\|_{\mathrm{Lip}\,\beta} \leqslant [E + (2^\beta + 3^\beta) F] \, \|V\|_{L^{r'}}. \tag{15}$$

Доказательство. Имеем, предполагая, что отрезок $(P, P+\Delta P)$ целиком лежит внутри D:

$$|U(P+\Delta P) - U(P)| = \left| \int_{D'} [K(P+\Delta P, Q) - K(P, Q)] V(Q)\, dQ \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{D'} |K(P+\Delta P, Q) - K(P, Q)|^r dQ \right]^{\frac{1}{r}} \cdot \|V\|_{L^{r'}}. \tag{16}$$

Для оценки первого множителя разобьём область интегрирования D' на две части: V_1 — пересечение D' со сферой $R(P, Q) \leqslant 2|\Delta P|$ и $V_2 = D' \setminus V_1$.

Для интеграла по V_1 имеем:

$$\left[\int_{V_1} |K(P, Q)|^r dQ \right]^{\frac{1}{r}} = \left\{ \int_{V_1} \left| \frac{K(P, Q)}{R^\beta(P, Q)} \right|^r R^{\beta r}(P, Q)\, dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant 2^\beta |\Delta P|^\beta \cdot F.$$

Аналогичная оценка верна и для интеграла от $|K(P+\Delta P, Q)|^r$ с заменой 2^β на 3^β, поскольку $R(P+\Delta P, Q) \leqslant 3|\Delta P|$ для $Q \in V_1$. Поэтому

$$J_1 = \left[\int_{V_1} |K(P+\Delta P, Q) - K(P, Q)|^r dQ \right]^{\frac{1}{r}} \leqslant (2^\beta + 3^\beta) F \cdot |\Delta P|^\beta. \tag{17}$$

Далее

$$J_2 = \left[\int_{V_2} |K(P+\Delta P, Q) - K(P, Q)|^r dQ \right]^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{V_2} \left[\int_P^{P+\Delta P} |\mathrm{grad}_P K(\overline{P}, Q)|\, d\overline{P} \right]^r dQ \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

При этом, так как $Q \in V_2$, то $R(\overline{P}, Q) \geqslant R(P, Q) - R(\overline{P}, P) \geqslant \frac{1}{2} R(P, Q)$ и, следовательно,

$$J_2 \leqslant 2^{1-\beta} \left\{ \int\limits_{V_2} \left[\int\limits_{P}^{P+\Delta P} |\operatorname{grad}_P K(\overline{P}, Q)| R^{1-\beta}(\overline{P}, Q) d\overline{P} \right]^r \frac{1}{R(P, Q)^{r(1-\beta)}} dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\beta} \left\{ \int\limits_{V_2} \left\{ \int\limits_{P}^{P+\Delta P} [\, |\operatorname{grad}_P K(\overline{P}, Q)| R^{1-\beta}(\overline{P}, Q)]^r d\overline{P} \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{P}^{P+\Delta P} 1 \cdot d\overline{P} \right]^{\frac{r}{r'}} \frac{1}{R^{r(1-\beta)}} dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1-\beta} |\Delta P|^{\frac{1}{r'}}}{(2|\Delta P|)^{1-\beta}} \left\{ \int\limits_{P}^{P+\Delta P} d\overline{P} \int\limits_{V_2} |\operatorname{grad}_P K(\overline{P}, Q) R^{1-\beta}(\overline{P}, Q)|^r dQ \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant |\Delta P|^{\beta} E. \quad (18)$$

Сопоставляя (17) и (18), имеем:

$$\left[\int\limits_{D'} |K(P+\Delta P, Q) - K(P, Q)|^r dQ \right]^{\frac{1}{r}} \leqslant J_1 + J_2 \leqslant [E + (2^{\beta} + 3^{\beta}) F] \, |\Delta P|^{\beta},$$

а тогда из (16)

$$\frac{U(P+\Delta P) - U(P)}{|\Delta P|^{\beta}} \leqslant [E + (2^{\beta} + 3^{\beta}) F] \, \|V\|_{L^{r'}},$$

что и приводит к (15).

Замечание 8. Так как функции, имеющие ограниченную норму в пространстве $\mathrm{Lip}\,\beta$, образуют равностепенно непрерывное семейство, то из доказанной теоремы следует, что если ядро K удовлетворяет условиям (13) и (14) для некоторого $\beta > 0$, то оператор (4), рассматриваемый как оператор из $L^p (p \geqslant r')$ в C, вполне непрерывен. Равномерная ограниченность функций ясна из того, что в силу (13) K — линейный оператор из L^p в L^{∞}. Он является также вполне непрерывным оператором из L^p в любое пространство $\mathrm{Lip}\,\beta'$ $(\beta' < \beta)$.

Замечание 9. Утверждение теоремы 4 сохраняет силу и для случая, когда $V \in L^{\infty}$. Именно, если условия (13) и (14) выполнены для $r = 1$ и некоторого $\beta > 0$, то оператор K — линейный оператор из L^{∞} в $\mathrm{Lip}\,\beta$, при этом

$$\|U\|_{\mathrm{Lip}\,\beta} \leqslant [E + (2^{\beta} + 3^{\beta}) F] \cdot \|V\|_{L^{\infty}},$$

и, в частности, этот оператор как оператор из L^{∞} в C вполне непрерывен.

4. Рассмотрим теперь преобразование, определяемое ядром, зависящим от параметра:

$$U_{\tau}(P) = \int\limits_{D'} K_{\tau}(P, Q) V(Q) dQ.$$

Будем говорить, что ядро $K_{\tau}(P, Q)$, зависящее от параметра τ, почти равномерно непрерывно по параметру τ относительно P и Q, если при любом $h > 0$ можно по $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta > 0$, что неравенство $|K_\tau(P, Q) - K_{\tau'}(P, Q)| < \varepsilon$ имеет место при $|\tau - \tau'| < \delta$ и при всех P и Q за исключением совокупности $e(P)$ значений Q, независимой от τ с $me(P) < h$.

Теорема 5. *Если ядро интегральной операции почти равномерно непрерывно относительно* τ *и выполнены при всех* τ *условия теоремы* 3 (C_1 и C_2 не зависят от τ), то *оператор* T_τ *сильно непрерывен по* τ.

Доказательство. Имеем:

$$U_\tau(P) - U_{\tau'}(P) = \int_{D'} [K_\tau(P, Q) - K_{\tau'}(P, Q)] V(Q)\, dQ.$$

Для ядра $K_\tau - K_{\tau'}$ при $|\tau - \tau'| < \delta$ оценим постоянную $C_1^{(\rho)}$, где, используя обозначения теоремы 3, будем считать $\rho < r$ выбранным так же, как и там.

Тогда найдём:

$$\left[\int_{D'} |K_\tau(P, Q) - K_{\tau'}(P, Q)|^\rho dQ\right]^{\frac{1}{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{D'-e(P)} |K_\tau(P, Q) - K_{\tau'}(P, Q)|^\rho dQ\right]^{\frac{1}{\rho}} +$$

$$+ \left[\int_{e(P)} |K_\tau(P, Q) - K_{\tau'}(P, Q)|^\rho dQ\right]^{\frac{1}{\rho}} \leqslant \varepsilon (mD')^{\frac{1}{\rho}} +$$

$$+ \left[\int_{e(P)} |K_\tau(P, Q) - K_{\tau'}(P, Q)|^{\rho\cdot\frac{r}{\rho}}\right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{e(P)} dQ\right]^{\frac{1}{\left(\frac{r}{\rho}\right)'}} \leqslant \varepsilon (mD')^{\frac{1}{\rho}} + 2C_1 h^{1-\frac{\rho}{r}}.$$

Итак, величина $C_1^{(\rho)}$ для оператора $K_\tau - K_{\tau'}$ сколь угодно мала, откуда, пользуясь оценкой (5), можем заключить, что

$$\| T_\tau - T_{\tau'} \| \leqslant [\varepsilon (mD')^{\frac{1}{\rho}} + 2C_1 h^{1-\frac{\rho}{r}}]^{1-\frac{t}{s}} (2C_2)^{\frac{t}{s}}$$

также сколь угодно мала, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 10. Рассуждения теоремы непосредственно применимы и к случаю $s = \infty$ (ср. замечание 5 к теореме 1) и позволяют заключить о том, что если $r > p'$, выполнено (1) и ядро почти равномерно непрерывно по τ, то имеет место сильная непрерывность оператора как оператора из L^p в L^∞. Это означает, очевидно, что мы имеем неравенство

$$|U_\tau(P) - U_{\tau'}(P)| < \varepsilon'$$

при $|\tau - \tau'| < \delta'$, где δ' выбрано в соответствии с ε'; при этом сказанное имеет место, очевидно, равномерно относительно всех U, отвечающих V с $\|V\| \leqslant 1$.

5. Рассмотрим теперь ядра специального вида (ядра типа потенциала). При этом будем предполагать, что D' — n-мерная, а D — k-мерная область одного и того же n-мерного евклидова пространства; в соответствии с этим через $R(P, Q)$ будем обозначать расстояние точек P и Q.

Именно будем рассматривать ядра вида

$$K(P, Q) = \frac{B(P, Q)}{R^m(P, Q)},$$

где $B(P, Q)$ — ограниченная функция пары точек. Для суммируемости такого ядра по Q с показателем r достаточно потребовать, чтобы $mr < n$, а для суммируемости по P с показателем t, чтобы было $mt < k$. Так как в качестве r и t можно взять числа, сколь угодно близкие к $\frac{n}{m}$ и $\frac{k}{m}$, то условие (3) запишется в виде

$$\left(1 - \frac{k}{ms}\right) p' < \frac{n}{m}.$$

Решая относительно s, найдём:

$$s < \frac{kp}{mp - n(p-1)} = \frac{kp}{n - (n-m)p} \tag{19}$$

и, в частности, в весьма важном случае, когда $m = n - 1$,

$$s < \frac{kp}{n-p}.$$

К этому условию следует ещё добавить возможность выбрать s под условием $s \geqslant p$, что в сочетании с (19) даст

$$k > n - (n-m)p \tag{20}$$

или соответственно $k > n - p$.

Условия (19) и (20) гарантируют линейность оператора с ядром $K(P, Q)$ как оператора из $L^p_{D'}$ и L^s_D; при этом, так как неравенство (19) имеет место со знаком $<$, то по теореме 3 имеет место и его вполне непрерывность.

Теорема 4 здесь применима при следующих условиях. Так как мы имеем, очевидно,

$$|\operatorname{grad}_P K(P, Q)| \leqslant \frac{1}{R^m} |\operatorname{grad}_P B(P, Q)| + |B(P, Q)| \frac{m}{R^{m+1}},$$

то для выполнения условий (13) и (14) необходимо, чтобы:

1) $$(m + \beta) < n,$$

2) $$\int\limits_{D'} \frac{1}{R^{(m-1+\beta)r}} |\operatorname{grad}_P B(P, Q)|^r dQ < E'$$

независимо от P.

При этих условиях оператор (4) с ядром $K(P, Q)$ переводит пространство $L^p_{D'}$ $(p \geqslant r')$ в пространство $\operatorname{Lip} \beta$.

Наконец, если мы будем рассматривать сдвинутую функцию

$$U(P + \Delta P) = \int\limits_{D'} K(P + \Delta P; Q) V(Q) dQ$$

как значение операции, определяемой ядром, зависящим от параметра ΔP:

$$K_{\Delta P}(P, Q) = K(P + \Delta P, Q),$$

то, поскольку выполнены условия теоремы 5 (ибо по выключении некоторой окрестности точки P ядро становится непрерывным по параметру ΔP

вблизи $\Delta P = 0$), заключаем, что имеет место сильная непрерывность $U(P)$:

$$\int_D |U(P+\Delta P) - U(P)|^s \, dP \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta P| \to 0.$$

Аналогичным образом, если область D есть k-мерное многообразие, непрерывно и гладко зависящее от параметра τ, $D = D_\tau$, точки которого могут быть заданы параметрически $P_\tau = P + \varphi(\tau, P)$, где P пробегает область $D = D_0$ и $\varphi(\tau, P) \to 0$ равномерно относительно P при $\tau \to 0$ и при этом $|\varphi(\tau, P) - \varphi(\tau, P')| \leqslant \alpha |P - P'|$ $(\alpha < 1)$,то функция U, рассматриваемая на многообразии D_τ,

$$U_\tau(P) = U(P + \varphi(\tau, P)) = \int_{D'} K(P + \varphi(\tau, P); \, Q) V(Q) \, dQ = \int_{D'} K_\tau(P, Q) V(Q) \, dQ$$

сильно непрерывна по τ в метрике L_D^s:

$$\|U - U_\tau\|_{L_D^s} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 6. *Если выполнены условия* (19) *и* (20), *то интегральный оператор типа потенциала с ядром*

$$K(P, Q) = \frac{B(P, Q)}{R^m(P, Q)}$$

представляет линейную, вполне непрерывную операцию из пространства $L_{D'}^p$ в L_D^s, где D' — n-мерная область евклидова пространства, а D — k-мерное многообразие в нём. При этом, если это многообразие непрерывно меняется в зависимости от параметра τ, в частности, если мы рассматриваем его трансляцию на ΔP, то $U(P)$ представляет сильно непрерывную в L_D^s функцию сдвига, т. е.

$$\lim_{|\Delta P| \to 0} \left[\int_D |U(P + \Delta P) - U(P)|^s \, dP \right]^{\frac{1}{s}} = 0.$$

Проведённые рассмотрения применимы и в случае пространства L_D^∞ при условии, что

$$(n - m) p > n.$$

В этом случае сильная непрерывность $U(P)$ принимает вид

$$\max |U(P + \Delta P) - U(P)| \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta P| \to 0,$$

что говорит о непрерывности $U(P)$ в области D, т. е. о преобразовании в пространство C.

При этом, очевидно, это соотношение имеет место равномерно относительно всех функций U, отвечающих V с $\|V\| \leqslant 1$, следовательно, образ единичной сферы в $L_{D'}^p$ компактен в C, а потому оператор T вполне непрерывен. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 7. *Если выполнено условие $(n - m) p > n$, то интегральный оператор типа потенциала представляет линейный и вполне непрерывный оператор, преобразующий пространство $L_{D'}^p$ в пространство C_D непрерывных функций в области D.*

§ 2. Теоремы вложения С. Л. Соболева

Как известно, в математическом анализе, в особенности в математической физике, большую роль играют различные дифференциальные свойства функций и их взаимоотношение, например, возможность, имея интегральные оценки частных производных некоторого порядка, делать заключение об ограниченности или непрерывности самой функции, либо её производных низшего порядка. Также имеет значение взаимоотношение дифференциальных свойств функции, рассматриваемой во всём пространстве, со свойствами той же функции, рассматриваемой на некоторой поверхности. Наконец, значительную роль играют вопросы о характере сходимости последовательности функций с известными дифференциальными свойствами и оценками.

С. Л. Соболеву принадлежит весьма удачная мысль рассматривать одну и ту же функцию одновременно как элемент нескольких пространств с различным образом определённой нормой так, что принадлежность функции каждому пространству определяется теми или иными её дифференциальными свойствами. Сопоставляя данной функции её же саму, рассматриваемую как элемент другого пространства, мы получаем некоторый оператор, преобразующий одно пространство в другое (оператор вложения). Природа этого оператора и определяет в основном взаимоотношение тех дифференциальных свойств, которыми определяются пространства. Например, если этот оператор преобразует первое пространство в часть второго, то это означает, что каждая функция, обладающая свойствами, характерными для элементов первого пространства, обладает и свойствами, определяющими второе из них.

В результате получилась возможность привлечения к данному вопросу идей функционального анализа, что позволило вместо ранее известных отдельных изолированных фактов дать весьма полный анализ вопроса. Полученные здесь С. Л. Соболевым и другими исследователями результаты оказались чрезвычайно важными и в настоящее время прочно вошли в теорию граничных задач математической физики[1]).

1. Изложение этих результатов, которые мы строим, опираясь на установленные в § 1 общие теоремы об интегральных операциях, начнём со следующей леммы.

Лемма 1. *Если $U(P)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определённая в выпуклой области D, то справедливо тождество*

$$U(P)=\frac{1}{|D|}\int\limits_D U(Q)\,dQ-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_D \frac{B_i(P, Q)}{R^{n-1}(P, Q)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dQ, \tag{1}$$

[1]) В последние годы этот круг вопросов получил значительное продвижение в работах С. М. Никольского (см., например, Труды Матем. ин-та им. Стеклова 38 (1951), 244 и Матем. сб. 33 (1953), 261). Однако в этих работах применены существенно другие методы (приближение функций целыми аналитическими функциями, распространение функций), которых мы не касаемся в данной статье.

где $R(P, Q)$ — расстояние между точками P и Q ($x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки Q), $|D|$ — мера области D, $B_i(P, Q)$ — непрерывные при $P \neq Q$, а вообще ограниченные функции

$$|B_i(P, Q)| \leqslant \frac{\delta^n}{n \cdot |D|}, \tag{2}$$

где δ — диаметр области D.

Доказательство. Пусть P — фиксированная точка области D, а $Q(R, \bar{e})$ — произвольная точка области D, где $\bar{e}$ — единичный вектор, имеющий направление от P к Q; R — их расстояние. Имеем, очевидно:

$$U(P) = U(Q) - \int_0^R \frac{\partial U}{\partial e}\, de, \quad \text{где } R = |\bar{P} - \bar{Q}|. \tag{3}$$

Умножая обе части (3) на $R^{n-1}\,dR$ и интегрируя по лучу, идущему из точки P с направлением $\bar{e}$ от 0 до $d(\bar{e})$, где $d(\bar{e})$ — длина отрезка этого луча в пределах области D, имеем:

$$U(P) \int_0^{d(\bar{e})} R^{n-1}\,dR = \int_0^{d(\bar{e})} U(Q) R^{n-1}\,dR - \int_0^{d(\bar{e})} R^{n-1}\,dR \int_0^R \frac{\partial U}{\partial e}\, de =$$

$$= \int_0^{d(\bar{e})} U(Q) R^{n-1}\,dR - \int_0^{d(\bar{e})} \frac{\partial U}{\partial e} \left(\int_e^{d(\bar{e})} R^{n-1}\,dR \right) de =$$

$$= \int_0^{d(\bar{e})} U(Q) R^{n-1}\,dR - \int_0^{d(\bar{e})} \frac{d^n - e^n}{n} \frac{\partial U}{\partial e} \frac{1}{e^{n-1}} e^{n-1}\, de. \tag{4}$$

Заменив во втором интеграле в правой части обозначение переменной e на R, умножим обе части равенства на элемент телесного угла поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве $d\varkappa$ и проинтегрируем по этой поверхности ω. Тогда, пользуясь тождеством

$$\int_D V(Q)\,dQ = \int_\omega d\varkappa \int_0^{d(\bar{e})} V(Q) R^{n-1}\,dR,$$

будем иметь:

$$U(P) \cdot |D| = \int_D U(Q)\,dQ - \int_D \frac{d^n - R^n}{n} \frac{\partial U}{\partial R} \frac{1}{R^{n-1}}\, dQ. \tag{5}$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cos(R, x_i)$, то, деля обе части равенства на $|D|$ и обозначая

$$B(P, Q) = \frac{d^n - R^n}{n\,|D|}, \quad B_i(P, Q) = B(P, Q) \cos(R, x_i), \tag{6}$$

получаем:

$$U(P) = \frac{1}{|D|} \int_D U(Q)\,dQ - \sum_{i=1}^{n} \int_D B_i(P, Q) \frac{1}{R^{n-1}} \frac{\partial U}{\partial x_i}\, dQ.$$

Из (6) следуют выполнение неравенства (2) и непрерывность $B(P, Q)$ и $B_i(P, Q)$ при $P \neq Q$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Функции $B_i(P, Q)$ таковы, что интеграл*

$$\int\limits_D \frac{1}{R^{(n-2+\beta)r}} |\operatorname{grad}_P B_i(P, Q)|^r dQ \tag{7}$$

ограничен независимо от P, если только $r < \frac{n}{n-1}$, а β настолько мало, что $(n-1+\beta)r < n$. (Поверхность S, ограничивающая область D, предполагается достаточно гладкой.)

Доказательство. Так как

$$B_i(P, Q) = B(P, Q)\cos(R, x_i), \qquad \text{где } \overline{R} = \overline{P} - \overline{Q},$$

то

$$|\operatorname{grad}_P B_i(P, Q)| \leqslant |\operatorname{grad}_P B(P, Q)|\,|\cos(R, x_i)| + \\ + |B(P, Q)|\,|\operatorname{grad}_P \cos(R, x_i)| \leqslant |\operatorname{grad}_P B(P, Q)| + \frac{K}{R},$$

где K — постоянная. В силу условия $(n-1+\beta)r < n$ справедливость утверждения для слагаемого $\frac{K}{R}$ очевидна.

Покажем справедливость леммы для интеграла

$$\int\limits_D \frac{1}{R^{(n-2+\beta)r}} |\operatorname{grad}_P B(P, Q)|^r dQ.$$

Как мы видели, $B(P, Q) = \frac{1}{n|D|}(d^n - R^n)$, где $d = PM$ — расстояние от точки P до границы по лучу $\overline{PQ}$. Так как для R^n утверждение, очевидно, выполнено, остаётся его проверить для d^n. Заметим, что если $\overline{\nu}$ есть направление нормали в точке M (конце луча) и φ — угол $\varphi = (\overline{\nu}, \overline{PQ})$ (см. рис. на стр. 17), то направление градиента d расположено в плоскости, где лежат луч $\overline{PQ}$ и нормаль $\overline{\nu}$, а значение его

$$|\operatorname{grad}_P d| = \sqrt{1 + \left(\frac{d-R}{R}\operatorname{tg}\varphi\right)^2} \leqslant 1 + \frac{d}{R}|\operatorname{tg}\varphi|, \tag{8}$$

так как модуль производной d по направлению луча $\overline{PQ}$ равен 1, а производная по перпендикулярному к нему направлению равна $\frac{d-R}{R}\operatorname{tg}\varphi$.

В соответствии с этим

$$|\operatorname{grad}_P d^n| \leqslant nd^{n-1}\left(1 + \frac{d}{R}\operatorname{tg}\varphi\right).$$

Поэтому, используя неравенство $(1+\alpha)^r \leqslant 2^r(1+\alpha^r)$, имеем:

$$\frac{1}{R^{(n-2+\beta)r}}|\operatorname{grad}_P d^n|^r \leqslant \frac{n^r d^{(n-1)r}\left(1 + \frac{d}{R}\operatorname{tg}\varphi\right)^r}{R^{(n-2+\beta)r}} \leqslant \\ \leqslant \frac{(2n)^r d^{(n-1)r}\left(1 + \left(\frac{d}{R}\right)^r \operatorname{tg}^r\varphi\right)}{R^{(n-2+\beta)r}} = (2n)^r \frac{d^{(n-1)r}}{R^{(n-2+\beta)r}} + (2n)^r \frac{d^{nr}}{R^{(n-1+\beta)r}}\operatorname{tg}^r\varphi.$$

Ограниченность интеграла от первого слагаемого очевидна.

Интеграл от второго слагаемого, переписав элемент объёма в виде

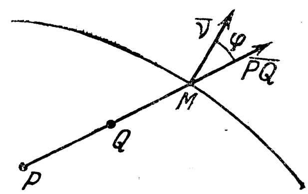
$$dQ = \frac{R^{n-1}}{d^{n-1}} \cos\varphi \, dS \, dR,$$

где dS — элемент рассматриваемой поверхности, мы можем оценить так:

$$\int\limits_D (2n)^r \frac{d^{nr}}{R^{(n-1+\beta)r}} \operatorname{tg}^r \varphi \, dQ \leqslant$$

$$\leqslant (2n)^r \int\limits_S (\operatorname{tg}\varphi)^r \cos\varphi \left(\int\limits_0^d \frac{d^{nr-(n-1)} R^{n-1}}{R^{(n-1+\beta)r}} dR \right) dS \leqslant$$

$$\leqslant (2n)^r \frac{\delta^{nr-(n-1+\beta)r+1}}{n-(n-1+\beta)r} \int\limits_S (\operatorname{tg}\varphi)^r \cos\varphi \, dS < A,$$



если только $r < \frac{n}{n-1}$, а β настолько мало, что $(n-1+\beta)r < n$. Действительно, в этом случае внутренний интеграл конечен, показатель у δ положителен и так как $r < \frac{n}{n-1} \leqslant 2$, степень $\cos\varphi$ в знаменателе < 1 и, если S — поверхность с конечным радиусом кривизны, то интеграл ограничен независимо от точки P. Лемма доказана.

Замечание 1. Из доказанной леммы и замечания на стр. 12 § 1 следует, что ядра $\frac{B_i(P, Q)}{R^{n-1}(P, Q)}$ удовлетворяют условиям теоремы 4 § 1, если $r < \frac{n}{n-1}$ (или $r' > n$), а β таково, что $(n-1+\beta)r < n$.

2. Опираясь на лемму 1 и ранее полученные теоремы об интегральных преобразованиях, можно установить следующую теорему.

Теорема 1. (Неравенство С. Л. Соболева.) *Если $U(P)$ непрерывно дифференцируемая функция в выпуклой области D и*

$$s < \frac{np}{n-p}, \tag{9}$$

то справедливо неравенство

$$\|U - \overline{U}\|_{L_D^s} = \left\{ \int\limits_D |U(P) - \overline{U}|^s \, dP \right\}^{\frac{1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant A \|\operatorname{grad} U\|_{L_D^p} = A \left\{ \int\limits_D \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dP \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{10}$$

где $\overline{U}$ — среднее значение функции U в области D:

$$\overline{U} = \frac{1}{|D|} \int\limits_D U(P) \, dP, \tag{11}$$

A — некоторая постоянная.

На основании (5) имеем:

$$|U(P) - \overline{U}| = \left| \int\limits_D \frac{B(P, Q)}{R^{n-1}} \frac{\partial U}{\partial R} dQ \right| \leqslant \int \frac{B(P, Q)}{R^{n-1}} |\operatorname{grad} U| \, dQ.$$

Попов Юрий Яковлевич

Но мы видели (стр. 11, § 1), что оператор с ядром

$$\frac{B(P, Q)}{R^{n-1}}$$

представляет линейный оператор из пространства L^p_D в L^s_D при условии (9). Тогда, обозначая через A постоянную, фигурирующую в неравенстве (5) § 1, имеем:

$$\|U-\overline{U}\|_{L^s_D} \leqslant A \|\operatorname{grad} U\|_{L^p_D},$$

и неравенство (10) установлено.

Замечание 2. Неравенство (10) нам иногда будет удобнее использовать в другой форме

$$\|U\|_{L^s_D} \leqslant M\left[\|\operatorname{grad} U\|_{L^p_D} + |\overline{U}|\right], \tag{12}$$

которая получается непосредственно из (10) на основании неравенства Минковского

$$\|U\|_{L^s_D} \leqslant \|U-\overline{U}\|_{L^s_D} + \|\overline{U}\|_{L^s_D} \leqslant A\|\operatorname{grad} U\|_{L^p_D} + |\overline{U}|\ |D|^{\frac{1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant M\left[\|\operatorname{grad} U\|_{L^p_D} + |\overline{U}|\right], \quad M = \max\left[A, |D|^{\frac{1}{s}}\right].$$

Если $p=2$, а $n \geqslant 2$, то неравенство (9) будет соблюдено для $s=2$, ибо при $n \geqslant 2$

$$2 < \frac{2n}{n-2},$$

поэтому (12) даёт:

$$\left\{\int_D |U(P)|^2 dP\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant M\left\{\left|\int_D U(Q)\,dQ\right| + \left[\int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 dQ\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{13}$$

или, что то же самое,

$$\int_D |U(P)|^2 dP \leqslant M_1\left\{\left|\int_D U(Q)\,dQ\right|^2 + \int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 dQ\right\}. \tag{14}$$

Это — известное неравенство Пуанкаре.

Замечание 3. Для приложений может играть роль постоянная, фигурирующая в неравенстве (10).

В данном случае, беря $t=r$ и определяя r из соотношения $\left(1-\frac{r}{s}\right)p' = r$, находим $r = \frac{ps}{(p-1)s+p}$, откуда ясно, что можно принять:

$$A = C_1 = C_2 = \max_P \left\{\int_D \frac{dQ}{R^{(n-1)r}}\right\}^{\frac{1}{r}} \max|B(P, Q)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^n}{n\cdot|D|}\left\{\int_{(T)} d\varkappa \int_0^{\delta} \frac{R^{n-1}}{R^{(n-1)r}}\,dR\right\}^{\frac{1}{r}} = \frac{\delta^{1+\frac{n}{r}}}{n\cdot|D|}\left\{\frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)[n-(n-1)r]}\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

Замечание 4. Неравенство Соболева сформулировано и доказано для случая выпуклой области. Однако оно переносится на многие другие. В частности, если некоторая область допускает однозначное и непрерывно дифференцируемое преобразование (с якобианом 1) в другую область, для которой неравенство установлено, то оно, очевидно, верно и для первой. Возможность распространения на многие области получается также на основании следующего предложения:

Если область D представима как соединение двух связных областей, имеющих общую часть, для каждой из которых справедливо неравенство (10), *то оно имеет место и для всей области D.*

Доказательство. Пусть D составлена из областей D_1 и D_2. Положим ещё $D_3 = D_1 \cap D_2$, $D_4 = D_2 \setminus D_3$.

Обозначим через $\overline{U}$, $\overline{U}^{(1)}$, $\overline{U}^{(2)}$, $\overline{U}^{(3)}$, $\overline{U}^{(4)}$ средние значения $U(P)$ по каждой из областей D, D_1, D_2, D_3, D_4.

Согласно (10) в применении к D_1 и D_2 имеем:

$$\|U - \overline{U}^{(1)}\|_{L^s_{D_1}} \leqslant B_1 J, \quad \|U - \overline{U}^{(2)}\|_{L^s_{D_2}} \leqslant B_2 J, \qquad J = \|\operatorname{grad} U\|_{L^p_D},$$

где B_1 и B_2 — постоянные. Далее,

$$|\overline{U}^{(1)} - \overline{U}^{(2)}| = \frac{1}{|D_3|^{\frac{1}{s}}} \|\overline{U}^{(1)} - \overline{U}^{(2)}\|_{L^s_{D_3}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|D_3|^{\frac{1}{s}}} [\|U - \overline{U}^{(1)}\|_{L^s_{D_3}} + \|U - \overline{U}^{(2)}\|_{L^s_{D_3}}] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|D_3|^{\frac{1}{s}}} [\|U - \overline{U}^{(1)}\|_{L^s_{D_1}} + \|U - \overline{U}^{(2)}\|_{L^s_{D_2}}] \leqslant B_3 J,$$

$$|\overline{U}^{(4)} - \overline{U}^{(2)}| = \left| \frac{1}{|D_4|} \int_{D_4} [U - \overline{U}^{(2)}]\, dQ \right| \leqslant A \frac{1}{|D_4|} \|U - \overline{U}^{(2)}\|_{L^s_{D_2}} \leqslant B_4 J.$$

По смыслу средних значений, очевидно,

$$\min(\overline{U}^{(1)}, \overline{U}^{(4)}) \leqslant \overline{U} \leqslant \max(\overline{U}^{(1)}, \overline{U}^{(4)}).$$

Поэтому

$$|\overline{U} - \overline{U}^{(1)}| \leqslant |\overline{U}^{(4)} - \overline{U}^{(1)}| \leqslant |\overline{U}^{(4)} - \overline{U}^{(2)}| + |\overline{U}^{(2)} - U^{(1)}| \leqslant B_5 J,$$

откуда и

$$|\overline{U} - \overline{U}^{(2)}| \leqslant |\overline{U} - \overline{U}^{(1)}| + |\overline{U}^{(1)} - \overline{U}^{(2)}| \leqslant B_6 J.$$

Наконец,

$$\|U - \overline{U}\|_{L^s_D} \leqslant \|U - \overline{U}\|_{L^s_{D_1}} + \|U - \overline{U}\|_{L^s_{D_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \|U - \overline{U}^{(1)}\|_{L^s_{D_1}} + \|U - \overline{U}^{(2)}\|_{L^s_{D_2}} + |\overline{U} - \overline{U}^{(1)}| \cdot |D_1|^{\frac{1}{s}} + |\overline{U} - \overline{U}^{(2)}| \cdot |D_2|^{\frac{1}{s}} \leqslant B_7 J,$$

что и устанавливает справедливость неравенства типа (10) для U в области D.

3. Введём теперь в рассмотрение некоторые функциональные пространства, в качестве элементов которых мы допустим пока только непрерывно дифференцируемые функции (это обстоятельство мы отметим знаком $\sim$ над обозначением). Итак, назовём $\widetilde{W}_p^{(1)} = \widetilde{W}_p^{(1)}(D)$ пространство, состоящее из непрерывно дифференцируемых в D функций с нормой

$$\| U \|_{\widetilde{W}_p^{(1)}} = \frac{1}{|D|} \left| \int\limits_D u(P)\, dP \right| + \left\{ \int\limits_D |\operatorname{grad} U|^p\, dP \right\}^{\frac{1}{p}} = |\overline{U}| + \| \operatorname{grad} U \|_{L_D^p}. \quad (15)$$

Это — линейное нормированное пространство. Входящую в него функцию можно рассматривать так же как, элемент L^s, и неравенство Соболева (12) можно записать как следующее соотношение между её нормами в этих пространствах:

$$\| U \|_{L_D^s} \leqslant M \| U \|_{\widetilde{W}_p^{(1)}}. \quad (16)$$

Иначе говоря, оператор вложения, сопоставляющий функции из $\widetilde{W}_p^{(1)}$ её же, рассматриваемую как элемент в L^s, есть линейный оператор из $\widetilde{W}_p^{(1)}$ в L_D^s с нормой $\leqslant M$.

Больше того, можно установить, что этот оператор вполне непрерывный.

Пусть $U_m(P)$ — последовательность функций, ограниченных в метрике $\widetilde{W}_p^{(1)}$. Согласно лемме 1 имеем:

$$U_m = \overline{U}_m - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_D \frac{B_i(P, Q)}{R^{n-1}} \frac{\partial U_m}{\partial x_i}\, dQ.$$

При этом, так как оператор с ядром $B_i(P, Q) R^{1-n}$, как мы видели (теорема 6 § 1), при условии (9) вполне непрерывен из L^p в L^s, а $\frac{\partial U_m}{\partial x_i}$ как элементы L^p ограничены в совокупности, можно выбрать последовательность индексов m_k так, что последовательность функций

$$f_{m_k}^{(i)}(P) = \int\limits_D \frac{B_i(P, Q)}{R^{n-1}} \frac{\partial U_{m_k}}{\partial x_i}\, dQ$$

сходится сильно в L^s. При этом мы можем считать, что последовательность m_k выбрана так, что сходимость $f_{m_k}^{(i)}$ имеет место для всех $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, а кроме того, так, что сходится числовая последовательность $\overline{U}_{m_k}$, частичная по отношению к ограниченной в силу (15) последовательности $\overline{U}_m$.

В таком случае последовательность $U_{m_k} = \overline{U}_{m_k} - \sum_i f_{m_k}^{(i)}$ сильно сходится в L^s, и вполне непрерывность оператора вложения установлена. Объединяя полученные результаты приходим к теореме.

Теорема 2. (С. Л. Соболев и В. И. Кондрашов.) *Если $s < \frac{np}{n-p}$, то оператор вложения, относящий функции из $\widetilde{W}_p^{(1)}$ её же, рассматриваемую как элемент L^s, линеен и вполне непрерывен.*

Совершенно аналогичным образом, если D — k-мерное гладкое многообразие, то, рассматривая оператор вложения, преобразующий $\widetilde{W}_p^{(1)}(D')$ в L_D^s, на основании теорем § 1 имеем следующую теорему:

Теорема 3. *Оператор вложения, сопоставляющий функции $U(P)$ из $\widetilde{W}_p^{(1)}(D')$ её же, рассматриваемую как функцию на k-мерной поверхности D, т. е. как элемент пространства L_D^s, линеен и вполне непрерывен при условиях*

$$s < \frac{kp}{n-p}, \quad k > n-p, \tag{17}$$

причём, если рассматривать эту функцию в зависимости от сдвига, то она сильно непрерывна, т. е.

$$\left\{\int_D |U(P+\Delta P) - U(P)|^s dP\right\}^{\frac{1}{s}} \to 0 \text{ при } |\Delta P| \to 0. \tag{18}$$

Рассматривая специально случай, когда $n < p$ на основании теоремы 7 § 1, имеем следующую теорему:

Теорема 4. *При условии $n < p$ оператор вложения, рассматриваемый как оператор из $\widetilde{W}_p^{(1)}$ в $C(D)$, является линейным и вполне непрерывным.*

Замечание. Используя теорему 4 § 1 и замечание 1 § 2, эту теорему можно усилить, именно если $\beta < \frac{p-n}{n}$, то линеен и вполне непрерывен оператор вложения из $\widetilde{W}_p^{(1)}$ в $\operatorname{Lip}\beta$.

Подобно тому как были введены пространства $\widetilde{W}_p^{(1)}$, могут быть введены аналогичные пространства, в определении метрики которых участвуют производные высших порядков. Положим именно для l раз непрерывно дифференцируемой функции $U(P)$:

$$\|U\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}} = \left|\frac{1}{|D|}\int_D U\,dP\right| + \sum_{i=1}^n \left|\frac{1}{|D|}\int_D \frac{\partial U}{\partial x_i} dP\right| + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i_1,\ldots,i_{l-1}} \left|\frac{1}{|D|}\int_D \frac{\partial^{l-1}U}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{l-1}}} dP\right| + \left\{\int_D \left[\sum_{i_1,\ldots,i_l}\left(\frac{\partial^l U}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} dP\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{19}$$

Тогда на основании установленных уже теорем легко убедиться, что оператор вложения из пространства $\widetilde{W}_p^{(l)}$ в L^s будет линейным и вполне непрерывным при условии

$$s < \frac{np}{n-lp}. \tag{20}$$

Действительно, при $l=1$ предложение доказано (теорема 2).

Предположим, что оно верно для $l-1$. Из (19) ясно, что

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial x_i}\right\|_{\widetilde{W}_p^{(l-1)}} \leqslant \|U\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}},$$

и на основании линейности оператора вложения из $\widetilde{W}_p^{(l-1)}$ в L^{s_1} заключаем, что

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\|_{L^{s_1}} < M \left\| \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\|_{\widetilde{W}_p^{(l-1)}} < M \| U \|_{\widetilde{W}_p^{(l)}},$$

если только $s_1 = \dfrac{np}{n-p(l-1)}$.

Это показывает опять ввиду (16) и (19), что

$$\| U \|_{\widetilde{W}_{s_1}^{(1)}} \leqslant |\overline{U}| + \sum_i \left\| \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\|_{L_{s_1}} \leqslant (nM+1) \| U \|_{\widetilde{W}_p^{(l)}}$$

и, наконец, на основании теоремы 2, применённой для $p = s_1$, что

$$\| U \|_{L^s} \leqslant M' \| U \|_{\widetilde{W}_{s_1}^{(1)}} \leqslant M' (nM+1) \| U \|_{\widetilde{W}_p^{(l)}},$$

т. е. линейность оператора вложения из $\widetilde{W}_p^{(l)}$ в L^s, если только

$$s < \frac{ns_1}{n-s_1},$$

что всегда может быть выполнено при подходяще подобранном s_1, если только

$$s < \frac{n \dfrac{np}{n-p(l-1)}}{n - \dfrac{np}{n-p(l-1)}} = \frac{np}{n-pl}.$$

Итак, предложение доказано. Таким же образом, так как оператор из $\widetilde{W}_{s_1}^{(1)}$ в L^s вполне напрерывный, ясна и вполне непрерывность оператора вложения из $\widetilde{W}_p^{(l)}$ в L^s. Наконец, аналогичным образом переносятся на случай наличия производных высших порядков и теоремы 3 и 4. В результате имеем следующую теорему:

Теорема 5. *Оператор вложения из пространства $\widetilde{W}_p^{(l)}(D')$ в пространство L_D^s суммируемых функций, определённых на k-мерной поверхности D при условиях*

$$s < \frac{kp}{n-lp}, \quad k > n - lp, \tag{21}$$

линеен и вполне непрерывен. При этом при деформации поверхности D в зависимости от параметра эта функция сильно непрерывна по параметру.

Наконец, если $n < lp$, то линеен и вполне непрерывен оператор вложения из $\widetilde{W}_p^{(l)}(D')$ в $C(D)$.

4. Пространства $\widetilde{W}_p^{(1)}$ и $\widetilde{W}_p^{(l)}$, когда в качестве их элементов рассматриваются только непрерывно дифференцируемые функции, не являются полными. Однако можно показать, что они превращаются в полные, если их дополнить функциями, дифференцируемыми в обобщённом смысле.

Будем говорить, что функция $U^{(i)}(P)$ есть обобщённая производная для $U(P)$ в области D, если имеются непрерывно дифференцируемые в D функции $U_m(P)$ такие, что во всякой внутренней подобласти $D_1 \subset \overline{D}_1 \subset D$ имеет место сходимость в среднем

$$\int\limits_{D_1} |U_m - U|\, dP \to 0, \quad \int\limits_{D_1} \left| U^{(i)} - \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right| dP \to 0 \text{ при } m \to \infty. \qquad (22)$$

Отметим следующее тождество, верное при любой функции $\psi(P)$, непрерывно дифференцируемой в D и равной нулю на границе D и вблизи неё:

$$\int\limits_D U(P) \frac{\partial \psi(P)}{\partial x_i} dP = -\int\limits_D \psi(P) U^{(i)}(P)\, dP, \qquad (23)$$

если $U^{(i)}(P)$ — обобщённая производная U.

Действительно, если функция U заменена в (23) на U_m и $U^{(i)}$ на $\frac{\partial U_m}{\partial x_i}$, то равенство очевидно в силу формулы Грина — Остроградского, а ввиду сходимости в среднем (22) получаем его и для U.

Из полученного тождества, между прочим, сразу следует единственность обобщённой производной, так как, если бы были две такие производные $U^{(i)}$ и $\widetilde{U}^{(i)}$, то разность их была бы ортогональна произвольной функции $\psi(P)$ указанного вида, а потому равнялась бы нулю почти везде.

Для дальнейшего оказывается более удобным приближающие функции выбирать не произвольно, а строить их определённым образом — усреднением по Стеклову.

Пусть $\omega_h(\xi)$ — функция одного вещественного переменного, определённая для $\xi \geqslant 0$ и удовлетворяющая условиям: 1) $\omega_h(\xi) \geqslant 0$, 2) $\omega_h(\xi) = 0$ при $\xi \geqslant h$, 3) $\omega_h(\xi)$ непрерывно дифференцируема, 4) нормирована так, что

$$\int \omega_h(|P|)\, dP = 1$$

($|P|$ — длина вектора P; область интегрирования — всё n-мерное пространство, но ввиду 2) она сводится к сфере радиуса h).

Положим ещё:

$$\omega_h(P, Q) = \omega_h(|P - Q|) = \omega_h\left(\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}\right). \qquad (24)$$

Тогда усреднённой по Стеклову функцией для U называется функция

$$U_h(P) = \int \omega_h(P, Q)\, U(Q)\, dQ = \int \omega_h(|Q|)\, U(P+Q)\, dQ \qquad (25)$$

(вне D считаем $U(Q) = 0$).

Тогда имеем:

а) $\|U_h - V_h\|_{L_D^p} \leqslant \|U - V\|_{L_D^p}$ $(p \geqslant 1)$;

б) если $U \in L_D^p$ $(p \geqslant 1)$, то $\|U - U_h\|_{L_D^p} \to 0$ при $h \to 0$;

в) если $\|U_m - U\|_{L^p} \to 0$, то $\|(U_m)_h - U_h\|_{L^p} \to 0$;

г) если U имеет обобщённую производную $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, то, какова бы ни была внутренняя подобласть D_1 области D, при h достаточно малом, в D_1

выполняется равенство

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_h. \tag{26}$$

Предложения а) — в) доказываются легко. Установим г). Возьмём U_m согласно (22). Для U_m равенство (26) очевидно, так как

$$\frac{\partial (U_m)_h}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\int \omega_h(|Q|)\,U_m(P+Q)\,dQ =$$
$$= \int \omega_h(|Q|)\frac{\partial U_m(P+Q)}{\partial x_i}\,dQ = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_i}\right)_h. \tag{27}$$

В то же время по в) и (22) имеем:

$$\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_i}\right)_h \to \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_h,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_m)_h = \int \frac{\partial}{\partial x_i}\omega_h(|P-Q|)\,U_m(Q)\,dQ \to \int \frac{\partial}{\partial x_i}\omega_h(|P-Q|)\,U(Q)\,dQ = \frac{\partial U_h}{\partial x_i},$$

при этом предельный переход был допустим, так как $P \in D_1$, а область интегрирования, представляющая круг $K_h(P)$ радиуса h с центром в P, есть внутренняя подобласть D, а потому можно использовать (22). Совершая предельный переход в (27), приходим к (26).

Из равенства (26) и б), применённых к U и $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ в области D_1, следует, что U_h могут всегда играть роль U_m, если обобщённая производная существует:

$$\int_{D_1} |U - U_h|\,dP \to 0,$$

$$\int_{D_1}\left|\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial U_h}{\partial x_i}\right| dP = \int_{D_1}\left|\frac{\partial U}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_h\right| dP \leqslant \left\|\frac{\partial U}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_h\right\|_{L_D} \to 0. \tag{28}$$

Полученное равенство (26) позволяет также установить справедливость неравенства Соболева (12) для функций, дифференцируемых в обобщённом смысле.

Действительно, если обобщённый градиент суммируем со степенью p, то опять по б) и (26) имеем:

$$\int_{D_1}\left|\frac{\partial U_h}{\partial x_i} - U^{(i)}\right|^p dP = \int_{D_1}\left|[U^{(i)}]_h - U^{(i)}\right|^p dP \to 0.$$

То же самое верно и для самого градиента.

Применив неравенство Соболева для U_h:

$$\left[\int_{D_1}|U_h|^s\,dP\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant M\left\{\left|\frac{1}{|D_1|}\int_{D_1}U_h\,dQ\right| + \left[\int_{D_1}|\operatorname{grad} U_h|^p\,dQ\right]^{\frac{1}{p}}\right\},$$

получим его в пределе и для U:

$$\left[\int_{D_1} |U|^s dP\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant M\left\{\left|\frac{1}{|D_1|}\int_{D_1} U\,dQ\right| + \left[\int_{D_1} |\operatorname{grad} U|^p dQ\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

При этом постоянную M можно считать не зависящей от D_1, как это ясно из способа её введения (см. теорема 1, замечания 2 и 3). Поэтому взяв последовательность областей D_1, сходящуюся к D, получим в пределе то же самое неравенство и для области D; попутно будет установлена и суммируемость функции $|U|^s$ в D. Итак,

$$\left[\int_{D} |U|^s dP\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant M\left\{\left|\frac{1}{|D|}\int_{D} U\,dQ\right| + \left[\int_{D} |\operatorname{grad} U|^p dQ\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Отсюда ясно и то, что пространство $W_p^{(1)}$, получаемое присоединением к $\widetilde{W}_p^{(1)}$ элементов, соответствующих функциям с обобщёнными производными, суммируемыми со степенью p, будет уже полным.

Действительно, пусть $\|U_k - U_m\|_{W_p^{(1)}} \to 0$. Тогда $\frac{\partial U_m}{\partial x_i}$ сходятся в среднем в L_D^p к некоторым функциям $U^{(i)}$, а в силу неравенства Соболева U_m сходятся в L^s к некоторой функции U, а тогда $U^{(i)}$ будут обобщёнными производными для U. Действительно, возьмём D_m — внутренние подобласти D, которые, расширяясь, сходятся к D. На D_m функцию U_m можно аппроксимировать согласно (22) непрерывно дифференцируемой в D функцией $\widetilde{U}_m$ так, чтобы

$$\int_{D_m} |U_m - \widetilde{U}_m|\,dP < \frac{1}{m}, \quad \int_{D_m}\left|\frac{\partial U_m}{\partial x_i} - \frac{\partial \widetilde{U}_m}{\partial x_i}\right| dP < \frac{1}{m}.$$

Тогда, так как

$$\int_{D_m} |U - \widetilde{U}_m|\,dP < \int_{D_m} |U - U_m|\,dP + \int_{D_m} |U_m - \widetilde{U}_m|\,dP,$$

$$\int_{D_m}\left|U^{(i)} - \frac{\partial \widetilde{U}_m}{\partial x_i}\right| dP < \int_{D_m}\left|U^{(i)} - \frac{\partial U_m}{\partial x_i}\right| dP + \int_{D_m}\left|\frac{\partial U_m}{\partial x_i} - \frac{\partial \widetilde{U}_m}{\partial x_i}\right| dP,$$

очевидно, что $\widetilde{U}_m$ и $\frac{\partial \widetilde{U}_m}{\partial x_i}$ сходятся соответственно к U и $U^{(i)}$ на любой внутренней подобласти D_1 области D, т. е. $U^{(i)}$ — обобщённая производная U.

Так же легко устанавливается сепарабельность $W_p^{(1)}$. Действительно, $W_p^{(1)}$ можно рассматривать как подпространство пространства E, представляющего прямое произведение следующих пространств:

$$E = R \times L_p \times \ldots \times L_p,$$

относя точке $U \in W_p^{(1)}$ точку

$$\left(\frac{1}{|D|}\int_D U\,dP;\ U^{(1)};\ \ldots;\ U^{(n)}\right).$$

При этом, очевидно, сходимости в E и $W_p^{(1)}$ эквивалентны. Итак, $W_p^{(1)}$ — подпространство сепарабельного пространства E, следовательно, также сепарабельно.

Отметим ещё, что выполнение равенства (23) для любой функции, удовлетворяющей указанным выше условиям, может быть принято как определение обобщённой производной, эквивалентное первоначальному.

Действительно, если такое соотношение имеет место для функций U и $U^{(i)}$ при любой ψ и если h достаточно мало, то имеем в подобласти D_1 области D:

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_i} = \int\limits_{D_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_h(|P-Q|)\, U(Q)\, dQ = -\int\limits_{D_1} \frac{\partial}{\partial x_i'} \omega_h(|P-Q|)\, U(Q)\, dQ =$$
$$= \int\limits_{D_1} \omega_h(|P-Q|)\, U^{(i)}(Q)\, dQ = [U^{(i)}]_h \to U^{(i)},$$

откуда и видно, что $U^{(i)}$ — обобщённые производные для U.

Аналогичным образом вводятся обобщённые производные высших порядков. Также индуктивно устанавливается полнота (и сепарабельность) пространств $W_p^{(l)}$, получаемых из $\widetilde{W}_p^{(l)}$ дополнением их функциями, имеющими обобщённые производные l-го порядка.

Если речь идёт о полных пространствах $W_p^{(l)}$, то вложение одного такого пространства в другое $W_p^{(l)} \subset W_s^{(m)}$ говорит уже не только о справедливости некоторого интегрального неравенства, а также и о том, что функция, являющаяся элементом пространства $W_p^{(l)}$, является одновременно и элементом пространства $W_s^{(m)}$ $\left(\text{это будет, если } s < \frac{np}{n-(l-m)p}\right)$. Этот факт будет уже далеко не тривиальным, как это было в случае пространств $\widetilde{W}_p^{(l)}$.

Наконец, отметим то важное обстоятельство, что норму в пространстве $W_p^{(l)}$ можно вводить и другими способами, которые эквивалентны (19).

Пусть $L_1(U), L_2(U), \ldots, L_j(U)$ — некоторая система линейных функционалов в $W_p^{(l)}$, обладающая тем свойством, что из равенств

$$L_1(U) = 0, \ldots, L_j(U) = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_D \Bigg[\sum_{i_1, \ldots, i_l = 1}^{n} \left| \frac{\partial^l U}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^2 \Bigg]^{\frac{p}{2}} dP = 0 \tag{29}$$

следует, что $U \equiv 0$.

Установим прежде всего неравенство

$$\|U\|_{W_p^{(l)}} \leqslant$$
$$\leqslant B \left\{ |L_1(U)| + \ldots + |L_j(U)| + \left\{ \int\limits_D \Bigg[\sum_{i_1, \ldots, i_l = 1}^{n} \left| \frac{\partial^l U}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^2 \Bigg]^{\frac{p}{2}} dP \right\}^{\frac{1}{p}} \right\}, \tag{30}$$

где B — постоянная. Действительно, если бы такой постоянной не было, то ввиду однородности нашлись бы U_m с $\|U_m\|_{W_p^{(l)}}=1$ такие, что

$$|L_1(U_m)|+\ldots+|L_j(U_m)|+\left\{\int\limits_D\left[\sum_{i_1,\ldots,i_l}\left|\frac{\partial^l U_m}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right|^2\right]^{\frac{p}{2}}dP\right\}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon_m, \quad (31)$$

причём $\varepsilon_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Из последовательности U_m выберем частичную U_{m_k} так, чтобы для неё сходились входящие в выражение нормы $\|U\|_{W_p^{(l)}}$ средние значения функции и её производных, что возможно, так как они по модулю $\leqslant 1$. Если учтём (31), то получим, что последовательность U_{m_k} сходится в себе по норме в $W_p^{(l)}$, а ввиду полноты — и к некоторому элементу U этого пространства. Для функции U из определения $\|U\|_{W_p^{(l)}}$ (19) и того факта, что эта норма равна единице, а последнее слагаемое в ней в силу (31) равно нулю, имеем:

$$\frac{1}{|D|}\left|\int\limits_D U\,dQ\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{|D|}\int\limits_D\frac{\partial U}{\partial x_i}dQ\right|+\ldots$$
$$\ldots+\sum_{i_1,\ldots,i_{l-1}}\left|\frac{1}{|D|}\int\limits_D\frac{\partial^{l-1}U}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{l-1}}}dQ\right|=1. \quad (32)$$

В то же время для неё будет выполняться (29). Из последнего должно следовать, что $U\equiv 0$, но это противоречит (32).

Таким образом, неравенство (30) установлено. Очевидно, что выражение в фигурных скобках (30) $\leqslant C\|U\|_{W_p^{(l)}}$ (благодаря предположенной линейности функционалов $L_1,\ldots,L_j$ в $W_p^{(l)}$). Поэтому ясно, что это выражение может быть принято в качестве другой нормы в $W_p^{(l)}$, эквивалентной первоначальной:

$$\|U\|_{W_p^{(l)}}=|L_1(U)|+\ldots+|L_j(U)|+\left\{\int\limits_D\left[\sum_{i_1,\ldots,i_l}\left|\frac{\partial^l U}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right|^2\right]^{\frac{p}{2}}dP\right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (33)$$

Наконец, в качестве нормы в $W_p^{(l)}$ могут быть приняты и различные другие выражения, лишь бы только такое выражение имело свойства нормы, было определено и непрерывно во всём $W_p^{(l)}$ и его стремление к нулю влекло за собой стремления к нулю какого-либо выражения вида правой части (30).

В частности, такого рода эквивалентные нормы для $W_p^{(l)}$ представляют:

$$\|U\|_{W_p^{(l)}}=\left|\overbrace{\int\ldots\int}^{n-1}_{(S)}U\,dS\right|+\left\{\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{(D)}\left[\sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{n}\left(\frac{\partial^l U}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}dQ\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (34)$$

где S — ограничивающее многообразие $n-1$-го измерения, а также

$$\|U\|_{W_p^{(l)}}=\left\{\int\limits_D\left[U^2+\sum_{i_1,\ldots,i_l}\left(\frac{\partial^l U}{\partial x_i\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}dQ\right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (35)$$

Отметим, что, в частности, пространство $W_2^{(l)}$ является гильбертовым, при следующем определении скалярного произведения:

$$(U, V) = \int\limits_D \sum_{\nu=0}^{l} \sum_{i_1, \ldots, i_\nu = 1}^{n} \frac{\partial^\nu U}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\nu}} \frac{\partial^\nu V}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\nu}} dQ.$$

Отметим также, что если имеет место некоторое вложение пространств $W_r^{(m)}(S) \supset W_p^{(l)}(D)$, где S — k-мерное многообразие, то это позволяет для функции, являющейся элементом $W_p^{(l)}$, говорить о значениях её m-х производных на поверхности S, которые определены как функции, суммируемые с r-й степенью на S. В случае, если теоремы вложения гарантируют непрерывность обобщённых производных некоторого порядка, то легко убедиться, что эти производные существуют и в обычном смысле.

Наконец, полезно указать, что если на функции из $W_p^{(l)}(D)$ наложены некоторые линейные условия, относящиеся к значениям m-х производных на поверхности S, причём $W_r^{(m)}(S) \supset W_p^{(l)}(D)$, то такое условие определяет в пространстве $W_p^{(l)}$ замкнутое множество.

5. В качестве иллюстрации применения теорем вложения рассмотрим задачу о собственных значениях:

$$\Delta U + \lambda \left(aU + b\frac{\partial U}{\partial x} + c\frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0, \quad U|_\Gamma = 0,$$

для случая, когда Γ — единичная окружность.

Будем рассматривать это уравнение в пространстве $W_2^{(2)}$. Поскольку принадлежность функции этому пространству обеспечивает её непрерывность на Γ, то функции из $W_2^{(2)}$, обращающиеся в нуль на Γ, образуют линейное замкнутое множество $\overset{0}{W}{}_2^{(2)} \subset W_2^{(2)}$.

Для нас существенно ещё следующее: оператор Δ как преобразующий пространство $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$ в L^2 имеет обратный. Это вытекает из двух обстоятельств:

1) Справедливо неравенство для $U \in \overset{0}{W}{}_2^{(2)}$

$$\left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\|_{L^2}, \quad \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} \right\|_{L^2}, \quad \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\|_{L^2} \leqslant \| \Delta U \|_{L^2},$$

откуда ясно, что

$$\| \Delta U \|_{L^2} \geqslant \frac{1}{4} \| U \|_{\overset{0}{W}{}_2^{(2)}},$$

если норму в $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$ определить по формуле (34). Поэтому оператор Δ^{-1} определён и линеен в области значений оператора Δ.

2) Область значений оператора Δ в $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$ плотна в пространстве L^2. Это ясно из того, что, каков бы ни был полином $P(x, y)$, можно найти с помощью метода неопределённых коэффициентов решение уравнения $\Delta U = P(x, y)$ в виде $(x^2 + y^2 - 1)\Pi(x, y)$, где Π — также полином.

Из сказанного ясно, что оператор Δ^{-1} есть линейный оператор, переводящий пространство L^2 в $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$. Применив к уравнению оператор Δ^{-1}, можем записать его в виде

$$U + \lambda TU = 0,$$

где

$$TU = \Delta^{-1}\left(aU + b\frac{\partial U}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

и уравнение рассматривается в $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$.

Оператор, стоящий в скобках, очевидно, линейный из $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$ в $W_2^{(1)}$, а как оператор из $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$ в L^2 он вполне непрерывен по теоремам вложения. Тогда так как Δ^{-1} линеен из L^2 в $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$, то оператор T вполне непрерывен из $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$ в $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$. Это говорит о применимости к данному уравнению теории Рисса и позволяет, например, заключить о дискретности спектра уравнения, справедливости бездетерминантных теорем и пр.

В заключение приношу благодарность В. П. Ильину, оказавшему значительную помощь автору при подготовке данной статьи к печати.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Матем. сб. 2 (44): 3 (1937).
[2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
[3] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
[4] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
[5] С. С. Банах, Курс функционального анализа, Киев, 1948.