

УДК 519.642

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ТОРЕ

П. И. ЛИФАНОВ

1. В аэродинамике при решении пространственных задач обтекания тел широкое применение нашел [1] метод дискретных замкнутых вихревых рамок. В случае тора этот метод является фактически методом коллокации численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения, к которому сводится задача Неймана на торе для уравнения Лапласа, с помощью потенциала двойного слоя, т. е. уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_T \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) d\sigma_M = \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_T \left(\frac{(\mathbf{n}_M, \mathbf{n}_{M_0})}{r_{MM_0}^3} - 3 \frac{(\mathbf{r}_{MM_0}, \mathbf{n}_M)(\mathbf{r}_{MM_0}, \mathbf{n}_{M_0})}{r_{MM_0}^5} \right) g(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где через T обозначен тор, \mathbf{n}_M — орт нормали к T в точке M , $r_{MM_0} = |MM_0| = ((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2)^{1/2}$ — расстояние между точками M и M_0 , $f(M_0)$ — известная, а $g(M)$ — искомая функции, $d\sigma_M$ — дифференциал площади поверхности тора по координатам точки M . Интеграл от первого слагаемого в уравнении (1.1) понимаем в смысле конечной части по Адамару [1, с. 316; 2, с. 143]. Интеграл от второго слагаемого в уравнении (1.1) является абсолютно сходящимся с особенностью типа $1/r_{MM_0}$, так как известны оценки для дважды непрерывно дифференцируемой поверхности [3, с. 47] $|(\mathbf{r}_{MM_0}, \mathbf{n}_M)| \leq Cr_{MM_0}^2$, где $C > 0$ — константа, не зависящая от точек M и M_0 .

Теперь для того, чтобы описать метод дискретных замкнутых вихревых рамок для уравнения (1.1), дадим удобное параметрическое представление тора и преобразуем уравнение (1.1).

Пусть в пространстве выбрана декартова система координат $OXYZ$. Возьмем в плоскости OXZ окружность радиуса R с центром в точке $O^*(a, 0, 0)$ ($a > R$), уравнением которой будет $x = a + R \cos \theta$, $z = R \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, где θ — угол, на который надо повернуть луч $[a, +\infty)$ оси OX вокруг точки O^* до совпадения его с лучом g_{O^*M} , где M — точка окружности, соответствующая этому углу θ . Теперь будем вращать эту окружность вокруг оси OZ . Тогда при фиксированном угле θ получим окружность

$$x = (a + R \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (a + R \cos \theta) \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z = R \sin \theta, \quad (1.2)$$

где φ — полярный угол полярных координат в плоскости $z = R \sin \theta$ с центром в точке $\tilde{O}(0, 0, R \sin \theta)$. Теперь если в (1.2) разрешить углу θ принимать произвольные значения от 0 до 2π , то и получим параметрическое уравнение тора.

Орт \mathbf{n}_M нормали к тору в точке M найдем как векторное произведение касательных ортов $\bar{\tau}_\varphi$ и $\bar{\tau}_\theta$ в точке M к соответствующим координатным линиям на торе. Получим $\mathbf{n}_M = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}$, где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты осей OX , OY и OZ соответственно. Поэтому скалярное произведение $(\mathbf{n}_M, \mathbf{n}_{M_0})$ можно записать следующим образом: $(\mathbf{n}_M, \mathbf{n}_{M_0}) = 1 - 2 \sin^2((\varphi - \varphi_0)/2) \cos^2((\theta + \theta_0)/2) - 2 \sin^2((\theta - \theta_0)/2) \cos^2((\varphi - \varphi_0)/2)$, где $M_0 = M(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 = x(\varphi_0, \theta_0)$, $y_0 = y(\varphi_0, \theta_0)$, $z_0 = z(\varphi_0, \theta_0)$. Используя опять параметрическое представление (1.2) тора, можно заметить, что

$$r_{MM_0}^2 = 4R^2 \sin^2((\theta_0 - \theta)/2) + 4(a + R \cos \theta_0)(a + R \cos \theta) \sin^2((\varphi_0 - \varphi)/2), \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_{MM_0}, \mathbf{n}_M) &= -2R \sin^2((\theta_0 - \theta)/2) - 2 \sin^2((\varphi_0 - \varphi)/2)(a \cos \theta + R(1 - \sin \theta_0 \sin \theta)), \\
(\mathbf{r}_{MM_0}, \mathbf{n}_{M_0}) &= 2R \sin^2((\theta_0 - \theta)/2) + 2 \sin^2((\varphi_0 - \varphi)/2)(a \cos \theta_0 + R(1 - \sin \theta_0 \sin \theta)).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Введем вспомогательную величину

$$\tilde{r}_{MM_0}^2 = 4R^2 \sin^2((\theta_0 - \theta)/2) + 4(a + R \cos \theta_0)^2 \sin^2((\varphi_0 - \varphi)/2), \tag{1.5}$$

которая зависит только от точки (θ_0, φ_0) и разностей $(\theta_0 - \theta)$, $(\varphi_0 - \varphi)$.

Далее заметим: из геометрических свойств тора и формулы (1.3) видно, что при исследовании величины $r_{MM_0}^2$ достаточно рассматривать разности $(\theta_0 - \theta)$ и $(\varphi_0 - \varphi)$ в пределах от 0 до π . Теперь введем на плоскости $O^*\theta\varphi$ полярные координаты с центром в точке (θ_0, φ_0) :

$$\theta - \theta_0 = r \cos \alpha, \quad \varphi - \varphi_0 = r \sin \alpha, \tag{1.6}$$

где $0 \leq r \leq \pi\sqrt{2}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Тогда выражения для r_{MM_0} и \tilde{r}_{MM_0} можно записать в виде

$$r_{MM_0} = 2r \left[R^2 \frac{\sin^2(r(\cos \alpha)/2) \cos^2 \alpha}{r^2(\cos^2 \alpha)/4} + (a + R \cos \theta_0)(a + R \cos(\theta_0 + r \cos \alpha)) \frac{\sin^2(r(\sin \alpha)/2) \sin^2 \alpha}{r^2(\sin^2 \alpha)/4} \right]^{1/2},$$

$$\tilde{r}_{MM_0} = 2r \left[R^2 \frac{\sin^2(r(\cos \alpha)/2) \cos^2 \alpha}{r^2(\cos^2 \alpha)/4} + (a + R \cos \theta_0)^2 \frac{\sin^2(r(\sin \alpha)/2) \sin^2 \alpha}{r^2(\sin^2 \alpha)/4} \right]^{1/2}.$$

Так как величины $|r(\sin \alpha)/2|$, $|r(\cos \alpha)/2|$ принимают значения от 0 до $\pi/\sqrt{2}$ и справедливо неравенство $(\sin \xi)/\xi \geq (\sqrt{2} \sin(\pi/\sqrt{2}))/\pi$ при $0 \leq \xi \leq \pi/\sqrt{2}$, то верны также неравенства

$$r_{MM_0}/r, \tilde{r}_{MM_0}/r \geq 2\sqrt{2}\pi^{-1} \sin(\pi/\sqrt{2})\mu, \tag{1.7}$$

где $\mu = \min(R, (a - R)) > 0$.

Заметим еще, что исходя из формулы дифференциала площади поверхности, заданной параметрически [4], получаем для тора

$$d\sigma_M = R(a + R \cos \theta) d\theta d\varphi. \tag{1.8}$$

Так как из соотношений (1.3) и (1.5) следует, что

$$\tilde{r}_{MM_0}^2 - r_{MM_0}^2 = -2R \sin^2((\varphi_0 - \varphi)/2) \sin((\theta_0 - \theta)/2) \sin((\theta_0 + \theta)/2)(a + R \cos \theta_0),$$

то уравнение (1.1) с учетом (1.8) может быть записано в виде

$$(4\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tilde{r}_{MM_0}^{-3} + \lambda_1(M, M_0)r_{MM_0}^{-2} + \lambda_2(M, M_0)r_{MM_0}^{-1})g(\theta, \varphi)R(a + R \cos \theta) d\theta d\varphi = f(\theta_0, \varphi_0), \tag{1.9}$$

где функции $\lambda_i(M, M_0)$, $i = 1, 2$, непрерывны вне любой окрестности точки M_0 и ограничены на торе.

Интеграл в левой части уравнения (1.9) может быть представлен в виде суммы трех интегралов, первый из которых надо понимать в смысле конечной части по Адамару [1, 2], второй — как сингулярный интеграл [5, с. 43], а третий является абсолютно сходящимся.

2. Обозначим интеграл в левой части (1.9) через $I(M_0)$ и рассмотрим для него квадратурные формулы типа метода дискретных вихревых рамок [1].

Возьмем на квадрате $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ плоскости $O\theta\varphi$ разбиение прямыми линиями $\theta = \theta_i$, $\theta_i = (i - 1)h$, $h = 2\pi/n$, $i = \overline{1, n + 1}$, $\varphi = \varphi_k$, $\varphi_k = (k - 1)h$, $h = 2\pi/n$, $k = \overline{1, n + 1}$, а также точки $M_{0i,0k} = M(\theta_{0i}, \varphi_{0k})$, $\theta_{0i} = \theta_i + h/2$, $\varphi_{0k} = \varphi_k + h/2$, $i, k = \overline{1, n}$.

Прямоугольник, который содержит точку $M_{0i,0k}$, обозначим через $\sigma_{i,k}$. Теперь обозначим

$$I_n(M_{0j,0m}) = \sum_{i,k=1}^n g(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} (\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^{-3} + \lambda_1(M, M_{0j,0m}) r_{MM_{0j,0m}}^{-2} + \\ + \lambda_2(M, M_{0j,0m}) r_{MM_{0j,0m}}^{-1}) u(\theta) d\theta d\varphi = S_{n,1}(M_{0j,0m}) + S_{n,2}(M_{0j,0m}) + S_{n,3}(M_{0j,0m}),$$

где $u(\theta) = R(a + R \cos \theta)$.

Интеграл $I(M_0)$ представим следующим образом (аналогично, как $I_n(M_{0j,0m})$): $I(M_{0j,0m}) = I_1(M_{0j,0m}) + I_2(M_{0j,0m}) + I_3(M_{0j,0m})$.

Теперь рассмотрим погрешность приближения $I(M_{0j,0m})$ суммой $I_n(M_{0j,0m})$. Получим $|I(M_{0j,0m}) - I_n(M_{0j,0m})| \leq |I_1(M_{0j,0m}) - S_{n,1}(M_{0j,0m})| + |I_2(M_{0j,0m}) - S_{n,2}(M_{0j,0m})| + |I_3(M_{0j,0m}) - S_{n,3}(M_{0j,0m})| = I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}$.

Далее будем предполагать, что частные производные функции $g(M) = g(\theta, \varphi)$ по θ и φ являются функциями класса $H(\alpha)$ на квадрате $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Поэтому имеем

$$I_{n,3} \leq Ah \frac{1}{\sqrt{2}} \int_T \frac{|\lambda_2(M, M_{0j,0m})| |u(\theta)| d\theta d\varphi}{r_{M_{0j,0m}}} \leq M^* Ah \frac{1}{\sqrt{2}} \int_T \frac{d\theta d\varphi}{r_{M_{0j,0m}}}, \quad (2.1)$$

где $M^* \geq 0$ — такое число, что $|\lambda_2(M, M_0)u(\theta)| \leq M^*$ для любых $M, M_0 \in T$, а константа $A \geq 0$ из условия $H(\alpha)$ для функции $g(M)$.

В последнем интеграле в (2.1) перейдем к полярным координатам с центром в точке $M_{0j,0m}$. Тогда, используя формулы (1.6) и (1.7), получим

$$\int_T \frac{d\theta d\varphi}{r_{MM_{0j,0m}}} \leq \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \frac{r dr}{r r_{MM_{0j,0m}}/r} \leq \frac{2\pi^2}{2\sqrt{2}\pi^{-1} \sin(\pi/\sqrt{2})\mu} = \frac{\pi^3}{\sqrt{2} \sin(\pi/\sqrt{2})\mu}. \quad (2.2)$$

Таким образом, из формул (2.1), (2.2) вытекает, что $I_{n,3} \leq C_3 h$, где $C_3 \geq 0$ — константа, не зависящая от n .

Для $I_{n,2}$ имеем оценку

$$I_{n,2} = M_1^* \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^n \int_{\sigma_{i,k}} |g(M) - g(M_{0i,0k})| r_{MM_{0j,0m}}^{-2} d\theta d\varphi + M_1^* \int_{\sigma_{j,m}} |g(M) - g(M_{0j,0m})| r_{MM_{0j,0m}}^{-2} d\theta d\varphi \leq \\ \leq M_1^* A \frac{h}{\sqrt{2}} \int_{T \setminus \sigma_{i,k}} r_{MM_{0j,0m}}^{-2} d\theta d\varphi + M_1^* A \int_{\sigma_{j,m}} r_{MM_{0j,0m}}^{-1} d\theta d\varphi, \quad (2.3)$$

где $M_1^* \geq 0$ — такое число, что $|\lambda_1(M, M_0)u(\theta)| \leq M_1^*$ на торе.

В интегралах в формуле (2.3) перейдем опять к полярным координатам и получим

$$\int_{T \setminus \sigma_{i,k}} \frac{d\theta d\varphi}{r_{MM_{0j,0m}}^2} \leq \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2} \sin(\pi/\sqrt{2})\mu} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = \frac{\pi^3 (\ln(\pi\sqrt{2}) - \ln(h/2))}{4 \sin^2(\pi/\sqrt{2})\mu^2} \leq C_2 |\ln(h)|, \quad (2.4)$$

$$\int_{\sigma_{j,m}} \frac{d\theta d\varphi}{r_{MM_{0j,0m}}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2} \sin(\pi/\sqrt{2})\mu} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{h/\sqrt{2}} dr = \frac{\pi^2 h}{2 \sin(\pi/\sqrt{2})\mu}.$$

Теперь из формул (2.3), (2.4) следует, что $I_{n,2} \leq C_2 h |\ln(h)|$.

Наконец, для $I_{n,1}$ имеем

$$I_{n,1} \leq \left| \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\Delta g_{0i,0k}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} u(\theta) d\theta d\varphi \right| + \left| \int_{\sigma_{j,m}} \frac{\Delta g_{0j,0m}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} u(\theta) d\theta d\varphi \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \sum_{i,k=1}^n g'_\theta(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0i}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} u(\theta) d\theta d\varphi \right| + \left| \sum_{i,k=1}^n g'_\varphi(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\varphi - \varphi_{0i}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} u(\theta) d\theta d\varphi \right| = \\
& = I_{n,1}^{(1)} + I_{n,1}^{(2)} + I_{n,1}^{(3)} + I_{n,1}^{(4)},
\end{aligned}$$

где $\Delta g_{0i,0k} = g(M) - g(M_{0i,0k}) - g'_\theta(M_{0i,0k})(\theta - \theta_{0i}) - g'_\varphi(M_{0i,0k})(\varphi - \varphi_{0i})$.

Теперь будем предполагать, что модули всех вторых частных производных функции g по переменным θ и φ ограничены константой C . Тогда, как и в [1, с. 318], получаем

$$I_{n,1}^{(2)} \leq 2CM_2^* \frac{\pi^2}{8 \sin^2(\pi/\sqrt{2})\mu^2} \int_{\sigma_{j,m}} \frac{d\theta d\varphi}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}} \leq C_1^* \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{r dr}{r} = \tilde{C}_1 h,$$

где $M_2^* \geq 0$ — такое число, что $|u(\theta)| \leq M_2^*$ на торе.

Для величины $I_{n,1}^{(1)}$ имеем

$$I_{n,1}^{(1)} \leq 2CM_2^* h^2 \int_{T \setminus \sigma_{j,m}} \frac{d\theta d\varphi}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \leq C_2^{***} h^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} \frac{dr}{r^2} = 2\pi C_2^{***} h^2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} \leq \tilde{C}_1 h.$$

Наконец, для $I_{n,1}^{(3)}$ получаем

$$\begin{aligned}
I_{n,1}^{(3)} & \leq \left| \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^n [g'_\theta(M_{0i,0k}) - g'_\theta(M_{0j,0m})] \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0i}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} u(\theta) d\theta d\varphi \right| + \\
& + |g'_\theta(M_{0j,0m})| \left| \sum_{i,k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0i}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} u(\theta) d\theta d\varphi \right| \leq P_1 + P_2.
\end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых P_1 и P_2 . При оценке P_1 заметим, что $|\theta - \theta_{0i}| \leq h/2$ при $\theta \in \sigma_{i,k}$ и существуют такие числа $a, b > 0$, что для любого $(i,k) \neq (j,m)$ справедливо соотношение $0 < a \leq r_{M_{0i,0k}, M_{0j,0m}} / \tilde{r}_{MM_{0j,0m}}; \tilde{r}_{MM_{0j,0m}} / r_{M_{0i,0k}, M_{0j,0m}} \leq b < +\infty, M \in \sigma_{i,k}$. Поэтому имеем

$$P_1 \leq C_4 h \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i,k) \neq (j,k)}}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{d\theta d\varphi}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^2} \leq C_4^* h \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} \frac{dr}{r} \leq C_5 h |\ln(h)|,$$

где константы C_4, C_4^*, C_5 не зависят от n .

Теперь для P_2 можно записать

$$\begin{aligned}
P_2 & \leq |g'_\theta(M_{0j,0m})| |u(\theta_{0j})| \left| \sum_{i,k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0i}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| + \\
& + |g'_\theta(M_{0j,0m})| \left| \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0i}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} (u(\theta) - u(\theta_{0j})) d\theta d\varphi \right| + \\
& + |g'_\theta(M_{0j,0m})| \left| \int_{\sigma_{j,m}} \frac{\theta - \theta_{0j}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} (u(\theta) - u(\theta_{0j})) d\theta d\varphi \right| = P_2^{(1)} + P_2^{(2)} + P_2^{(3)}.
\end{aligned}$$

Так как функция $u(\theta)$ имеет ограниченную производную, то для $P_2^{(2)}$ и $P_2^{(3)}$ имеем оценки $P_2^{(3)} \leq C_6 h, P_2^{(2)} \leq C_7 h |\ln(h)|$. Для оценки $P_2^{(1)}$ заметим следующее:

$$P_2^{(1)} \leq C_8 \left| \sum_{i,k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0j}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi - \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\theta_{0i} - \theta_{0j}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| = 0,$$

поскольку под знаком модуля уменьшаемое и вычитаемое оба равны нулю: уменьшаемое в силу нечетности функции $(\theta - \theta_{0j})/\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3$ по переменной $(\theta - \theta_{0j})$, а вычитаемое в силу специального способа выбора точек $M_{0i,0j}$, так как нечетной становится разность $(\theta_{0i} - \theta_{0j})$.

Таким образом, проведенные выше в п. 2 рассуждения показывают, что справедлива

Теорема. Пусть функция $g(M)$ на торе такая, что все ее частные производные второго порядка по переменным θ и φ ограничены на торе. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int_T \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_{0j,0m}}} \right) g(M) d\sigma_M - \sum_{i,k=1}^n g(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_{0j,0m}}} \right) d\sigma_M \right| \leq C_8 h |\ln(h)|,$$

где константа C_8 не зависит от n и точки $M_{0j,0m}$.

3. Отметим теперь некоторые свойства уравнения (1.1). Пусть функция $f(M_0)$ — нормальная производная функции $u_0(M)$, гармоническая во всем пространстве, как это бывает в аэродинамике, когда $u_0(M)$ является потенциалом поля скоростей набегающего потока. В этом случае выполняется условие [6, с. 72]

$$\int_T f(M) d\sigma = 0, \quad (3.1)$$

поэтому решение соответствующей внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа можно представить потенциалом двойного слоя. Поскольку нормальная производная потенциала двойного слоя непрерывна при переходе поверхности расположения его плотности, то мы получаем одновременно и решение внутренней задачи Неймана. Если обозначить через $u(M)$ это решение, представленное потенциалом двойного слоя, то функция $v(M) = u(M) + u_0(M)$ является решением внутренней задачи Неймана на торе для уравнения Лапласа при нулевом граничном условии, т. е. при условии

$$\partial V(M_0)/\partial \mathbf{n}_{M_0}|_{M_0 \in T} = 0. \quad (3.2)$$

Так как тор (как тело) является поверхностно односвязным, то из условия (3.2) следует, что решением внутренней задачи Неймана на торе при этом условии является произвольная константа, т. е.

$$V(M) \equiv C, \quad M \in T^*, \quad (3.3)$$

где T^* — тор как тело. С другой стороны решение внешней задачи Неймана с помощью потенциала двойного слоя единственно, поэтому

$$V(M) \equiv 0, \quad M \in \overline{R^3 \setminus T^*}, \quad (3.4)$$

где черта над обозначением области означает ее замыкание.

Из свойств нормальной производной потенциала двойного слоя и условий (3.3) и (3.4) следует, что решение гиперсингулярного интегрального уравнения (1.1) при условии (3.1) на торе определено с точностью до константы.

Литература

1. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
4. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1959. Т. 2.
5. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.
6. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.