

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Журавлёв, Комбинаторные этюды о танграмах,  
*Матем. просв.*, 2020, выпуск 26, 167–197

<https://www.mathnet.ru/mp977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

18 мая 2025 г., 15:37:41



# Комбинаторные этюды о танграмах

В. М. Журавлёв

Комбинаторика, которая всего лишь тридцать лет назад была карликом среди гигантов, превращается в быть может ещё большего гиганта...

*Джан-Карло Рота*

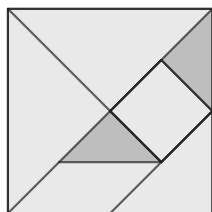
## § 1. ВНЕ ВРЕМЕНИ

Немногим более 30 лет назад вышла из печати<sup>1)</sup> книга Мартина Гарднера «Путешествие во времени». В этой книге он посвятил две главы танграмам. Необходимо отметить, что танграмы упоминаются М. Гарднером и в его более ранних книгах, например, в [1]. У Гарднера написано, что самая старая книга, в которой упоминается эта игра, вышла в Китае в 1803 году под названием «Собрание фигур из семи частей». Так что этой головоломке не менее двух веков. В одной из глав Гарднер увлекательно рассказывает историю танграма. Там же упоминается мистификация Сэма Лойда, опубликованная в 1903 году в книге «Восьмая книга Тана».

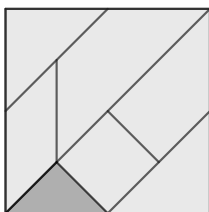
Интерес к этой головоломке был настолько огромен, что тысячи танграмов в формах людей, животных, букв алфавитов и прочих предметов складывались из разнообразнейших материалов — от простого картона до серебра и фарфора. К примеру, известный писатель Эдгар Аллан По владел танграмом, фигурки которого были вырезаны из слоновой кости. Что касается новейшей истории, то в XXI веке танграмы были выпущены в форме почтовых марок и, более того, банк HSBC использовал танграмы в своей рекламной компании 2005 года. Но история не останавливается, и мы уже видим танграмы в виде игровых приложений к мобильным телефонам.

---

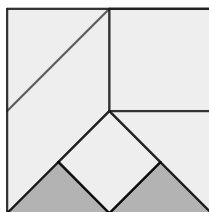
<sup>1)</sup> Книга на английском языке вышла в 1988 г., русский перевод [3] в 1990 г.



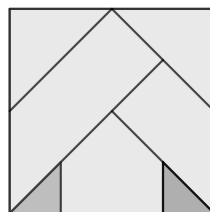
а) Классический Танграм



б) Разбиение по Сэй-Сёнагон



в) Головоломка «Пифагор»



г) Занимательный квадрат

Рис. 1. Классический танграм и другие

Удивительно, но всё вышесказанное относится к головоломке, состоящей из семи кусочков простейшей формы, называемых тангами. Из этих семи кусочков (танов) можно сложить квадрат (рис. 1а) и ещё тысячу разнообразнейших фигурок (как, например, в книге [11]).

Поэтому Танграм — это больше, чем головоломка. Танграм — вне времени.

Назовём самый маленький из равнобедренных прямоугольных треугольников из набора Танграма *элементарным треугольником (элементарным таном)*.

Отметим два свойства:

- (\*) углы всех танов кратны  $\pi/4$ , т. е. равны  $\pi/4$ ,  $\pi/2$  или  $3\pi/4$ ;
- (\*\*) каждый тан мы можем мысленно разбить на несколько элементарных танов.

Так, квадрат, параллелограмм и один из треугольников разбиваются на два элементарных тана. А каждый из больших треугольников — на четыре элементарных тана.

Можем ли мы разбить квадрат каким-то другим способом на семь частей так, чтобы выполнялись свойства (\*) и (\*\*)? Конечно, можем! Вообще говоря, таких разбиений бесконечно много, но давайте посмотрим на некоторые из них. В той же книге Гарднера [3] дано разбиение квадрата по Сэй-Сёнагон (Sei Shōnagon)<sup>2)</sup> (рис. 1б).

Ещё одно известное в нашей стране разбиение квадрата на семь частей, удовлетворяющее условиям (\*) и (\*\*), находим в учебнике геометрии Д. И. Перепёлкина [14], изданном в 1948 году. Там приводится разбиение квадрата (рис. 1в), названное просто «известной игрой-головоломкой». Автор этой статьи впервые познакомился с «известной иг-

<sup>2)</sup> Вряд ли японская писательница знала о приписываемой ей головоломке.

рой-головоломкой» в детстве, когда его дедушка вырезал её элементы из фанеры. По всей видимости, чертёж был взят из учебника геометрии. Чуть позже советская промышленность выпускала эту игру-головоломку из пластика под названием<sup>3)</sup> «Пифагор».

В настоящее время в магазинах игрушек и интернете можно найти головоломку «Занимательный квадрат» (рис. 1г).

Хотя приведённые наборы состоят из разных элементов, составленные из них фигуры мы также будем называть танграмами. Чтобы избежать путаницы, в тексте будем писать без кавычек и с заглавной буквы Танграм, Пифагор тогда, когда мы будем говорить непосредственно о головоломке или наборе элементов этой головоломки.

По мнению М. Гарднера, игра в Танграм распадается на три основные категории:

- 1) поиск одного или нескольких способов построения данной фигурки или изящного доказательства невозможности такого построения;
- 2) нахождение способа, позволяющего с наибольшей выразительностью или юмором (или тем и другим вместе) изобразить силуэты животных, людей или других узнаваемых предметов;
- 3) решение различных задач комбинаторной геометрии, возникающих в связи с составлением фигур из 7 танов.

Учитывая математическую направленность нашей статьи, мы займёмся третьей категорией задач, при этом постараемся не ограничивать себя семью тангами. От простых головоломок, связанных с разрезанием фигур, мы перейдём к нетривиальным математическим задачам.

## § 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для наших дальнейших целей классифицируем танграмы.

Прежде всего уберём из нашего рассмотрения танграмы, части которых примыкают друг к другу только в вершине. Будем рассматривать танграмы, у которых граница не имеет самопересечений. Как сказали бы топологи, граница танграма должна быть топологически эквивалентна окружности. По определению А. Р. Риды такие танграмы называются *собственно танграмами*. В качестве наглядного примера на рис. 2 изображены ворона и лисица — несобственно танграм и собственно танграм. Если немного сдвинуть «треугольник, символизирующий ноги вороны», вдоль

---

<sup>3)</sup> Эта головоломка не имеет никакого отношения к древнегреческому математике и философу Пифагору.

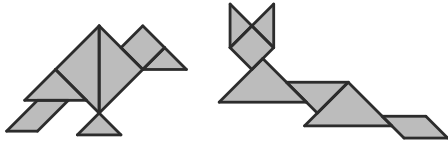


Рис. 2. Ворона — несобственно танграм, лисица — собственно танграм

границы, то мы получим собственно танграм. Поэтому среди собственно танграмов выделим ещё несколько важных подмножеств.

В комбинаторной геометрии рассматриваются *полиформы* — плоские или пространственные геометрические

фигуры, образованные путём соединения одинаковых ячеек — многоугольников или многогранников. Наиболее известные из полиформ — фигуры, составленные из одинаковых квадратов — полимино, из одинаковых правильных треугольников — полиамонды и из одинаковых правильных шестиугольников — полигексы (см., например, [4]).

Идея рассмотрения фигур, составленных из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников по принципу «катет к катету, гипотенуза к гипотенузе», прослеживается также у М. Гарднера в книге [2]. Так составленные фигуры получили название *полиаболо* (*n*-аболо) (рис. 3). В литературе можно встретить и другие названия для таких фигур, например *супертанграммы* или *политаны*. Название «точно подогнанный танграм», предложенное в [3], нам кажется довольно громоздким, поэтому при дальнейшем изложении мы будем применять названия «политаны», «полиаболо» («*n*-аболо») или «танграммы» (опуская приставку «супер»). Название «полиаболо» предложено С. Дж. Коллинзом по аналогии с названиями полимино, полиамондов и других полиформ. Существует один монаболо — элементарный треугольник, три — диаболо, четыре — триаболо, 14 — тетраболо (рис. 3).

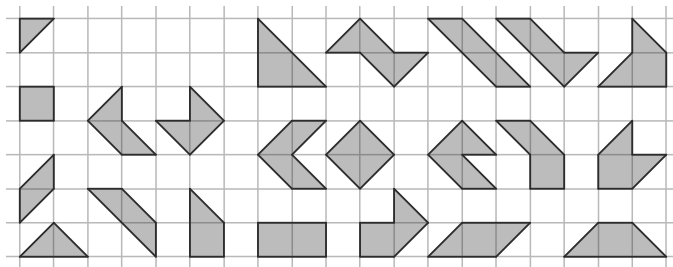


Рис. 3. Полиаболо

Порядком танграма назовём количество составляющих его элементарных треугольников, т. е. элементарный треугольник — это танграм порядка 1, *n*-аболо — танграм порядка *n*. Порядком набора элементов будем считать сумму порядков элементов. Таким образом, набор Танграма,

набор Пифагора, как и квадраты на рис. 1а–в, сложенные из этих наборов, имеют порядок 16. В тоже время головоломка «Занимательный квадрат» (рис. 1г) имеет порядок 32, хоть и состоит из 7 частей.

Если длину катета элементарного тана принять равной 1, то площадь элементарного тана равна  $1/2$ . В этом случае порядок танграма в два раза больше его площади.

Рассмотрим решётку на плоскости, образованную единичным квадратом. Назовём эту решётку *элементарной*. Любой политан можно расположить на плоскости так, чтобы его вершины располагались в узлах элементарной решётки.

Как и в случае других полиформ, политаны различаются по типам. *Трансляционный* тип политанов получается, если мы считаем одинаковыми фигуры, совпадающие при параллельном переносе. *Вращательный* (ротационный) тип возникает, если считать одинаковыми любые два политана, эквивалентные относительно группы собственных движений плоскости — поворотов и параллельных переносов, иногда их называют *односторонними* политанами. *Изометрический* тип возникает, если считать одинаковыми (эквивалентными) любые два конгруэнтных политана, т. е. совпадающих при поворотах и отражениях.

Термин «полиаболо» (« $n$ -аболо») мы будем применять для политанов изометрического или вращательного (одностороннего) типа. Начальными членами последовательности количеств изометрических  $n$ -аболо являются 1, 3, 4, 14, 30, 107, 318, 1116, 3743, 13 240, 46 476, 166 358, 596 638, 2 158 829, 7 839 845, ... (см. [25], A006074). В 2013 году Джордж Сичерман (George Sicherman) вычислил 15-й член этой последовательности, который является наибольшим из известных в настоящее время.

Для количества односторонних  $n$ -аболо получаем последовательность 1, 4, 6, 22, 56, 198, 624, 2182, 7448, 26 319, 92 826, 332 181, 1 192 845, 4 315 845, 14 778 200, ... (см. [25], A151519).

Для математика возникает вопрос про рост членов этих последовательностей. В последнем параграфе мы слегка коснёмся этой темы.

### § 3. ВЫПУКЛЫЕ ТАНГРАМЫ

Если вы уже немного попрактиковались в составлении фигур из семи танов, то сумеете сложить не только квадрат, но и треугольник, прямоугольник, параллелограмм, трапецию. Возникает естественный вопрос комбинаторной геометрии: сколько можно составить выпуклых фигур из семи танов?

Эта задача была решена китайскими математиками Фу Цян Ван (Fu Tsiang Wang) и Чуань-Чи Сюн (Chuan-Chih Hsiung) в 1942 году в статье [20].

Аналогичная задача для головоломки «Пифагор» решена в статье А. Панова [13]. Для разбиения квадрата по Сэй-Сёнагон решение аналогичной задачи приведено в [18].

Посмотрим повнимательнее на основные идеи решения этой задачи.

Мы уже отмечали, что по свойству (\*\*) каждый тан разбивается на несколько элементарных танов. Всего набор Танграма разбивается на 16 элементарных танов. Таким образом, нам необходимо найти все выпуклые фигуры, состоящие из 16 элементарных танов.

Доказательство того факта, что вершины всех выпуклых фигур, состоящих из  $n$  элементарных танов, лежат в узлах элементарной решётки, не элементарно. Ключом к доказательству является факт несоизмеримости катета длиной 1 и гипотенузы длиной  $\sqrt{2}$  элементарного треугольника.

Если установлено, что вершины всех выпуклых фигур, состоящих из элементарных треугольников, лежат в узлах элементарной решётки, то дальнейшие рассуждения можно перевести из области геометрии в алгебру. Сделаем это.

Любой выпуклый танграм (многоугольник) представим в виде прямоугольника с отрезанными уголками (рис. 4). Длины сторон прямоугольника обозначим через  $a$  и  $b$ , а длины катетов отрезанных уголков через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ , где  $a, b \in \mathbb{N}$  и неотрицательные  $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ . С учётом вращений и отражений плоскости можно считать, что  $a \leq b$ .

Площадь такого многоугольника равна

$$S = ab - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2). \quad (1)$$

Учитывая, что площадь 16 элементарных танов равна 8, мы получаем уравнение в целых числах

$$ab - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 8. \quad (2)$$

Мы также должны потребовать, чтобы сумма длин катетов отрезаемых уголков не превышала длины соответствующей стороны, поэтому должны выполняться неравенства

$$x + y \leq a, \quad z + t \leq a, \quad y + z \leq b, \quad x + t \leq b. \quad (3)$$

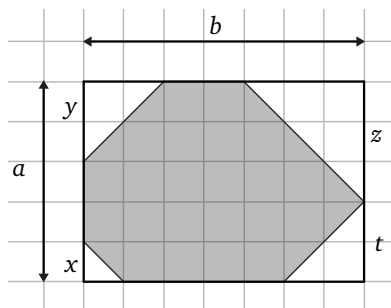


Рис. 4

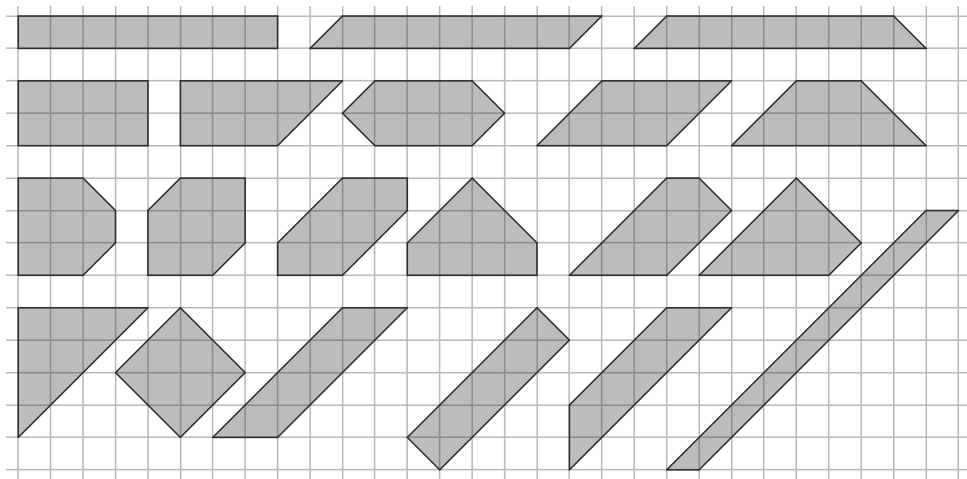


Рис. 5. Выпуклые многоугольники порядка 16

Теперь геометрическая задача на составление фигур превратилась в алгебраическую задачу нахождения решений диофантова уравнения.

Условий (2), (3) достаточно для решения диофантового уравнения. Мы получаем 20 решений и, соответственно, с точностью до вращений и отражений 20 выпуклых многоугольников (рис. 5), которые можно сложить из 16 элементарных танов. Остаётся проверить, что только 13 из этих 20 выпуклых многоугольников можно сложить из элементов Танграма.

В общем случае для выпуклых танграмов порядка  $n$

$$ab - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \frac{n}{2}.$$

Полученные результаты удобно свести в табл. 1. В ней указаны корни диофантова уравнения, по которым однозначно определяется выпуклый многоугольник. В соответствующей колонке проставлен +, если этот многоугольник собирается из элементов одного из наборов Танграм, Сэй-Сёнагон, Пифагор.

В дополнении к главе 4 книги [3] М. Гарднер упоминает интересную задачу<sup>4)</sup>, которую предложил Дж. Конвей. Цитируем: «Какова форма танов из „оптимального набора“, т. е. 7 выпуклых многоугольников, позволяющих составить наибольшее число различных выпуклых многоугольников?»

На самом деле такая формулировка задачи даёт нам поле для серьёзного исследования. Дело в том, что при такой формулировке нет ограни-

<sup>4)</sup> В книге [3] она названа нерешённой.



Таблица 1

Т — Танграм; П — Пифагор; С — Сэй-Сёнагон;  $V_i$  — оптимальные наборы

№	$a$	$b$	$x$	$y$	$z$	$t$	Т	П	С	$V_i$
1	1	8	0	0	0	0			+	+
2	1	9	0	1	0	1			+	+
3	1	9	0	1	1	0			+	+
4	2	4	0	0	0	0	+		+	+
5	2	5	0	0	0	2	+	+	+	+
6	2	5	1	1	1	1	+	+	+	+
7	2	6	0	2	0	2	+	+	+	+
8	2	6	0	2	2	0	+	+	+	+
9	3	3	0	0	1	1	+		+	+
10	3	3	0	1	0	1	+	+	+	+
11	3	4	0	2	0	2	+		+	+
12	3	4	0	2	2	0	+	+	+	+
13	3	5	0	3	1	2	+		+	+
14	3	5	0	3	2	1	+	+	+	+
15	4	4	0	0	0	4	+	+	+	+
16	4	4	2	2	2	2	+	+	+	+
17	4	6	0	4	0	4		+		+
18	5	5	0	3	0	5		+		+
19	5	5	1	4	1	4		+		+
20	8	9	0	8	0	8				

чений на порядок оптимального набора. Если предположить, что задача формулировалась для набора, который можно составить из 16 элементарных треугольников, как и в головоломке Танграм, то такая задача гораздо проще. Собственно, в статье [19] задача решена в следующей уточнённой формулировке.

**Задача 1** (Дж. Конвей, [3]). Какова форма танов из «оптимального набора», т. е. 7 выпуклых многоугольников, позволяющих составить наибольшее число различных выпуклых многоугольников при условии, что порядок оптимального набора равен 16?

**РЕШЕНИЕ.** Отметим, что если набор состоит из 7 выпуклых танов, то с его помощью нельзя одновременно собрать фигуры № 1 и № 20 (рис. 5, фигуры нумеруются слева направо и сверху вниз). Для сборки фигуры № 20 один из элементов набора должен содержать «трапецию» из трёх элементарных танов, а эта трапеция не помещается в фигуру №1. Поэтому из такого набора можно составить не больше 19 выпуклых много-

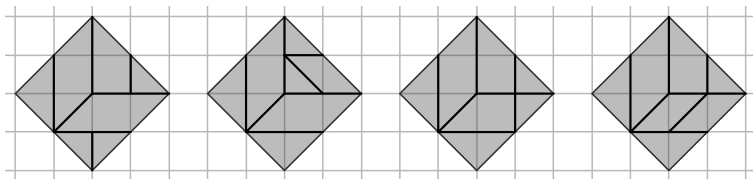


Рис. 6. Четыре оптимальных набора порядка 16

угольников. Остаётся предложить набор из 7 выпуклых тангов, из которых можно сложить 19 выпуклых многоугольников.

В статье [19] приведён один из таких наборов, а в [18] доказано, что существует ровно четыре набора из семи тангов, из которых можно собрать 19 выпуклых многоугольников (рис. 6).

В [18, 19] доказано, что для того, чтобы сложить все 20 выпуклых многоугольников порядка 16, необходимо и достаточно взять некоторый набор из 11 тангов. (Найдите его!) Кроме того, ни из одного набора из 6 тангов нельзя собрать 19 выпуклых многоугольников.

Задача Конвея выходит на совершенно другой комбинаторный уровень, если мы не ограничиваем порядок оптимального набора. Оставшимися ограничениями являются количество элементов набора — их 7 — и требование выпуклости каждого из элементов набора. Вот новая формулировка задачи.

**Задача 2 (Дж. Конвей, для исследования).** Какова форма 7 выпуклых тангов из «оптимального набора», позволяющего составить наибольшее число различных выпуклых многоугольников? Каков минимальный порядок оптимального набора?

Дадим некоторые пояснения.

Количество выпуклых многоугольников, которые можно составить из  $n$  элементарных треугольников, подсчитано для небольших  $n$ . Первоначальные члены этой последовательности находим в [25], A245676. Приведём первые 32 члена этой последовательности: 1, 3, 2, 6, 3, 7, 5, 11, 5, 10, 7, 14, 7, 16, 11, 20, 9, 17, 13, 22, 12, 25, 18, 27, 14, 24, 20, 31, 18, 36, 26, 37, ... Таким образом, имеется один выпуклый многоугольник порядка 1 — это элементарный треугольник, 3 выпуклых многоугольника порядка 2 и т. д. Как было показано на рис. 5, имеется 20 выпуклых многоугольников порядка 16.

Из приведённой последовательности видно, что количество выпуклых многоугольников, которые можно составить из 20 элементарных тангов, равно 22, а из 24 элементарных тангов — уже 27. Если мы будем

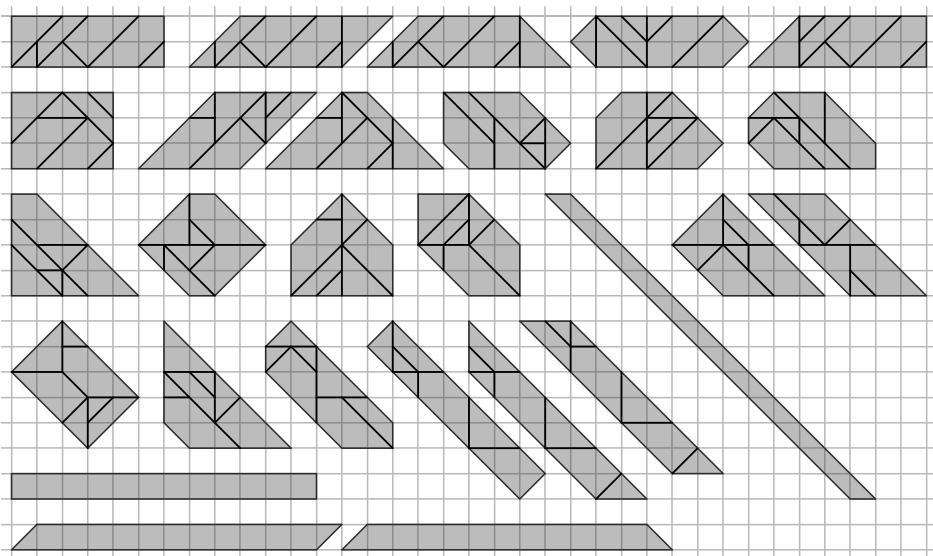


Рис. 7. Выпуклые многоугольники порядка 24 и набор из 7 танов

искать набор из семи выпуклых танов порядка 24, то собрать все 27 выпуклых многоугольников не удастся. Тем не менее можно предположить, что существует набор из семи элементов порядка 24, из которого можно собрать больше чем 19 выпуклых многоугольников.

Потратив некоторое время, такой набор можно найти «вручную» без написания компьютерной программы. Приведём его на рис. 7. Из такого набора из семи выпуклых танов порядка 24 удаётся собрать 23(!) выпуклых многоугольника. Четыре оставшихся выпуклых многоугольника из него не собираются.

Неизвестно, есть ли набор из семи выпуклых элементов, из которого можно собрать больше 23 выпуклых многоугольников.

#### § 4. ЕЩЁ НЕСКОЛЬКО ГОЛОВОЛОМОК

Прежде чем углубиться в серьёзные вычисления, сделаем ещё один небольшой экскурс в головоломки.

В книге Генри Дьюдени [6] в задачах на построение фигурок используются два набора Танграма. В Советском Союзе из пластика производилась головоломка «Танграм-2», очевидно, состоявшая из двух наборов Танграма.

В прошлом веке Московский завод тепловой автоматики выпускал головоломку без названия (рис. 8а). Назовём эту головоломку в честь производителя — головоломка МЗТА. Она напоминает слегка удлинен-

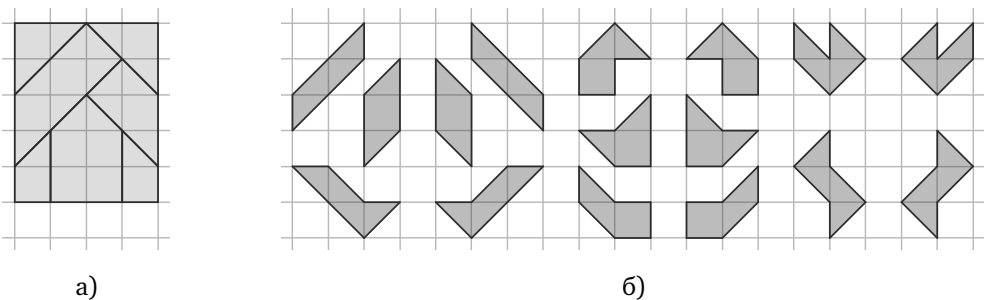


Рис. 8. Головоломки МЗТА, Тетратрион

ную головоломку «Занимательный квадрат», её компактной упаковкой является прямоугольник. В инструкции к головоломке МЗТА предлагалось собрать 129 фигур, а с учётом прямоугольника предложено к сборке 8 выпуклых фигур. Это не полный перечень выпуклых фигур, которые можно собрать из элементов этой головоломки. В книге [16] эта головоломка называется «танграммой». Короткая заметка об этой головоломке опубликована в [8].

В журнале «Наука и жизнь» [12] рассказывалось о Тетратрионе. Эта головоломка односторонняя (т. е. переворачивать элементы нельзя) и состоит из 16 элементов (рис. 8б). Попробуйте сложить из всех 16 элементов квадрат.

Головоломка Билютина [12] состоит из 20 элементов: это два диаболо (без квадрата), 4 триаболо и 14 тетраболо (рис. 3). Из элементов этой головоломки также можно сложить квадрат, а можно сложить два квадрата поменьше.

Все эти головоломки — родственники Танграма. Для них выполнены условия (\*) и (\*\*), т. е. углы всех элементов кратны  $\pi/4$  и при этом каждый элемент головоломки удаётся разбить на элементарные треугольники.

Головоломки, о которых мы говорили, отличаются не только формой элементов, но и порядком наборов элементов, т. е. общим количеством элементарных треугольников, из которых можно сложить полный набор. Так, набор из двух Танграмов имеет порядок 32. Как мы упоминали ранее, порядок головоломки «Занимательный квадрат» также равен 32. Порядок набора для головоломки МЗТА равен 40, для Тетратриона 64, для головоломки Билютина 72.

Мы можем поставить общую комбинаторную задачу отыскания всех выпуклых фигур, которые можно составить из заданного количества элементарных треугольников. И затем найти, какие из этих выпуклых фигур составляются из элементов соответствующей головоломки.

Задача 3. а) Сколько выпуклых многоугольников можно составить из двух наборов Танграма?

б) А из двух наборов Пифагора?

в) Тот же вопрос для двух наборов Сэй-Сёнагон.

Задача 4. Сколько выпуклых многоугольников можно составить из элементов головоломки «Занимательный квадрат»?

Задача 5. а) Сколько выпуклых многоугольников можно составить из набора МЗТА?

б) (для исследования) Тот же вопрос для головоломки Билютина.

Задача 6 (для исследования). а) Какая форма у семи выпуклых танов из «экстремального» набора порядка 32, т. е. набора, из которого можно сложить максимальное число выпуклых многоугольников порядка 32?

б) Какое минимальное количество выпуклых танов должен содержать набор порядка 32, из которого можно сложить все 37 выпуклых многоугольников порядка 32?

## § 5. ГОРИЗОНТАЛЬНО-ВЫПУКЛЫЕ ТАНГРАМЫ

От выпуклых танграмов перейдём к горизонтально-выпуклым.

В множестве трансляционных политанов мы рассмотрим подмножество горизонтально-выпуклых политанов.

**Определение.** *Горизонтально-выпуклыми называются такие политаны, что любая горизонтальная прямая либо не пересекает политан, либо пересекает его по отрезку (точке).*

Наше определение согласуется с определениями для горизонтально-выпуклых полимино и горизонтально-выпуклых полиамондов (см., например, [7, 21]).

На рис. 9а приведён пример горизонтально-выпуклого политана. На рис. 9б, 9в приведены примеры танграмов (собака, мост), не являющихся

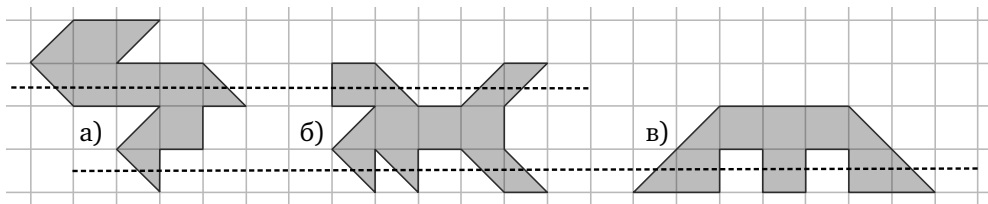


Рис. 9. а) Горизонтально-выпуклый политан.  
б) и в) Не горизонтально-выпуклые политаны

горизонтально-выпуклыми, поскольку существует горизонтальная прямая, которая пересекает их соответственно по двум и трём отрезкам.

Количества горизонтально-выпуклых политанов малых порядков равны 4, 9, 24, 65, 192, 574, ...

Напомним некоторые результаты, относящиеся к полиформам. Пусть  $s_n$  обозначает количество различных горизонтально-выпуклых  $n$ -мино (полимино, состоящих из  $n$  единичных квадратов). Начальные члены этой последовательности:  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 6$ ,  $s_4 = 19$ ,  $s_5 = 61$ ,  $s_6 = 196$  (см. [25], A001169). Известно, что эта последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению третьего порядка:

$$s_n = 5s_{n-1} - 7s_{n-2} + 4s_{n-3} \quad \text{для } n \geq 5. \quad (4)$$

Производящей функцией для последовательности  $\{s_n\}$  будет рациональная функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1-5x+7x^2-4x^3}. \quad (5)$$

Доказано, что количество выпуклых по рядам полиамондов удовлетворяет рекуррентному соотношению седьмого порядка

$$f_n = 3f_{n-1} - 4f_{n-3} + f_{n-4} + f_{n-5} + 3f_{n-6} - f_{n-7} \quad \text{для } n \geq 8. \quad (6)$$

Начальные члены этой последовательности: 2, 3, 6, 14, 34, 84, 208, 515, 1272, ... (см. [25], A238823). Производящей функцией для этой последовательности будет рациональная функция

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x(1-x)(2-x-4x^2+2x^4+3x^5)}{1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7}. \quad (7)$$

Разнообразные доказательства формул (4) и (5) можно найти в источниках [5, 15, 21–23]. В статье [7] получено рекуррентное соотношение (6) и доказана формула (7).

Мы можем ожидать, что последовательность количеств горизонтально-выпуклых политанов также удовлетворяет рекуррентному условию и производящая функция для этой последовательности будет рациональной функцией. В следующем параграфе мы это докажем.

## § 6. Производящие функции для ГОРИЗОНТАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ТАНГРАМОВ

В этом параграфе мы будем рассматривать формальные степенные ряды от одной или нескольких переменных, не вдаваясь в вопросы их

сходимости. Операции сложения, умножения, дифференцирования рядов мы рассматриваем как соответствующие операции над формальными степенными рядами. Для получения результатов необходимо провести некоторые вычисления, которые мы оставляем читателям в качестве несложных упражнений. Будем в основном полагаться на технику из книги [5], но, в отличие от книги, маркируем строки, а не столбцы. Иногда мы будем упрощать выкладки с помощью комбинаторных рассуждений, построив соответствующие биекции между некоторыми множествами горизонтально-выпуклых политанов.

Пусть  $t_n$  обозначает количество различных горизонтально-выпуклых политанов порядка  $n$  (политанов, состоящих из  $n$  элементарных треугольников).

**ТЕОРЕМА 1.** *Последовательность  $\{t_n\}$  удовлетворяет рекуррентному соотношению двенадцатого порядка*

$$t_n = 7t_{n-2} + 8t_{n-3} - 3t_{n-4} - 16t_{n-5} - 8t_{n-6} + \\ + 24t_{n-7} + 44t_{n-8} + 32t_{n-9} + 6t_{n-10} - 8t_{n-11} - 4t_{n-12} \quad (8)$$

при  $n \geq 13$ .

**ТЕОРЕМА 2.** *Производящей функцией для множества горизонтально-выпуклых политанов является рациональная функция*

$$T(x) = \sum_n t_n x^n = \\ = \frac{x(1-x^2)(4+9x-21x^3-36x^4-3x^5+52x^6+78x^7+60x^8+19x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})},$$

где переменная  $x$  маркирует порядок политана.

Определим множества горизонтально-выпуклых политанов  $A, A^*, B, C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**}, H$  и  $T$  в зависимости от формы их верхней строки (верхнего слоя), см. рис. 10:

- а) если верхняя строка политана состоит только из одного элементарного треугольника  $a_1$  или  $a_1^*$  (рис. 11), то отнесём политан к множеству  $A$  или  $A^*$ ;
- б) если верхняя строка политана состоит только из треугольника  $b_2$  (рис. 11), то отнесём политан к множеству  $B$ ;
- в) если верхняя строка является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой короче верхнего, то отнесём политан к множеству  $C$ ; для удобства дальнейших вычислений треугольник  $c_2$  (рис. 11) также отнесём к множеству  $C$ ;

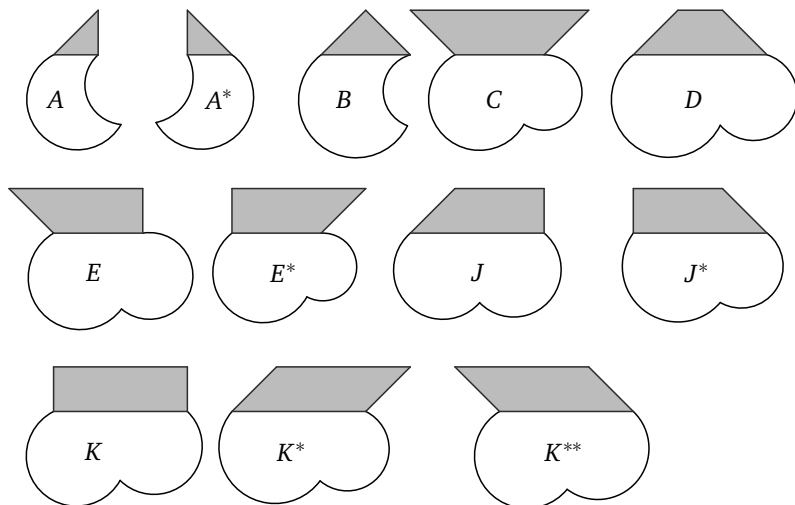


Рис. 10. Множества горизонтально-выпуклых политанов

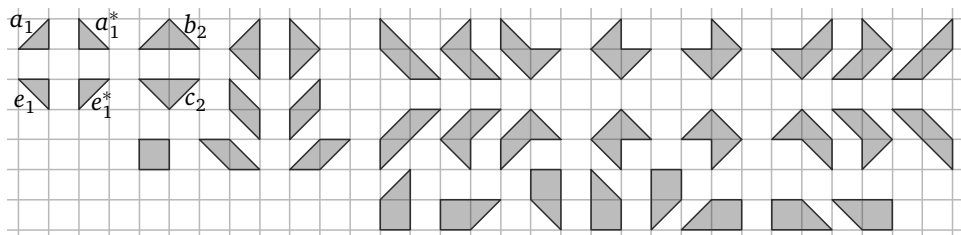


Рис. 11. Множества горизонтально-выпуклых политанов порядков 1, 2 и 3

- г) если верхняя строка танграма является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой длиннее верхнего, то отнесём его к множеству  $D$ ;
- д) если верхняя строка танграма — прямоугольная трапеция, то отнесём его к множествам  $E$ ,  $E^*$ ,  $J$  или  $J^*$  соответственно; кроме того, треугольники  $e_1$  и  $e_1^*$  (рис. 11) отнесём к множествам  $E$  и  $E^*$ ;
- е) если верхняя строка политана — прямоугольник или параллелограмм, то отнесём его к множеству  $K$  либо одному из множеств  $K^*$ ,  $K^{**}$  соответственно.

Множество  $T$  — это множество всех горизонтально-выпуклых политанов, а  $H$  — множество всех горизонтально-выпуклых политанов, не принадлежащих множествам  $A$ ,  $A^*$ ,  $B$ .

Рассмотрим производящие функции от одной и двух переменных. Во вводимых функциях мы считаем, что переменная  $x$  маркирует поря-



док политана, а  $y$  маркирует количество контактных площадок в верхнем слое.

Пусть  $a(p, m)$ ,  $a^*(p, m)$ ,  $b(p, m)$ ,  $c(p, m)$ ,  $d(p, m)$ ,  $e(p, m)$ ,  $e^*(p, m)$ ,  $j(p, m)$ ,  $j^*(p, m)$ ,  $k(p, m)$ ,  $k^*(p, m)$ ,  $k^{**}(p, m)$ ,  $h(p, m)$  и  $t(p, m)$  — количество политанов порядка  $p$  типов  $A, A^*, B, C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**}, H$  и  $T$  соответственно, верхний слой которых содержит  $m$  контактных площадок.

Из соображений симметрии мы можем заключить, что

$$k^*(p, m) = k^{**}(p, m).$$

Следовательно, производящие функции множеств  $K^*$  и  $K^{**}$  равны:

$$K^*(x, y) = K^{**}(x, y).$$

Аналогично

$$A(x, y) = A^*(x, y), \quad E(x, y) = E^*(x, y), \quad J(x, y) = J^*(x, y).$$

Поскольку у политанов из множеств  $A, A^*, B$  в верхнем слое контактные площадки отсутствуют, при  $m \geq 1$  имеем

$$a(p, m) = a^*(p, m) = b(p, m) = 0.$$

Следовательно, производящие функции

$$A(x, y) = A^*(x, y) = \sum_p a(p, m)x^p y^m, \quad B(x, y) = \sum_p b(p, m)x^p y^m$$

не зависят от  $y$  и являются функциями одной переменной. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} A^*(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} B(x, y) = 0.$$

Можно записать  $A(x, y) = A(x, 1) = A(x)$ ,  $B(x, y) = B(x, 1) = B(x)$ .

Производящими функциями для политанов типов  $C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**}, H$  и  $T$  будут

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \sum_{p,m} c(p, m)x^p y^m, \\ D(x, y) &= \sum_{p,m} d(p, m)x^p y^m, \\ &\dots\dots\dots \\ T(x, y) &= \sum_{p,m} t(p, m)x^p y^m. \end{aligned}$$

Из определения следует, что

$$\begin{aligned}
 H(x, y) &= C(x, y) + D(x, y) + E(x, y) + E^*(x, y) + \\
 &\quad + J(x, y) + J^*(x, y) + K(x, y) + K^*(x, y) + K^{**}(x, y) = \\
 &= C(x, y) + D(x, y) + 2E(x, y) + 2J(x, y) + K(x, y) + 2K^*(x, y), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$T(x, y) = A(x, y) + A^*(x, y) + B(x, y) + H(x, y) = 2A(x) + B(x) + H(x, y). \quad (10)$$

Отметим, что нам не надо искать функцию от двух переменных  $T(x, y)$ . Достаточно найти выражение этой функции при  $y = 1$ , т. е. найти  $T(x, 1)$ .

Нам понадобится

ЛЕММА 1. Для всех  $p \geq 1, m \geq 1$  выполняются равенства

- а)  $k(p+1, m+1) = k^*(p+1, m+1) = j(p, m), k(p+1, 1) = k^*(p+1, 1) = a(p, 0)$ ;
- б)  $j(p+1, m+1) = d(p, m), j(p+1, 1) = b(p, 0)$ ;
- в)  $e(p+1, m+1) = k(p, m)$ ;
- г)  $c(p+1, m+1) = e(p, m)$ .

Доказательство. а) Если мы добавим элементарный тан справа в верхний слой политана из множества  $J$ , то получим политан из множества  $K^*$ , у которого в верхнем слое не менее четырёх элементарных танов. Добавляя элементарный тан справа в верхний слой политана из множества  $A$ , получим политан из множества  $K^*$ , у которого в верхнем слое ровно два элементарных тана. Так мы получаем все политаны из множества  $K^*$ . Эта процедура обратима, и из каждого политана из множества  $K^*$ , удаляя правый элементарный тан из верхнего слоя, мы получим политан из множества  $J$  или  $A$  (рис. 12). Получаем взаимно однозначное соответствие между указанными множествами.

Случаи б), в), г) доказываются аналогично (рис. 12). □

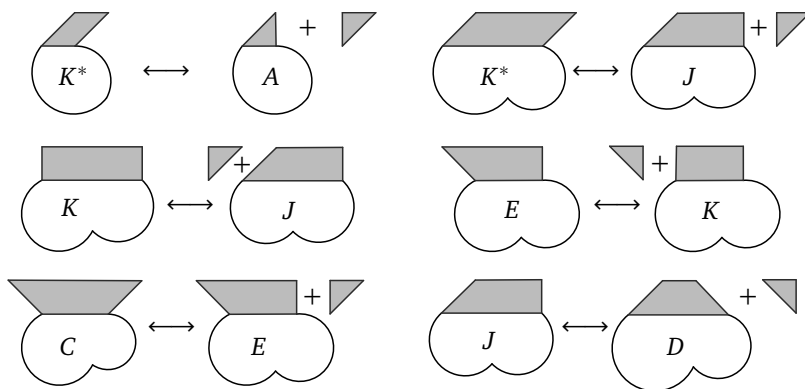


Рис. 12. Биекции

Из леммы 1 получаем следующую систему функций:

$$\begin{cases} K(x, y) = K^*(x, y) = xyA(x) + xyJ(x, y), \\ J(x, y) = xyB(x) + xyD(x, y), \\ E(x, y) = xy + xyK(x, y), \\ C(x, y) = xyE(x, y). \end{cases}$$

После соответствующих подстановок имеем

$$\begin{cases} K(x, y) = K^*(x, y) = xyA(x) + x^2y^2B(x) + x^2y^2D(x, y), \\ J(x, y) = xyB(x) + xyD(x, y), \\ E(x, y) = xy + x^2y^2A(x) + x^3y^3B(x) + x^3y^3D(x, y), \\ C(x, y) = x^2y^2 + x^3y^3A(x) + x^4y^4B(x) + x^4y^4D(x, y). \end{cases} \quad (11)$$

Тогда из (9) получаем

$$\begin{aligned} H(x, y) = 2xy + x^2y^2 + (3xy + 2x^2y^2 + x^3y^3)A(x) + \\ + (2xy + 3x^2y^2 + 2x^3y^3 + x^4y^4)B(x) + \\ + (1 + 2xy + 3x^2y^2 + 2x^3y^3 + x^4y^4)D(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Для доказательства следующих лемм проведём вспомогательные вычисления.

Для значений частной производной по  $y$  степенных рядов  $H(x, y)$  и  $D(x, y)$  при  $y = 1$  введём обозначения:

$$\eta(x) = \frac{\partial}{\partial y} H(x, y) \Big|_{y=1}, \quad \delta(x) = \frac{\partial}{\partial y} D(x, y) \Big|_{y=1}.$$

При почленном дифференцировании формального ряда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y^k H(x, y)) \Big|_{y=1} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{p,m} h(p, m) x^p y^{m+k} \right) \Big|_{y=1} = \\ &= \sum_{p,m} (m+k) h(p, m) x^p = \sum_p \left( \sum_m (m+k) h(p, m) \right) x^p \end{aligned}$$

для всех целых  $k \geq 0$ .

С другой стороны, используя свойство дифференцирования произведения функций, получим

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^k H(x, y)) \Big|_{y=1} = kH(x, 1) + \eta(x).$$

Следовательно, для всех целых  $k \geq 0$

$$kH(x, 1) + \eta(x) = \sum_p \left( \sum_m (m+k) h(p, m) \right) x^p. \quad (13)$$

В частности, при  $k = 0$

$$\eta(x) = \sum_p \left( \sum_m mh(p, m) \right) x^p. \quad (14)$$

В следующей задаче явно вычисляются формальные степенные ряды.

ЗАДАЧА 7. Докажите следующие равенства:

$$\text{а) } \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s} y^{s-1} = \frac{1}{y} \sum_{s=2}^{\infty} (x^2 y)^s = \frac{x^4 y}{1 - x^2 y}, \quad \text{б) } \sum_{s=2}^{\infty} s x^{2s} y^{s-1} = \frac{x^4 y (2 - x^2 y)}{(1 - x^2 y)^2}.$$

ЛЕММА 2. Выполняется равенство

$$A(x) = x + x\eta(x). \quad (15)$$

Доказательство. Посмотрим, как получаются политаны из множества  $A$ . Возьмём политан из  $A$ , состоящий из одного треугольника, и начнём прикладывать его сверху к некоторому исходному политану так, чтобы получился новый политан. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный политан был из множеств  $A$ ,  $A^*$  или  $B$ . Если исходный политан — из  $H$  и в его верхней строке содержится  $m$  контактных площадок, то такую операцию можно проделать  $m$  способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все политаны подмножества  $A$ , кроме треугольника  $a_1$  (рис. 11, с. 181).

Следовательно, для всех  $p$  выполняются равенства

$$a(p+1, 0) = \sum_m mh(p, m).$$

Для треугольника  $a_1$  мы имеем  $a(1, 0) = 1$ . Используя (14), получаем

$$A(x) = x + \sum_p a(p+1, 0) x^{p+1} = x + x \sum_p \left( \sum_m mh(p, m) \right) x^p = x + x\eta(x).$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

Отсюда

$$\eta(x) = \frac{A(x)}{x} - 1. \quad (16)$$

ЛЕММА 3. Выполняется равенство

$$B(x) = xA(x) + x^2 H(x, 1). \quad (17)$$

Доказательство. Посмотрим, как получаются политаны из  $B$ . Возьмём треугольник  $b_2$  (рис. 11) и начнём прикладывать его сверху к некоторому политану (назовём его исходным) так, чтобы получился новый

политан. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный танграм был из множеств  $A$ ,  $A^*$  или  $B$ . Если исходный политан из множества  $H$  и в его верхней строке содержится  $m$  контактных площадок, то такую операцию можно проделать  $(m + 1)$  способами. Заметим, что таким образом можно получить все политаны подмножества  $B$ , кроме треугольника  $b_2$ . Следовательно, для всех  $p$  выполняются соотношения

$$b(p + 2, 0) = \sum_m (m + 1)h(p, m).$$

Для треугольника  $b_2$  мы имеем  $b(2, 0) = 1$ .

Вспоминая (13), получаем

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2 + \sum_p b(p + 2, 0)x^{p+2} = \\ &= x^2 + x^2 \sum_p \left( \sum_m (m + 1)h(p, m) \right) x^p = x^2 + x^2(H(x, 1) + \eta(x)). \end{aligned}$$

С учётом (16) получаем требуемое:  $B(x) = xA(x) + x^2H(x, 1)$ .  $\square$

**Лемма 4.** *Выполняется равенство*

$$D(x, y) = \frac{x^3yA(x)}{1-x^2y} + H(x, 1)\frac{x^4y(2-x^2y)}{(1-x^2y)^2}. \quad (18)$$

**Доказательство.** Посмотрим, как получаются политаны из  $D$ . Возьмём политан из  $D$ , состоящий из одной строки площади  $2s$ ,  $s = 2, 3, 4, \dots$  У этого политана сверху  $s - 1$  контактных площадок, а снизу  $s + 1$  контактных площадок. Начнём прикладывать его сверху к некоторому исходному политану так, чтобы получился новый политан. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный политан был из множеств  $A$ ,  $A^*$  или  $B$ . Если исходный политан из  $H$  и в его верхней строке содержится  $m$  контактных площадок, то такую операцию можно проделать  $m + s$  способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все политаны подмножества  $D$ , кроме тех, которые состоят из одной строки.

Следовательно, для всех  $p, s$  выполняются равенства

$$d(p + 2s, s - 1) = \sum_m (m + s)h(p, m).$$

Для политанов подмножества  $D$ , состоящих из одной строки, получаем  $d(2s, s - 1) = 1$ .

Используя (13), выведем соотношение для производящих функций. Получаем

$$D(x, y) = \sum_{p,m} d(p, m)x^p y^m =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=2}^{\infty} d(2s, s-1)x^{2s}y^{s-1} + \sum_{p,s} d(p+2s, s-1)x^{p+2s}y^{s-1} = \\
&= \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} + \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} \left[ \sum_p \left( \sum_m (m+s)h(p, m) \right) x^p \right] = \\
&= \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} + \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} (sH(x, 1) + \eta(x)) = \\
&= \frac{A(x)}{x} \sum_{s=2}^{\infty} x^{2s}y^{s-1} + H(x, 1) \sum_{s=2}^{\infty} sx^{2s}y^{s-1}.
\end{aligned}$$

Используя вычисления из решения задачи 7 (см. с. 185), получаем

$$D(x, y) = \frac{x^3yA(x)}{1-x^2y} + H(x, 1) \frac{x^4y(2-x^2y)}{(1-x^2y)^2}.$$

Лемма доказана. □

Перейдём теперь к доказательству теоремы.

**Доказательство теоремы 2.** Для получения системы уравнений с производящими функциями подставим  $y = 1$  в соотношения (12) и (18). Ещё два уравнения можно получить, если продифференцировать соотношения (12) и (18) по  $y$  и затем сделать подстановку  $y = 1$ . С учётом (15) и (16) получаем систему из шести уравнений с шестью функциями:

$$\left\{ \begin{array}{l}
H(x, 1) = 2x + x^2 + (3x + 2x^2 + x^3)A(x) + (2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4)B(x) + \\
\quad + (1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4)D(x, 1), \\
D(x, 1) = \frac{x^3A(x)}{1-x^2} + H(x, 1) \frac{x^4(2-x^2)}{(1-x^2)^2}, \\
\eta(x) = 2x + 2x^2 + (3x + 4x^2 + 3x^3)A(x) + (2x + 6x^2 + 6x^3 + 4x^4)B(x) + \\
\quad + (2x + 6x^2 + 6x^3 + 4x^4)D(x, 1) + (1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4)\delta(x), \\
\delta(x) = \frac{x^3A(x)}{(1-x^2)^2} + H(x, 1) \frac{2x^4}{(1-x^2)^3}, \\
A(x) = x + x\eta(x), \\
B(x) = xA(x) + x^2H(x, 1).
\end{array} \right.$$

Методом последовательного исключения неизвестных находим:

$$\begin{aligned}
H(x, 1)x &= \frac{x(1-x^2)^2(2+4x-4x^3-10x^4-11x^5-6x^6-2x^7)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}, \\
A(x) &= \frac{x^2(1-x^2)(1+4x+3x^2-10x^3-16x^4+17x^6+30x^7+21x^8+4x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})},
\end{aligned}$$

$$B(x) = \frac{x(1-x^2)(1+2x-x^2-8x^3-8x^4+10x^5+24x^6+26x^7+12x^8-2x^9-2x^{10})}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})},$$

$$D(x, 1) = \frac{x^4(1+6x+7x^2-10x^3-20x^4-10x^5+6x^6+24x^7+19x^8+4x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}.$$

В итоге получаем

$$T(x, 1) = \frac{x(1-x^2)(4+9x-21x^3-36x^4-3x^5+52x^6+78x^7+60x^8+19x^9)}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}.$$

Теорема доказана.  $\square$

Из (11) находим:

$$J(x, 1) = \frac{x^3(1+4x+3x^2-8x^3-12x^4+13x^6+20x^7+10x^8-2x^9-2x^{10})}{(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10})}.$$

Для  $T(x)$  имеем

$$(1+x+x^2)(1-x-7x^2+10x^4+6x^5-8x^6-22x^7-14x^8+4x^9+4x^{10}) \times \\ \times \sum_n t_n x^n = x(1-x^2)(4+9x-21x^3-36x^4-3x^5+52x^6+78x^7+60x^8+19x^9).$$

Поскольку правая часть равенства является многочленом, то и левая часть должна быть многочленом. Коэффициент при  $x^n$ , где  $n \geq 13$ , равен

$$t_n - 7t_{n-2} - 8t_{n-3} + 3t_{n-4} + 16t_{n-5} + 8t_{n-6} - \\ - 24t_{n-7} - 44t_{n-8} - 32t_{n-9} - 6t_{n-10} + 8t_{n-11} + 4t_{n-12}.$$

Но поскольку в правой части все коэффициенты при  $x^n$ ,  $n \geq 13$ , равны нулю, последовательность  $t_n$  удовлетворяет для  $n \geq 13$  рекуррентному соотношению двенадцатого порядка

$$t_n = 7t_{n-2} + 8t_{n-3} - 3t_{n-4} - 16t_{n-5} - 8t_{n-6} + 24t_{n-7} + \\ + 44t_{n-8} + 32t_{n-9} + 6t_{n-10} - 8t_{n-11} - 4t_{n-12}. \quad (19)$$

Таким образом, мы получили доказательство теоремы 1.

Характеристическое уравнение будет следующим:

$$x^{12} - 7x^{10} - 8x^9 + 3x^8 + 16x^7 + 8x^6 - 24x^5 - 44x^4 - 32x^3 - 6x^2 + 8x + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет действительные корни, наибольший из них

$$x_{\max} \approx 2,9705133922.$$

Поскольку  $x_{\max}$  не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку

$$2,97051339^n \leq t_n \leq 2,9705134^n \quad (20)$$

(см. следующий параграф).

Таблица 2

$n$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$j$	$k$	$h$	$t$
1	1	0	0	0	1	0	0	2	4
2	2	1	1	0	0	0	1	4	9
3	5	4	0	0	1	1	2	10	24
4	12	9	1	1	2	4	6	32	65
5	41	22	2	6	6	10	16	88	192
6	120	73	6	14	16	28	51	261	574
7	360	208	16	40	51	87	148	776	1704
8	1076	621	51	123	148	248	447	2307	5080
9	3205	1852	148	348	447	744	1324	6850	15 112
10	9512	5512	447	1041	1324	2200	3949	20 383	44 919
11	28 279	16 362	1324	3076	3949	6553	11 712	60 540	133 460
12	83 954	48 662	3949	9157	11 712	19 438	34 832	179 902	396 472
13	249 418	144 494	11 712	27 164	34 832	57 819	103 392	534 354	1 177 684

Приведём табл. 2, в которой сведены начальные значения последовательностей.

При помощи онлайн калькулятора (например, [24]) нетрудно получить разложения производящих функций в степенной ряд от одной переменной:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 22x^5 + 73x^6 + 208x^7 + \\
 &\quad + 621x^8 + 1852x^9 + 5512x^{10} + \dots, \\
 B(x) &= x + 2x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 41x^5 + 120x^6 + 360x^7 + \\
 &\quad + 1076x^8 + 3205x^9 + 9512x^{10} + \dots, \\
 H(x) &= 2x + 4x^2 + 10x^3 + 32x^4 + 88x^5 + 261x^6 + 776x^7 + \\
 &\quad + 2307x^8 + 6850x^9 + 20\,383x^{10} + \dots, \\
 T(x) &= 4x + 9x^2 + 24x^3 + 65x^4 + 192x^5 + 574x^6 + 1704x^7 + \\
 &\quad + 5080x^8 + 15\,112x^9 + 44\,919x^{10} + \dots
 \end{aligned}$$

Понятно, что эти разложения согласуются с табл. 2.



## § 7. Пояснения к асимптотике

Дадим небольшие пояснения к формуле (20). Рекуррентному соотношению порядка  $k$  соответствует характеристический многочлен степени  $k$  с теми же коэффициентами. Каждый из корней характеристического многочлена представляет знаменатель некоторой геометрической прогрессии, удовлетворяющей данному рекуррентному соотношению. Например, если все корни характеристического уравнения различны, то получаются  $k$  различных геометрических прогрессий, которые образуют базис рекуррентного соотношения. Тогда любая последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению, представляется в виде суммы некоторых геометрических прогрессий, и её асимптотический рост совпадает с ростом наибольшего положительного корня характеристического уравнения (если такие имеются). Подробно о теории рациональных производящих функций можно прочесть в [15, глава 4, раздел 4.1]. Адаптированное для школьников изложение теории можно найти в книге [10].

В нашем случае все 12 корней характеристического уравнения различны, из них 4 пары сопряжённых комплексных корней  $z_1, z_2, \dots, z_8$  и 4 действительных корня  $x_1, x_2, x_3, x_4 = x_{\max}$ .

Левая часть характеристического уравнения является произведением двух сомножителей:

$$\begin{aligned} x^{12} - 7x^{10} - 8x^9 + 3x^8 + 16x^7 + 8x^6 - 24x^5 - 44x^4 - 32x^3 - 6x^2 + 8x + 4 = \\ = (x^2 + x + 1)(x^{10} - x^9 - 7x^8 + 10x^6 + 6x^5 - 8x^4 - 22x^3 - 14x^2 + 4x + 4). \end{aligned}$$

Поэтому два комплексных корня являются решениями квадратного уравнения, остальные корни могут быть найдены приближённо:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{1}{2} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_{3,4} &\approx -0,3404556671803965 \mp 1,015869789106097 \cdot i, \\ z_{5,6} &\approx 1,29200642827081 \mp 0,6600928274655522 \cdot i, \\ z_{7,8} &\approx -0,9685242996835521 \mp 0,681359052898141 \cdot i, \\ x_1 &\approx -1,778585858585858, \\ x_2 &\approx -0,6415582100196113, \\ x_3 &\approx 0,4835777126099707, \\ x_4 &\approx 2,9705133922. \end{aligned}$$

При этом нетрудно проверить, что корень  $x_4$  является наибольшим по модулю.

Получаем 12 различных геометрических прогрессий, которые образуют базис рекуррентного соотношения. Таким образом, последовательность горизонтально-выпуклых политанов представляется в виде линейной комбинации (суммы) геометрических прогрессий со знаменателями  $z_1, z_2, \dots, z_8, x_1, x_2, x_3, x_4$ . Запишем

$$t_n = A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1} + A_3 z_3^{n-1} + A_4 z_4^{n-1} + A_5 z_5^{n-1} + A_6 z_6^{n-1} + \\ + A_7 z_7^{n-1} + A_8 z_8^{n-1} + B_1 x_1^{n-1} + B_2 x_2^{n-1} + B_3 x_3^{n-1} + B_4 x_4^{n-1}, \quad (21)$$

где коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_8, B_1, B_2, B_3, B_4$  являются решением системы из 12 уравнений, получаемых при соответствующей подстановке  $n = 1, 2, \dots, 12$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \\ t_2 = 9 = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + A_4 z_4 + A_5 z_5 + A_6 z_6 + A_7 z_7 + A_8 z_8 + \\ \quad + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4, \\ t_3 = 24 = A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + A_3 z_3^2 + A_4 z_4^2 + A_5 z_5^2 + A_6 z_6^2 + A_7 z_7^2 + A_8 z_8^2 + \\ \quad + B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + B_3 x_3^2 + B_4 x_4^2, \\ \dots \\ t_{12} = 39\,6472 = \dots \end{array} \right. \quad (22)$$

На самом деле от комплексных геометрических прогрессий можно избавиться с помощью формулы Муавра:

$$z^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Учитывая, что

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}\right),$$

по формуле Муавра получим

$$z_{1,2}^{n-1} = (-1)^{n-1} \left(\cos \frac{\pi(n-1)}{3} \pm i \sin \frac{\pi(n-1)}{3}\right).$$

Тогда

$$A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1} = A_1 (-1)^{n-1} \left(\cos \frac{\pi(n-1)}{3} + i \sin \frac{\pi(n-1)}{3}\right) + \\ + A_2 (-1)^{n-1} \left(\cos \frac{\pi(n-1)}{3} - i \sin \frac{\pi(n-1)}{3}\right) = \\ = (A_1 + A_2) (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi(n-1)}{3} + i (A_1 - A_2) (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi(n-1)}{3}.$$

Сделав замену коэффициентов  $C_1 = A_1 + A_2$ ,  $C_2 = i(A_1 - A_2)$ , от суммы  $A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1}$  мы перейдём к периодической функции. Аналогично можно поступить с другими парами комплексных сопряжённых корней.

Поскольку корень  $x_4$  — наибольший по модулю из всех действительных и комплексных корней, асимптотический рост последовательности количеств горизонтально-выпуклых политанов совпадает с ростом последовательности

$$B_4 x_4^{n-1} \approx \frac{B_4}{2,9705133922} \cdot 2,9705133922^n.$$

Последовательность количеств горизонтально-выпуклых политанов является возрастающей. Действительно, каждому  $(n-1)$ -политану сопоставим  $n$ -политан, добавляя тан в верхнюю строку определённым способом, при этом с учётом разбиения на множества горизонтально-выпуклых политанов  $A, A^*, B, C, D, E, E^*, J, J^*, K, K^*, K^{**}$  можно добиться того, что все полученные  $n$ -политаны будут различными. Кроме того, будут существовать  $n$ -политаны, которые получатся иным способом.

Если  $B_4 < 0$ , то при больших  $n$  отрицательное слагаемое  $B_4 x_4^{n-1}$  больше суммы остальных по абсолютной величине и количество горизонтально-выпуклых политанов отрицательно, что невозможно. Предположим, что  $B_4 = 0$ . Коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_8, B_1, B_2, B_3, B_4$  являются решением системы из 12 уравнений (22), получаемых при соответствующей подстановке  $n = 1, 2, \dots, 12$ . Определитель матрицы правой части системы (22) представляет собой определитель Вандермонда от корней алгебраического уравнения.

Поскольку все корни разные, определитель Вандермонда не равен нулю. Следовательно, система имеет единственное решение. В этом решении  $B_4 \neq 0$ .

Таким образом, коэффициент  $B_4$  положителен. Поскольку

$$2,97051339 \leq 2,9705133922 \leq 2,9705134,$$

при достаточно больших  $n$  выполнены асимптотические оценки

$$2,97051339^n \leq t_n \approx B_4 x_4^{n-1} \leq 2,9705134^n.$$

Другой способ найти асимптотику состоит в разложении производящей функции в сумму простейших дробей.

## § 8. КОНСТАНТЫ РОСТА

В заключение отметим, что одной из задач при рассмотрении полиформ является нахождение или оценка константы роста.

Пусть  $A(n)$  — последовательность трансляционных полимино порядка  $n$  (см. [25], A001168). Тогда существует предел

$$\lambda_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A(n)}$$

и отношение  $A(n+1)/A(n)$  стремится к пределу  $\lambda_A$  при  $n \rightarrow \infty$ . На текущий момент лучшие известные оценки снизу и сверху на  $\lambda_A$  — это 4,0025 и 4,6496.

Если через  $P(n)$  обозначить последовательность трансляционных полиамондов порядка  $n$  (см. [25], A001420), то точно так же существуют пределы

$$\lambda_P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n+1)}{P(n)}.$$

В [17] доказано, что  $2,8424 \leq \lambda_P \leq 3,6050$ .

Пусть  $F(n)$  обозначает последовательность трансляционных политанов порядка  $n$ . Можно предположить, что для трансляционных политанов также существует некоторая константа роста  $\lambda_F$ . Оценку снизу на эту константу можно получить, если заметить, что трансляционное полимино порядка  $n$  состоит из  $n$  квадратов, а квадрат состоит из двух элементарных треугольников, поэтому

$$A(n) < F(2n).$$

Улучшить эту оценку можно с использованием полиамондов. Дело в том, что с помощью аффинного преобразования (рис. 13) каждому полиамонду можно сопоставить политан.

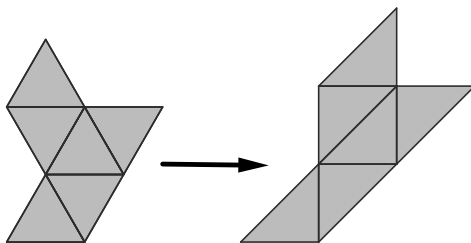


Рис. 13

Тогда у нас получается  $P(n) < F(n)$ , следовательно,  $\lambda_P < \lambda_F$ .

Получение более точных оценок для политанов потребует развития имеющихся алгоритмов для полимино и полиамондов и выходит за рамки этой статьи.

Для умножения многочленов, нахождения корней и разложения в ряды автором использовался онлайн-портал <https://cocalc.com>.

## § 9. РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ

3. Всего имеется 37 выпуклых многоугольников порядка 32.

а) Из двух наборов Танграма можно собрать 33 из них (рис. 14).

б) Из двух наборов Пифагора можно собрать 31 из них (рис. 15).

в) Из двух наборов Сэй-Сёнагон можно собрать 33 из них (рис. 16).

4. Всего имеется 37 выпуклых многоугольников порядка 32. Из набора головоломки «Занимательный квадрат» можно собрать 22 выпуклых многоугольника (рис. 17).

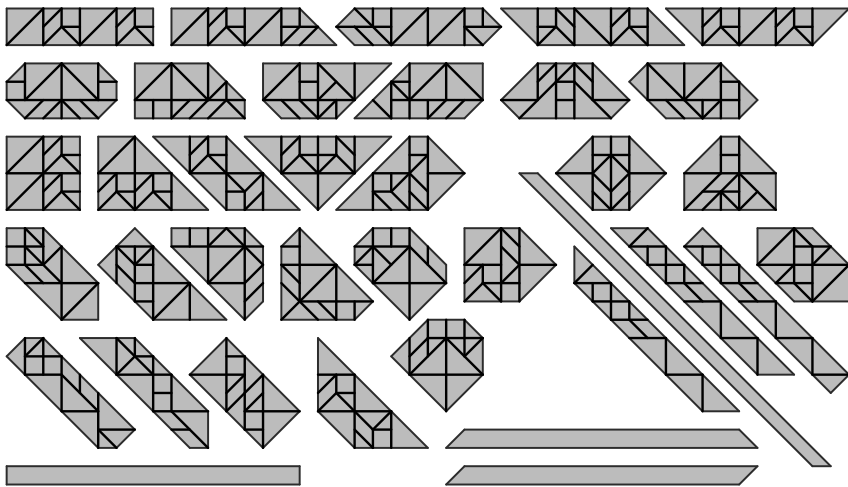


Рис. 14

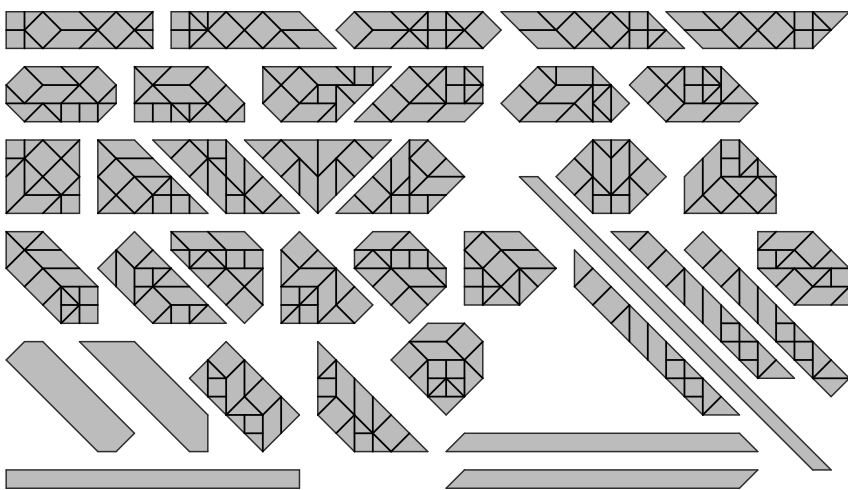


Рис. 15

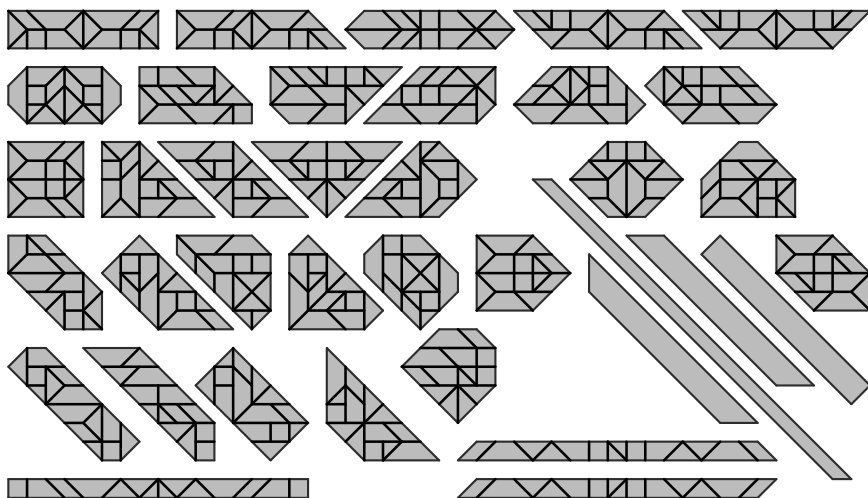


Рис. 16

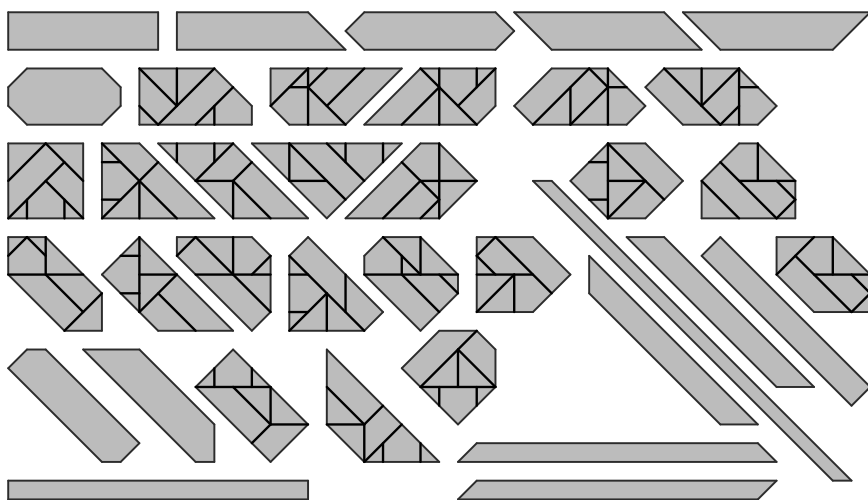


Рис. 17

5. Всего имеется 47 выпуклых многоугольников порядка 40. Из набора головоломки МЗТА можно собрать 21 из них (рис. 18).

7. УКАЗАНИЯ. а) Для решения задачи достаточно воспользоваться формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z},$$

а затем сделать подстановку  $z = x^2y$ .

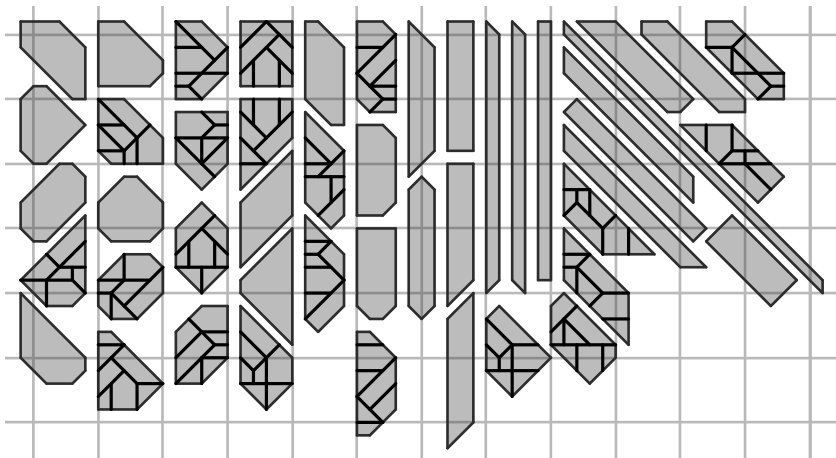


Рис. 18

б) Для решения задачи необходимо продифференцировать ряд из предыдущего пункта

$$\frac{\partial}{\partial z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{1-z} \right),$$

а затем сделать подстановку  $z = x^2y$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит К. А. Ванькова и П. И. Самовола за внимание к работе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971. С. 326–335.
- [2] Гарднер М. Математические новеллы. М.: Мир, 1974. С. 267–281.
- [3] Гарднер М. Путешествие во времени. М.: Мир, 1990. С. 37–66.
- [4] Голомб С. В. Полимино. М.: Мир, 1975.
- [5] Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука. 1990. С. 69, задача 2.3.15. С. 336–337, решение задачи.
- [6] Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. М.: Мир, 1975. С. 214–215, задача 520.
- [7] Журавлёв В. М. Горизонтально-выпуклые полиамонды и их производящие функции // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 107–129.
- [8] Журавлёв В. Родственник Танграма // Квант. 2017. № 5, 2-я стр. обложки.

- [9] Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. С. 26–28.
- [10] Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М.: Наука, 1983.
- [11] Надеждина В. Книга танграм. 1000 + 1 фигура. Минск: Харвест, 2007.
- [12] Наука и жизнь, 1992, № 1. С. 128–129; 1969, № 6. С. 146–147.
- [13] Панов А. Загадка фигуры № 51 // Квант. 1982. № 12. С. 34–37.
- [14] Перепёлкин Д. И. Курс элементарной геометрии. Часть 1. Геометрия на плоскости. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. С. 208–209.
- [15] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 1990. С. 375–383, задача 4.7.18.
- [16] Таунсенд Ч. Б. Звёздные головоломки. М.: АСТ-ПРЕСС, 1998. С. 37.
- [17] Barequet G., Shalah M., Zheng Y. An improved lower bound on the growth constant of polyiamonds // Journal of Combinatorial Optimization. 2019. Vol. 37, № 2. P. 424–438.
- [18] Fox-Epstein E., Katsumata K., Uehara R. The convex configurations of “Sei Shonagon Chie no Ita”, Tangram, and other silhouette puzzles with seven pieces // IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences. E99-A (2016). 1084–1089.
- [19] Fox-Epstein E., Uehara R. The convex configurations of “Sei Shonagon Chie no Ita” and other dissection puzzles // arXiv:1407.1923v1 [cs.CG] 8 Jul 2014.
- [20] Fu Tsiang Wang, Chuan-Chih Hsiung. A Theorem on the Tangram // American Mathematical Monthly. 1942. Vol. 49. P. 596–599.
- [21] Hickerson D. Counting Horizontally Convex Polyominoes // Journal of Integer sequences. 1999. Vol. 2. Article 99.1.8.
- [22] Klarner D. A. Cell growth problems // Canad. J. Math. 1967. Vol. 19. P. 851–863.
- [23] Pólya G. On the number of certain lattice polygons // J. Combinatorial Theory. 1969. Vol. 6. P. 102–105.
- [24] <https://cocalc.com/>
- [25] <http://oeis.org/>