

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Левина, А. А. Непомнящий, А. А. Поздеев, Резонансное воздействие нестационарного искривления границ на устойчивость и вторичные режимы течения вязкой жидкости, *Докл. АН СССР*, 1982, том 266, номер 6, 1334–1337

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

12 февраля 2025 г., 13:08:50



Г.В. ЛЕВИНА, А.А. НЕПОМНЯЩИЙ,
 член-корреспондент АН СССР А.А. ПОЗДЕЕВ

РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ИСКРИВЛЕНИЯ ГРАНИЦ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ВТОРИЧНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Задачи о движении вязкой жидкости вдоль нестационарно деформируемых границ возникают во многих областях науки и техники. Значительный интерес представляет исследование влияния активной (т.е. вызванной заданным внешним воздействием) деформации границ на устойчивость течений. В этой связи следует упомянуть работу [1], в которой в рамках линейной теории изучалась устойчивость течения в пограничном слое при наличии бегущей волны на стенке (для нерезонансного случая).

В настоящей работе излагаются результаты исследования влияния нестационарной деформации границ на нелинейную устойчивость и вторичные режимы течения вязкой жидкости в резонансном случае, когда фазовая скорость бегущей волны на границах близка к фазовой скорости возмущений, ответственных за неустойчивость основного движения. Построенная теория применима к течениям произвольной природы: конвективным, магнитогидродинамическим, течениям в пограничном слое и т.д.

Используемый подход проиллюстрируем на примере двумерного течения несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном слое, твердые границы которого искривлены в противофазе и деформируются по закону бегущей волны с фазовой скоростью c . Считаем, что течение вызвано направленной вдоль оси y объемной силой и осуществляется при заданном среднем по периоду волны расходе жидкости q . В системе отсчета, движущейся вместе с волной, уравнение движения имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \Delta^2 \psi - R \frac{dF}{dx};$$

граничные условия [2]:

$$(2) \quad \begin{aligned} x = -(1 + \eta \cos ky), \quad \psi = q - 2c, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = c, \\ x = 1 + \eta \cos ky, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = c. \end{aligned}$$

В отсутствие искривления границ ($\eta = 0$) в слое реализуется плоскопараллельное течение $\psi_0(x)$. Пусть при $R = R_0(k)$ это течение теряет устойчивость по отношению к возмущениям с волновым числом k , частота которых в неподвижной системе отсчета равна ω_0 . Задача состоит в описании пространственно-периодических надкритических режимов при $\eta \neq 0$ и частоте внешнего воздействия $\Omega = ck$, близкой к ω_0 .

Использованный в [1] метод разложения по параметру волнистости η неприменим в резонансном случае и не позволяет описать бифуркации решений. Эффективным средством анализа режимов течения в припороговой области оказывается метод разложения по малому параметру ϵ (см., например, [3]), пропорциональному амплитуде неплоскопараллельной составляющей течения, в сочетании с методом многих временных масштабов. Ранее [4] этот подход применялся для исследования устойчивости течения в области со стационарными волнистыми гра-

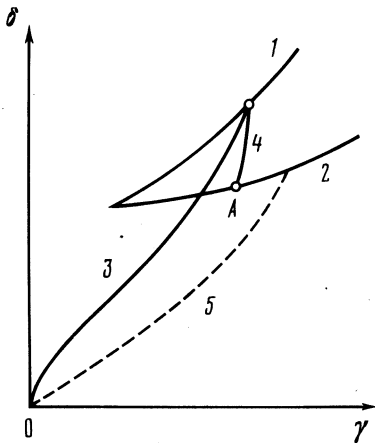


Рис. 1. Диаграмма режимов

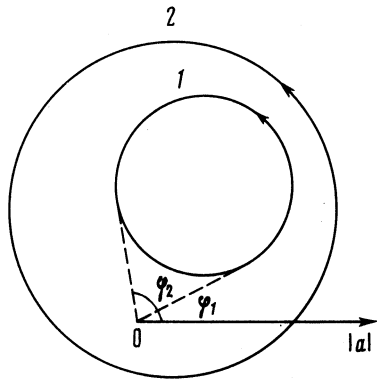


Рис. 2. Переход между режимами колебаний и сквозного движения вихрей

ницами. Метод основывается на разложениях:

$$(3) \quad \begin{aligned} \psi - \psi_0 &= \sum_n \epsilon^n \psi_n, & \eta &= \sum_n \epsilon^n \eta_n, \\ R - R_0 &= \epsilon^2 R_2, & \Omega - \omega_0 &= \epsilon^2 \Omega_2. \end{aligned}$$

Вводится преобразование координат, спрямляющее границы области:

$$(4) \quad x' = \frac{x}{1 + \eta \cos ky}, \quad y' = y.$$

Функции ψ_n предполагаются зависящими от набора времен $t_n = \epsilon^n t$. В первом порядке решение имеет вид

$$\psi_1 = a_1 \varphi(x) e^{iky} + \bar{a}_1 \bar{\varphi}(x) e^{-iky}, \quad a_1 = a_1(t_1, t_2, \dots),$$

где $\varphi(x)$ — решение уравнения Орра—Зоммерфельда. Из условия разрешимости задачи в третьем порядке получается эволюционное уравнение для комплексной амплитуды $a = \epsilon a_1$, которое можно привести к виду

$$(5) \quad \frac{da}{dt} = (\sigma + i \Delta) a - \kappa |a|^2 a + g \eta, \quad \Delta = \Omega - \omega;$$

здесь $\sigma - i \omega$ — комплексный инкремент для возмущения плоскопараллельного течения в неподвижной системе координат, $\kappa = \kappa_r + i \kappa_i$ — константа Ландау, g — вещественный коэффициент. В дальнейшем предполагается мягкий тип ветвления ($\kappa_r > 0$).

Осуществлено полное исследование предельных режимов уравнения (5) для произвольных значений параметров. Поскольку уравнение (5) эквивалентно системе двух вещественных уравнений, его предельными режимами могут быть только стационарные решения и циклы [5]. Построение стационарных решений и исследование их устойчивости производились аналитически; расчет циклов и сепаратрис осуществлялся посредством численного интегрирования методом Рунге—Кутты.

Определяющими для уравнения (5) являются параметры $\gamma = \sigma / |\Delta|$, $\delta = \eta (\kappa_r / |\Delta|^3)^{1/2}$, $B = (\kappa_i / \kappa_r) \text{sign } \Delta$, пропорциональные соответственно надкритичности, волнистости и нелинейному сдвигу частоты. Установлено, что решающее

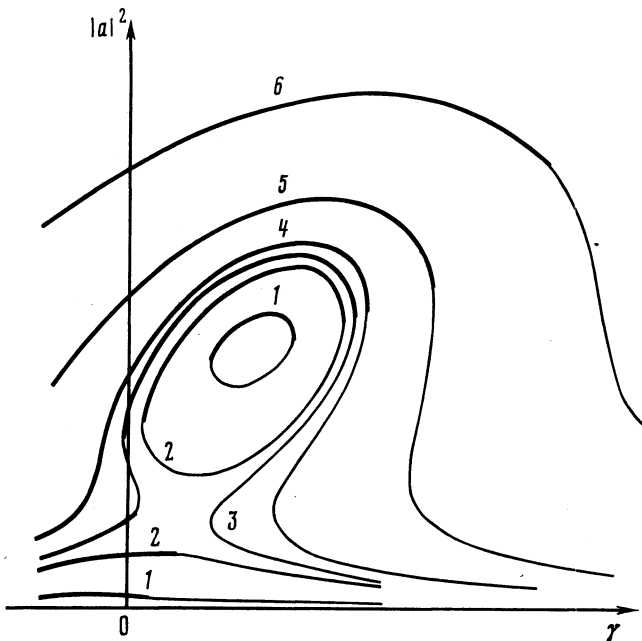


Рис. 3. Амплитудные кривые при $B = 2$; $\delta = 0,1$ (1), $0,25$ (2), $0,28$ (3), $0,316$ (4), $0,5$ (5), 1 (6)

значение для картины переходов имеют знак и величина параметра B , определяемого исключительно профилем исходного течения.

В качестве примера опишем результаты, полученные для случая $B = 0$ (диаграмма режимов схематически изображена на рис. 1).

В области между кривыми 1 и 2 существуют три стационарных решения, вне ее — одно. Кривая 3 — граница колебательной неустойчивости стационарного решения, на которой в область больших γ ответвляется цикл. На кривой 4 цикл превращается в сепаратрису седловой точки, при этом его период стремится к бесконечности. На участке кривой 2 правее точки A цикл рождается из сепаратрисы седлоузла. На кривой 5 происходит переход между режимами колебаний и сквозного движения вихрей вдоль слоя. Этот переход не является бифуркацией, что поясняет рис. 2 (кривая 1 — фазовая траектория для режима колебаний, 2 — для сквозного движения вихрей).

Диаграмма режимов, изображенная на рис. 1, качественно, сохраняется в области $-\sqrt{3}/3 < B < 0$. При $B < -\sqrt{3}/3$ при всех значениях параметров существует единственное стационарное решение, теряющее устойчивость колебательно. При $B > 0$ расстройка между частотой конечноамплитудных колебаний $\omega + \kappa_j |a|^2$ и частотой колебаний границы Ω с ростом амплитуды уменьшается. Это приводит к нелинейному резонансу, проявляющемуся в образовании замкнутых амплитудных кривых для стационарных решений, показанных на рис. 3 (жирными линиями отмечены участки устойчивости, а тонкими — неустойчивости стационарных режимов).

Результаты исследования уравнения (5) подтверждены расчетами, выполненными на основе полных уравнений гидродинамики методом сеток. Исследовалось свободноконвективное течение в вертикальном слое, устойчивость которого в случае плоских стенок хорошо изучена [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзин Л.Б., Володин А.Г. – ПМТФ, 1979, № 5, с. 49–52. 2. Левина Г.В. В сб.: Конвективные течения. Пермь, 1979, вып. 1, с. 126. 3. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977, с. 366. 4. Возовой Л.П., Непомнящий А.А. – ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 998–1007. 5. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967, с. 487. 6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, с. 392.

УДК 532.516 : 532.574.4

ГИДРОМЕХАНИКА

Б.Л. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, И.Н. СИМАКИН

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

(Представлено академиком Н.Н. Яненко 17 III 1982)

Рассматриваются двумерные течения несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале с фиксированным средним градиентом давления и течения с фиксированным расходом. Эти два типа течений характеризуются разными числами Рейнольдса R_p и R_Q . Обсуждаются методы сравнения течений разных типов.

На течение Пуазейля накладываются периодические возмущения конечной амплитуды и численно рассчитывается эволюция течения. Проводится сравнение результатов, полученных В. Джорджем и др. [1], С. Орсагом и Л. Келлзом [2] и в настоящей работе. Проведенные нами расчеты показали, что при $R_p < 5000$ ($R_Q < 3600$) все периодические возмущения с периодом $L \leq 2\pi$ полностью затухают. Однако нами обнаружено, что при $R_p \geq 2900$ ($R_Q \geq 2700$) достаточно большие возмущения с периодом $L \geq 6\pi$ не затухают и течение стремится при $t \rightarrow \infty$ к устойчивому нестационарному вторичному течению.

1. Изучение устойчивости стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в каналах и трубах, а также турбулентных режимов течения связано со сравнением нестационарных течений с исходным стационарным. Для такого сравнения удобно характеризовать эти нестационарные течения некоторым "числом Рейнольдса", связанным с числом Рейнольдса стационарного течения. Для бесконечно малых отклонений нестационарного течения от базового стационарного течения (линейная теория устойчивости) эта связь однозначна: число Рейнольдса нестационарного течения принимают равным числу Рейнольдса базового течения. Однако при рассмотрении нестационарных течений, отличающихся по параметрам от базового на конечную величину (нелинейная теория устойчивости), такая связь неоднозначна, и на практике применяется несколько типов этого соответствия.

Рассмотрим этот вопрос для течений в плоском бесконечном канале, когда базовым течением является плоское течение Пуазейля.

Принято характеризовать течение в плоском канале числом Рейнольдса

$$(1) \quad R = \frac{Ul}{\nu},$$

где l – полуширина канала, U – максимальная скорость жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости.