В. В. Васин, Регуляризация и итеративная аппроксимация для линейных некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации,
Тр. ИММ УрО РАН, 2002, том 8, номер 1, 189–202

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 8 № 1 2002

УДК 517.983.54

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ИТЕРАТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ[1]

В. В. Васин

Для устойчивой аппроксимация негладкого (разрывного) решения линейного операторного уравнения 1-го рода предлагается двухэтапный регуляризующий алгоритм. На первом этапе проводится тихоновская регуляризация, где в качестве стабилизирующего функционала используется полная вариация (total variation) в совокупности с нормой $L_p(D)$, $D \subset \mathbb{R}^m$. Это позволяет установить сильную сходимость регуляризованных решений в $L_p(D)$ и сходимость их вариаций без каких-либо ограничений на размерность m. На втором этапе для решения регуляризованной задачи применяется и обосновывается субградиентный метод с итерациями в более гладком пространстве $W_2^1(D)$. Кроме того, формулируется и доказывается теорема сходимости дискретных аппроксимаций для регуляризованной задачи.

1. Введение

При устойчивом восстановлении негладких, в частности, разрывных решений некорректных задач, рассматриваемых в виде операторного уравнения

$$Au = f, \tag{1.1}$$

принципиальным вопросом является выбор стабилизирующего функционала в вариационных методах регуляризации. Требования, предъявляемые к стабилизатору, носят в определенном смысле противоречивый характер. С одной стороны, этот функционал должен обладать достаточно сильным стабилизирующим эффектом, чтобы гарантировать сходимость в подходящей топологии, а с другой, не слишком заглаживать решение, чтобы не потерять тонкой структуры.

В случае, когда пространство решений — пространство функций одной переменной, для этой цели во многих работах в методе Тихонова использовались стабилизаторы вида $\Omega(u) = \sigma||u|| + \gamma V[u]$, где $\sigma^2 + \gamma^2 > 0$, $V[u]$ — вариация функции u на сегменте, а $||u||$ — некоторая норма, как правило, L_p $(p \geq 1)$. На этом пути удается получить кусочно-равномерную сходимость регуляризованных решений к нормальному решению уравнения (1.1) (см., например, [1] и библиографию в ней).

В цикле работ [2,3] результаты по кусочно-равномерной аппроксимации обобщены на двумерный и многомерный случаи. В качестве второго члена стабилизатора здесь берется вариация на m-мерном параллелепипеде D, определяемая по аналогии с функцией одной переменной, а $||u|| = ||u||_{L_1}$. Случай $m \leq 3$ изучался в [4] с использованием стабилизатора

$$\Omega_\beta(u) = ||u||_{L_1} + J_\beta(u),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00325)

где

$$J_\beta(u) = \sup\{\int\limits_D (u(x)\, div\, v(x) + \sqrt{\beta(1-|v(x)|^2)})\, dx :\ v \in C_0^1(D,\mathbb{R}^m),\ |v(x)| \le 1\}.$$

При $\beta = 0$ $J_\beta(u)$ может быть переписан в форме

$$J(u) = \sup\{\int\limits_D u(x)\, div\, v(x)\, dx :\ v \in C_0^1(D,\mathbb{R}^m),\ |v(x)| \le 1\}. \tag{1.2}$$

Функционал $J(u)$ носит название полной вариации (total variation) функции u (см. [5]). Доказана сильная сходимость регуляризованных по Тихонову решений в пространстве L_p, $1 \le p < m/(m-1)$ и слабая сходимость в L_p при $p = m/(m-1)$.

В настоящей работе для произвольной размерности m и произвольной области D с кусочно-гладкой границей используется стабилизирующий функционал в виде

$$\Omega(u) = \sigma||u||^p_{L_p(D)} + \gamma J(u) \quad (p > 1) \tag{1.3}$$

и доказывается сильная сходимость регуляризованных решений в пространстве $L_p(D)$ для любого $p > 1$ вместе со сходимостью по функционалу $J(u)$. Кроме того, дается обоснование устойчивости (сходимости) конечномерных аппроксимаций для тихоновского регуляризатора. Наконец, устанавливается теорема сходимости в $L_p(D)$, $p \ge 2$, целого класса итеративных методов субградиентного типа для задачи минимизации регуляризующего функционала с негладким (недифференцируемым) стабилизатором (1.3). Заметим, что проблема обоснования алгоритмов негладкой оптимизации для регуляризованной задачи в упомянутых выше работах не затрагивается.

Стабилизатор (1.3) при $p = 2$ ранее рассматривался в работе [6]. Однако, как и в [4], сильная сходимость регуляризованных решений здесь получена только при $p < m/(m-1)$. В общей ситуации сильная сходимость в L_2 и оценка погрешности устанавливаются при дополнительных условиях на гладкость решения.

При дальнейшем изложении для простоты полагаем $\sigma = \gamma = 1$ и, как правило, опускаем индекс $L_p(D)$ при норме.

2. Сходимость регуляризованных решений

Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий из $L_p(D)$ в $L_q(S)$, где $1 < p, q < \infty$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $S \subset \mathbb{R}^k$. Обратимость A или непрерывность обратного к A оператора не предполагается, поэтому уравнение (1.1) относится к числу существенно некорректных задач. Пусть уравнение (1.1) разрешимо в пространстве $U = \{u \in L_p(D) :\ J(u) < \infty\}$ для точных данных A, f, которые заданы своими приближениями A_h, f_δ с условиями аппроксимации

$$||f - f_\delta|| \le \delta, \quad ||A - A_h|| \le h. \tag{2.1}$$

Заметим, что U, наделенное нормой $||u|| = ||u||_{L_p} + J(u)$, является банаховым пространством, что устанавливается аналогично случаю $p = 1$ (см. [5], замечание 1.12). Рассмотрим метод регуляризации Тихонова в форме

$$\min\left\{||A_h u - f_\delta||^q + \alpha\,\Omega(u - u^0) :\ u \in U\right\}, \tag{2.2}$$

где стабилизирующий функционал $\Omega(u)$ определен формулой (1.3) с $J(u)$, заданным соотношением (1.2).

Теорема 2.1. *Пусть A, A_h — линейные ограниченные операторы. Тогда для любой пары A_h, f_δ с условием* (2.1), *для любого $\alpha > 0$ и $u^0 \in U$ задача* (2.2) *имеет единственное решение u^α, и при связи параметров $\alpha(\delta,h) \to 0$, $(\delta+h)^q/\alpha(\delta,h) \to 0$ имеет место сходимость*

$$\lim_{\delta,h\to 0} ||u^{\alpha(\delta,h)} - \hat{u}||_{L_p} = 0, \quad \lim_{\delta,h\to 0} J(u^{\alpha(\delta,h)} - u^0) = J(\hat{u} - u^0),$$

где $\hat{u}$ — нормальное решение уравнения (1.1) *относительно строго выпуклого функционала $\Omega(u - u^0)$.*

Доказательство. Разрешимость. Обозначим через $\Phi^\alpha(u)$ целевой функционал в задаче (2.2), а через Φ^α_* — его нижнюю грань. Пусть u_m — минимизирующая последовательность, т.е. $\Phi^\alpha(u^m) \to \Phi^\alpha_*$, $m \to \infty$. Тогда $\{u^m\}$ ограничена по норме L_p и поэтому слабо компактна, т.е. $u^{m_k} \rightharpoonup \bar{u} \in L_p$. Принимая во внимание слабую непрерывность оператора A_h и слабую полунепрерывность снизу функционала $J(u)$ (см. [5], теорема 1.9) в L_p, имеем цепочку неравенств

$$\Phi^\alpha_* \le \Phi^\alpha(\bar{u}) \le \liminf_{k\to\infty} \Phi^\alpha(u^{m_k}) \le \limsup_{k\to\infty} \Phi^\alpha(u^{m_k}) = \Phi^\alpha_*,$$

из которой следует, что $\bar{u}$ реализует минимум в задаче (2.2).

Так как функционалы

$$N(u) = ||A_h u - f_\delta||^q, \quad J(u - u^0)$$

выпуклые ([4], теорема 2.4), а $||u - u^0||^p$ — строго выпуклый как степень $p > 1$ строго выпуклой нормы, то экстремальный элемент $\bar{u}$ единственен.

Сходимость. Переобозначим $\bar{u}$ через u^α. Пусть $\hat{u}$ — нормальное решение уравнения (1.1) относительно функционала $\Omega(u - u^0) = ||u - u^0||^p + J(u - u^0)$, т.е.

$$\Omega(\hat{u} - u^0) = \min\{\Omega(u - u^0) : \ Au = f\}.$$

Поскольку множество решений уравнения (1.1) выпукло и замкнуто, а $\Omega(u - u^0)$ — строго выпуклый слабо полунепрерывный снизу функционал, то нормальное решение существует и единственно.

Из очевидного неравенства

$$\Phi^\alpha(u^\alpha) = ||A_h u^\alpha - f_\delta||^q + \alpha(||u^\alpha - u^0||^p + J(u^\alpha - u^0)) \le$$

$$\le \Phi^\alpha(\hat{u}) \le (h||\hat{u}|| + \delta)^q + \alpha(||\hat{u} - u^0||^p + J(\hat{u} - u^0))$$

имеем оценку

$$||u^\alpha - u^0||^p + J(u^\alpha - u^0) \le (h||\hat{u}|| + \delta)^q / \alpha + ||\hat{u} - u^0||^p + J(\hat{u} - u^0), \qquad (2.3)$$

из которой при связи параметров $\alpha(\delta,h)$, оговоренных в условиях теоремы, следует ограниченность $\{u^{\alpha(\delta,h)}\}$. Поэтому для некоторой подпоследовательности $\alpha(\delta_k, h_k) \equiv \alpha_k$

$$u^{\alpha_k} \rightharpoonup u^*, \quad k \to \infty, \qquad (2.4)$$

т.е. сходится слабо в L_p. Тогда с учетом предыдущих соотношений получаем

$$||Au^* - f|| \le \liminf_{k\to\infty} ||Au^{\alpha_k} - f|| \le \liminf_{k\to\infty} [\Phi^{\alpha_k}(u^{\alpha_k})]^{1/q} \le \limsup_{k\to\infty} [\Phi^{\alpha_k}(\hat{u})]^{1/q} =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} [(h_k||\hat{u}|| + \delta_k)^q + \alpha_k(||\hat{u} - u^0||^p + J(\hat{u} - u^0))]^{1/q} = 0,$$

т.е. u^* — решение уравнения (1.1).

Из соотношений (2.3), (2.4) находим, что

$$\|u^* - u^0\|^p + J(u^* - u^0) \le \liminf_{k\to\infty}[\|u^{\alpha_k} - u^0\|^p + J(u^{\alpha_k} - u^0)] \le$$

$$\le \limsup_{k\to\infty}[\|u^{\alpha_k} - u^0\|^p + J(u^{\alpha_k} - u^0)] \le \|\hat{u} - u^0\|^p + J(\hat{u} - u^0).$$

Последнее означает, что u^* совпадает с нормальным решением $\hat{u}$. Кроме того, справедливо

$$\lim_{k\to\infty}[\|u^{\alpha_k} - u^0\|^p + J(u^{\alpha_k} - u^0)] = \|\hat{u} - u^0\|^p + J(\hat{u} - u^0),$$

что с учетом слабой полунепрерывности снизу функционалов влечет сходимость

$$\lim_{k\to\infty}\|u^{\alpha_k} - u^0\|^p = \|\hat{u} - u^0\|^p, \quad \lim_{k\to\infty} J(u^{\alpha_k} - u^0) = J(\hat{u} - u^0). \tag{2.5}$$

Так как L_p при $p > 1$ — равномерно выпуклое пространство, то (2.4), (2.5) влекут сильную сходимость в L_p ([7], стр. 37)

$$\lim_{k\to\infty}\|u^{\alpha_k} - \hat{u}\| = 0. \tag{2.6}$$

Поскольку из доказательства следует, что $\hat{u}$ — единственная предельная точка, то (2.5) и (2.6) справедливы и для всей последовательности.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть известна априорная информация о принадлежности нормального решения $\hat{u}$ выпуклому замкнутому множеству $K \subset U$. Тогда утверждение теоремы сохраняет силу, если в методе регуляризации* (2.2) *заменить пространство U на множество K.*

Полученные результаты по сходимости регуляризованных решений обобщаются на случай нелинейных операторов A, а именно: справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть A, A_h — нелинейные секвенциально слабо замкнутые операторы* ([7], *стр.* 61) *из $L_p(D)$ в $L_q(S)$ с условием аппроксимации: для любого ограниченного множества $Q \subset U$*

$$\sup\{\|A(u) - A_h(u)\| : u \in Q\} \to 0, \quad h \to 0.$$

Тогда справедливо заключение теоремы 2.1 *в части сходимости регуляризованных решений с заменой обычной сходимости в L_p на β-сходимость оптимальных множеств $U^{\alpha(\delta,h)}$ ко множеству нормальных решений $\hat{U}$, т.е.*

$$\sup_{u^{\alpha(\delta,h)}\in U^{\alpha(\delta,h)}} \inf_{\hat{u}\in\hat{U}} \|u^{\alpha(\delta,h)} - \hat{u}\| \to 0, \quad \delta, h \to 0.$$

Доказательство можно получить, следуя с несущественными изменениями методике, изложенной при доказательстве теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Утверждение теоремы* 2.1 *сохраняет силу, если вместо непрерывности операторов A, A_h потребовать лишь их замкнутость.*

В некоторых случаях при восстановлении разрывных решений уравнения (1.1) возникает необходимость в привлечении стабилизатора $\Omega(u)$, обладающего бо́льшим регуляризующим эффектом для получения сходимости приближенных решений в более сильной норме, чем L_p, но более слабой норме, чем W_p^n $(n \ge 1)$. Для этой цели (в одномерном случае) естественно использовать пространство Соболева с дробной производной. Остановимся на этом подробнее.

Как известно [8], односторонний интеграл Римана–Лиувилля дробного порядка β функции φ определяется по формуле

$$u(t) = I^{\beta}_{a+}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\, ds. \tag{2.7}$$

На множестве функций $u(t)$, представимых в форме (2.7), где $\varphi \in L_p(a,b)$, введем норму

$$||u||^p = \int\limits_a^b |u(t)|^p\, dt + \int\limits_a^b |D^{\beta}_{a+}u(t)|^p\, dt,$$

где

$$D^{\beta}_{a+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int\limits_a^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\beta}}\, ds$$

— левосторонняя дробная производная порядка β.

Полученное пространство обозначим через $W^{\beta}_p(a,b)$. При $1 < p < \infty$ это — полное равномерно выпуклое пространство, а при $p = 2$ — гильбертово, причем его норма сильнее, чем норма $L_p(a,b)$, но слабее, чем норма $W^1_p(a,b)$ (см. [9]), и все пространства непрерывно вложены. Таким образом, в нашем распоряжении целая шкала пространств, нормы которых можно использовать в качестве стабилизатора в тихоновской регуляризации при аппроксимации разрывных решений.

Теорема 2.3. *Пусть в задаче* (2.2) *стабилизатор* $\Omega(u-u^0) = ||u-u^0||^p_{W^{\beta}_p}$ $(0<\beta<1,$ $1<p<\infty)$, *а пространство* $U = W^{\beta}_p(a,b)$. *При выполнении условий теоремы* 2.1 *или* 2.2 *задача* (2.2) *однозначно разрешима и имеет место сильная сходимость регуляризованных решений*

$$\lim_{\delta,h\to 0} ||u^{\alpha(\delta,h)} - \hat{u}||_{W^{\beta}_p} = 0.$$

Доказательство. Поскольку W^{β}_p, L_q $(1<p,q<\infty)$ — равномерно выпуклые пространства, то при установлении сходимости экстремалей u^{α} можно воспользоваться известной методикой (см. например, [7]).

Следствие. *Если нормальное решение* $\hat{u} \in L_q$, *где* $q = p/(1-\beta p)$, *то*

$$\lim_{\delta,h\to 0} ||u^{\alpha(\delta,h)} - \hat{u}||_{L_q} = 0.$$

Доказательство следует из известного факта, что при данной связи параметров оператор $I^{\beta}_{a+}: L_p \to L_q$ ограничен (см. [8], теорема 3.5).

3. Субградиентные методы решения регуляризованной задачи

Возможность применения итерационных процессов градиентного типа в задачах минимизации может быть реализована в условиях существования, по крайней мере, субградиента целевого функционала. В нашем случае исследование субдифференцируемости функционала полной вариации $J(u)$, который входит в целевой функционал задачи (2.2), в пространстве L_p крайне затруднительно. Поэтому основная идея, которая здесь предлагается, заключается в том, чтобы строить минимизирующую последовательность в задаче (2.2) на основе субградиентного метода не в пространстве $L_p(D)$, а в более гладком пространстве $W_p^1(D)$, в частности, W_2^1. Тогда для функций $u \in W_2^1(D)$ функционал (1.2) на основании формулы Грина принимает вид

$$J(u) = \int_D |\nabla u|\, dx, \qquad |\nabla u| = (\sum_{i=1}^m (\partial u/\partial x_i)^2)^{1/2},$$

что обеспечивает его субдифференцируемость на $W_2^1(D)$ ([10], стр. 210) и позволяет использовать технику гильбертова пространства при доказательстве сходимости целого класса методов субградиентного типа.

3.1. Принципиальная возможность построения в задаче (2.2) минимизирующей последовательности из более гладких функций $u \in W_2^1(D)$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.1. *Для любой функции конечной полной вариации* $u \in U = \{v : v \in L_p(D), J(v) < \infty\}$ *существует последовательность функций* $u_j \in C^\infty(D)$, *для которой*

$$\lim_{j\to\infty} ||u_j - u||_{L_p} = 0 \quad (p > 1), \qquad \lim_{j\to\infty} J(u_j) = J(u).$$

Доказательство леммы можно получить, например, несколько модифицируя методику, разработанную в [5] (теорема 1.17) для случая $p = 1$.

Для обоснования сходимости субградиентного метода рассмотрим случай гильбертовых пространств, т.е. $p = q = 2$.

Для аппроксимации регуляризованного решения u^α, т.е. решения задачи (2.2) $(p = q = 2)$, рассмотрим один из вариантов субградиентного метода

$$u^{k+1} = u^k - \lambda_k\, \partial\Phi^\alpha(u^k) \,/\, ||\partial\Phi^\alpha(u^k)||, \tag{3.1}$$

где $\partial\Phi^\alpha(u^k)$ — произвольный субградиент целевого функционала в точке u^k.

Теорема 3.1. *Пусть* $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \to 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$, $u^0 \in W_2^1$. *Тогда для итераций* (3.1) *справедливы следующие свойства*:

1) $\lim_{i\to\infty} \Phi^\alpha(u^{k_i}) = \Phi_*^\alpha$, *где* k_i *определяется условием*: $\min_{1\le k\le i} \Phi^\alpha(u^k) = \Phi^\alpha(u^{k_i})$;

2) $\lim_{i\to\infty} ||u^{k_i} - u^\alpha|| = 0$;

3) $\lim_{i\to\infty} J(u^{k_i} - u^0) = \lim_{i\to\infty} \int_D |\nabla(u^{k_i} - u^0)|\, dx = J(u^\alpha - u^0)$.

Доказательство. Так как функционал $\Phi^\alpha(u)$ непрерывен в пространстве W_2^1, то для доказательства того факта, что u^{k_i} — минимизирующая последовательность, можно использовать стандартную технику, развитую для случая пространства $\mathbb{R}^m$ (см., например, [11–13]). А именно, аналогичным образом показывается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется индекс $k^* = k^*(\varepsilon)$ такой, что

$$u^{k^*} \in G_\varepsilon = \{u \in W_2^1 : \ \Phi^\alpha(u) < \Phi_*^\alpha + \varepsilon\}.$$

Тогда $\Phi^\alpha(u^{k_i}) \le \Phi_*^\alpha + \varepsilon$ при $k_i \ge k^*$, поскольку $\Phi^\alpha(u^{k_i+1}) \le \Phi^\alpha(u^{k_i})$. Тем самым установлено, что u^{k_i} — минимизирующая последовательность, т.е. доказано свойство 1).

Из последнего факта следует, что $\{u^{k_i}\}$ ограничена в L_2 и, следовательно, найдется слабо сходящаяся подпоследовательность, которую для простоты будем считать совпадающей со всей последовательностью,

$$u^{k_i} \rightharpoonup \bar{u} \in L_2, \quad i \to \infty.$$

С учетом слабой полунепрерывности снизу норм и функционала полной вариации $J(u)$ получаем

$$\Phi_*^\alpha \leq \Phi^\alpha(\bar{u}) \leq \liminf_{i\to\infty} \Phi(u^{k_i}) = \lim_{i\to\infty} \Phi(u^{k_i}) = \Phi_*^\alpha, \tag{3.2}$$

т.е. $\bar{u}$ совпадает с u^α. Кроме того, имеем

$$||A_h u^{k_i} - f_\delta||^2 \leq \liminf_{i\to\infty} ||A_h u^{k_i} - f_\delta||^2, \qquad ||u^\alpha||^2 \leq \liminf_{i\to\infty} ||u^{k_i}||^2, \qquad J(u^\alpha) \leq \liminf_{i\to\infty} J(u^{k_i}).$$

Объединяя последние соотношения с (3.2) и принимая во внимание, что $\bar{u} = u^\alpha$ — единственная предельная точка последовательности u^{k_i}, получаем свойства 2), 3).

Анализ доказательства теоремы 3.1 показывает, что при обосновании сходимости субградиентного метода для задачи (2.2) рассмотрение случая $p = q = 2$ было обусловлено тем, что такой выбор обеспечивал непрерывность целевого функционала в пространстве $W_2^1(D)$. Это свойство гарантировало субдифференцируемость функционала и существенно использовалось при доказательстве свойства 1). Поэтому, привлекая теоремы вложения $W_2^1(D) \to L_p(D)$ (см. [14]), можно рассмотреть общий (негильбертов) случай в задаче (2.2) и установить сходимость итераций в $L_p(D)$ при некоторых дополнительных условиях на размерность пространства и область D. Для этого достаточно, чтобы соответствующий оператор вложения был непрерывен.

Теорема 3.2. *Пусть область D удовлетворяет условию конуса* ([14], *стр.* 66), *для итерационного процесса* (3.1) *выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда справедливо заключение теоремы* 3.1 *с заменой свойства* 2) *на*

2′) $\lim_{i\to\infty} ||u^{k_i} - u^\alpha||_{L_p} = 0$,

где

a) $1 < q \leq p, \quad 2 \leq p \leq 2m/(m-2)$, *если* $m > 2$;

b) $1 < q \leq p, \quad 2 \leq p < \infty$, *если* $m \leq 2$.

Доказательство следует из теоремы 3.1 и теоремы вложения (см. теорему 5.4 из [14]), согласно которой при принятых соотношениях на параметры p, m оператор вложения $I : W_2^1 \to L_p$ непрерывен.

Замечание 3.1. Вариант субградиентного метода в форме (3.1) был выбран исключительно в качестве иллюстрации предлагаемой методики. При дополнительном условии ограниченности субдифференциала $\partial\Phi^\alpha(x)$ теорема 3.1 сохраняет силу, если вместо процесса (3.1) использовать его различные модификации: релаксационные методы, методы усреднения, ε-субградиентный метод и другие более эффективные схемы (см. [11–13]).

В частности, справедлива

Теорема 3.3. *Пусть субдифференциал $\partial\Phi^\alpha(u)$ в задаче* (2.2) (*при* $p = q = 2$) — *ограниченное отображение в* W_2^1. *Тогда*

а) *если в условиях теоремы* 3.1 *последовательность параметров λ_k удовлетворяет дополнительному соотношению* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$, *то свойства* 1)–3) *имеют место для всей последовательности* u^k;

б) *если Φ_*^α известно и* $\lambda_k = (\Phi^\alpha(u^k) - \Phi_*^\alpha) / ||\nabla\Phi^\alpha(u^k)||$, *то для всей последовательности* u^k *справедливы свойства* 1)–3) *и верна оценка*

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt{k}\,(\Phi^\alpha(u^k) - \Phi_*^\alpha) = 0.$$

Доказательство свойства 1) устанавливается так же, как и в случае $\mathbb{R}^m$ (см. [11,12]), а свойства 2), 3) — аналогично теореме 3.1.

Замечание 3.2. В негильбертовом случае при условиях теоремы 3.2 заключение теоремы 3.3 остается справедливым с заменой свойства 2) на свойство 2').

3.2. Пусть наряду с базовым уравнением (1.1) известна дополнительная информация о нормальном решении в виде системы выпуклых неравенств

$$\hat{u} \in K = \{u \in L_2(D): \ h_i(u) \le 0, \ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Если ввести выпуклый недифференцируемый функционал $h(u) = \max\{h_i(u) : 1 \le i \le m\}$, то априорное множество K можно переписать в эквивалентной форме $K = \{u \in L_2(D) : h(u) \le 0\}$. Если мы хотим учесть в алгоритме априорную информацию о решении, естественно вместо (2.2) рассмотреть задачу на условный экстремум

$$\min\{\Phi^\alpha(u) : \ u \in K\}. \tag{3.3}$$

Предположим, что функционалы $h_i(x)$ полунепрерывны снизу в $L_p(D)$ и непрерывны в $W_2^1(D)$. Кроме того, полагаем, что для системы выпуклых неравенств, определяющей множество K, выполнено условие Слейтера.

Для приближенного решения системы (3.3) можно использовать субградиентный метод (3.1), если предварительно его модифицировать [13], заменив субградиент $\partial\Phi^\alpha(u^k)$ на элемент $g_k \in G(u^k)$, где

$$G(u) = \begin{cases} \partial\Phi^\alpha(u), & \text{если} \quad h(u) < 0; \\ \operatorname{conv}\{\partial\Phi^\alpha(u) \cup \partial h(u)\}, & \text{если} \quad h(u) = 0; \\ \partial h(u), & \text{если} \quad h(u) > 0, \end{cases}$$

где $\operatorname{conv}\{B\}$ — выпуклая оболочка множества B.

Теорема 3.4. *Для модифицированного метода справедливо заключение теорем* 3.1–3.3.

Доказательство в основном повторяет схему рассуждений из теоремы 3.1.

Замечание 3.3. Поскольку оператор $I : W_2^1 \to W_2^\beta$ непрерывен, то для задачи (2.2) со стабилизатором $\Omega(u - u^0) = \|u - u^0\|^2_{W_2^\beta}$ $(p = q = 2)$ справедливы аналоги теорем 3.1–3.4 о сильной сходимости субградиентного метода и его модификаций в пространстве W_2^β.

Теоремы 2.1, 3.1–3.4 позволяют сформировать двухэтапный регуляризующий алгоритм (РА) для задачи (1.1), в котором на первом этапе к уравнению применяется метод Тихонова с негладким (недифференцируемым) стабилизатором $\Omega(u)$, а на втором при подходяще выбранном параметре α применяется итерационный субградиентный метод (3.1) или его модифицированный аналог.

4. Дискретная аппроксимация экстремальной задачи

При численной реализации изложенного выше РА неизбежен также еще один этап — этап конечномерной (дискретной) аппроксимации процесса (3.1) или бесконечномерной задачи (2.2).

Пусть D — m-мерная область прямоугольных очертаний, для определенности, например, единичный куб. Построим равномерную сетку с шагом $h = 1/n$ по каждой переменной, введем сеточный аналог $\mathbb{R}_n^m$ в пространстве $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}_n^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \ x \in (j_1 h, \ldots, j_m h), \ j_1, \ldots, j_m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

и сеточные функции $u_n : \mathbb{R}^m_n \to \mathbb{R}$, здесь $\mathbb{R}^m_n$ — n^m-мерное пространство векторов u_n, индекс n означает, что функция задана на сетке с шагом $h = 1/n$.

Введем семейство связывающих операторов

$$\mathcal{P} = \{p_n : \ (p_n u)(x) = h^{-m} \int\limits_{\omega_n(x)} u(y)\,dy\}, \tag{4.1}$$

где $\omega_n(x)$ — элементарная ячейка объемом h^m с узлом $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, т.е. $\omega_n(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : \ x_j - h < y_j \le x_j\}$.

Определение 4.1 [15]. Последовательность пространств $\{U_n\}$ образует дискретную аппроксимацию пространства U, если существует семейство $\mathcal{P} = \{p_n\}$ связывающих операторов $p_n : \ U \to U_n$, удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $\forall n \quad p_n U = U_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ||p_n u||_{U_n} = ||u||_U$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} ||p_n(au + a'u') - ap_n u - a' p_n u'||_{U_n} = 0 \ \ \forall u,\, u' \in U, \ \ \forall a,\, a' \in \mathbb{R}$.

Как известно [15–17], семейство $\mathcal{P}$, задаваемое формулой (4.1), порождает дискретную аппроксимацию пространства $L_p(D)$ последовательностью пространств $\{l^n_p\}$ с нормой

$$||u_n||_{l^n_p} = \sum_{x \in D_n} h^m |u_n(x)|^p, \quad D_n = D \cap \mathbb{R}^m_n.$$

Аналогичным образом вводится дискретная аппроксимация пространства $L_q(S)$ последовательностью $\{l^n_q\}$ с помощью связывающих операторов $\mathcal{Q} = \{q_n\}$. Дискретная аппроксимация пространств L_p, L_q порождает дискретную и дискретную слабую сходимость элементов (функций) и операторов [15–18]:

$$\begin{aligned}
u_n \overset{\mathcal{P}}{-\!\!\to} u \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||u_n - p_n u|| = 0,\\
u_n \overset{\mathcal{P}}{-\!\!\rightharpoonup} u \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall v_n \overset{\mathcal{P}'}{-\!\!\to} v \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \langle v_n, u_n\rangle = \langle v, u\rangle,\\
A_n \overset{\mathcal{PQ}}{-\!\!\to} A \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall u_n \overset{\mathcal{P}}{-\!\!\to} u \Longrightarrow A_n u_n \overset{\mathcal{Q}}{-\!\!\to} Au,\\
A_n \overset{\mathcal{PQ}}{-\!\!\rightharpoonup} A \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall u_n \overset{\mathcal{P}}{-\!\!\rightharpoonup} u \Longrightarrow A_n u_n \overset{\mathcal{Q}}{-\!\!\rightharpoonup} Au;
\end{aligned}$$

здесь $\langle\, , \rangle$ — соотношение двойственности или скалярное произведение (в гильбертовом случае), $\mathcal{P}'$ — семейство связывающих операторов, которое задает двойственную аппроксимацию $L_{p'}$ $(1/p + 1/p')$, согласованную с аппроксимацией L_p (см. [15–17]), символы "$-\!\!\to$", "$-\!\!\rightharpoonup$" обозначают дискретную и дискретную слабую сходимость, соответственно.

В дальнейшем, как правило, будем опускать буквы $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ над символами дискретной сходимости и знаки при нормах, когда это не вызывает недоразумений.

Лемма 4.1 [16]. *Если пространство U рефлексивно и сепарабельно, то любая ограниченная последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in U_n$ дискретно слабо компактна, т.е. существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ и элемент $u \in U$, для которых выполнено $u_{n_k} -\!\!\rightharpoonup u$.*

Кроме того, для дискретной слабой сходимости справедливы следующие свойства [15–17]:

a) $u_n -\!\!\to u \Longrightarrow u_n -\!\!\rightharpoonup u$;

b) $u_n -\!\!\rightharpoonup u \Longrightarrow ||u|| \le \liminf\limits_{n\to\infty} ||u_n||$;

c) $u_n -\!\!\rightharpoonup u \Longrightarrow ||u_n|| \le C$;

d) $u_n - \rightharpoonup u,\ \ u'_n - \rightharpoonup u',\ \ a_n \to a,\ \ a'_n \to a' \Longrightarrow a_n u_n + a'_n u'_n - \rightharpoonup au + a'u'$.

Определение 4.2 [18]. Пара U, $\{U_n\}$ обладает дискретным свойством Ефимова–Стечкина (Е–С), если пространства U, U_n рефлексивны и

$$u_n - \rightharpoonup u, \quad \lim_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u|| \Longrightarrow u_n - \to u.$$

Функцию, определенную при $0 \le \varepsilon \le 2$ соотношением

$$\delta_U(\varepsilon) = \inf\{1 - ||u+v||/2 : \ ||u|| = ||v|| = 1,\ ||u-v|| \ge \varepsilon\},$$

называют модулем выпуклости (Кларксона) пространства U. Ясно, что U равномерно выпукло тогда и только тогда, когда $\delta_U(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$. Как известно, пространства L_p, W_p^n при $p > 1$ равномерно выпуклы.

Лемма 4.2. *Пусть пространства U_n, образующие дискретную аппроксимацию пространства U, равномерно выпуклы, причем*

$$\inf_n \delta_{U_n}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{4.2}$$

Тогда пара U, $\{U_n\}$ обладает дискретным свойством Е–С.

Доказательство. Пусть $u_n \in U_n$, $u \in U$ и выполнено

$$u_n - \rightharpoonup u, \quad \lim_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u||, \tag{4.3}$$

где $u_n \ne \theta_n$ (θ_n — нулевой элемент пространства U_n). Обозначим $v_n = u_n / ||u_n||$, $v = u / ||u||$. Из свойства d) дискретной слабой сходимости и (4.3) вытекает, что $v_n - \rightharpoonup v$. Покажем, что $v_n - \to v$. Действительно, если предположить противное, то для некоторых $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{v_{n_k}\}$ выполнено $||v_{n_k} - p_{n_k} v|| \ge \varepsilon > 0$. Поскольку $||p_{n_k} v|| \to 1$, то можно считать, что $||v_{n_k} - p_{n_k} v / ||p_{n_k} v|| \,|| \ge \varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной выпуклости U_n и условия (4.2) будем иметь

$$||(v_{n_k} + \frac{p_{n_k} v}{||p_{n_k} v||}) / 2|| \le 1 - \delta_{U_n}(\varepsilon) \le 1 - \delta(\varepsilon).$$

Очевидно, что $(v_{n_k} + \dfrac{p_{n_k} v}{||p_{n_k}||}) / 2 - \rightharpoonup v$, поэтому, согласно свойству б),

$$1 = ||v|| \le \liminf_{k\to\infty} ||(v_{n_k} + p_{n_k} v) / 2|| \le \limsup_{k\to\infty} ||(v_{n_k} + p_{n_k} v) / 2|| \le 1 - \delta(\varepsilon).$$

Полученное противоречие показывает, что $v_{n_k} - \to v$, а следовательно, $u_n - \to u$.

Следствие. *Пара L_p, $\{l_p^n\}$ обладает дискретным свойством Е–С.*

Действительно, если обозначить через $r_n : l_p^n \to L_p$ операторы кусочно-постоянного восполнения, то $||r_n u_n||_{L_p} = ||u_n||_{l_p^n}$ и $r_n l_p^n \subset L_p$. Поэтому

$$\inf_n \delta_{l_p^n}(\varepsilon) \ge \delta_{L_p}(\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Лемма 4.2 была анонсирована (без доказательства) в работе автора [19].

Обратимся теперь к конечномерной аппроксимации задачи минимизации (2.2), поставив ей в соответствие семейство конечномерных экстремальных задач

$$\min\{||A_n u_n - f_n||_{l_q^n}^q + \alpha\,[\,||u_n - u_n^0||_{l_p^n}^p + J_n(u_n - u_n^0)] : \ u_n \in l_p^n\}, \tag{4.4}$$

где

$$J_n(u_n) = \sup\{\sum_{x\in D_n} h^m u_n(x)\sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x):\ v_n \in C_0^1(D_n, \mathbb{R}_n^m),\ |v_n(x)|\le 1\},$$

$$\partial_j u_n(x) = \frac{u_n(x)-u_n(x-he_j)}{h},\quad e_j = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},1,0,\ldots,0),$$

$$v_n(x) = (v_{1n}(x), v_{2n}(x),\ldots,v_{mn}(x)),\quad D_n = D\cap\mathbb{R}_n^m,$$

$A_n:\ l_p^n\to l_q^n$ — линейные ограниченные операторы, $f_n\in l_q^n,\ u_n^0\in l_p^n$.

Для доказательства основной теоремы о сходимости дискретных аппроксимаций нам понадобится одно свойство функционалов $J,\ (J_n)$, которое устанавливается в следующей лемме.

Лемма 4.3. *Пара функционалов* $J,\ (J_n)$ *дискретно слабо полунепрерывна снизу, т.е.*

$$u_n - \rightharpoonup u \implies J(u)\le \liminf_{n\to\infty} J_n(u_n).$$

Доказательство. Сначала убедимся, что

$$\sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x) - \to div\, v(x). \tag{4.5}$$

Определим семейство связывающих операторов $\overline{\mathcal{P}} = \{\bar p_n\},\ \bar p_n:\ L_p\cap C^\infty\to l_p^n$, формулой

$$(p_n u)(x) = u(x),\quad x\in D_n = D\cap\mathbb{R}_n^m. \tag{4.6}$$

Как известно [17], это семейство порождает дискретную сходимость, эквивалентную введенной ранее сходимости с помощью семейства $\mathcal{P}$ из (4.1). Поэтому достаточно доказать, что для $v\in C^\infty$

$$\sum_{x\in D_n} h^m(\sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x) - div\, v(x))\to 0,\quad n\to\infty.$$

Последнее же соотношение следует из очевидной оценки $|\partial_j v_{jn} - \partial v_j(x)/\partial x_j| = O(h)$ для $v_j\in C^\infty$.

Пусть теперь $|v(x)|\le 1,\ v\in C_0^\infty(D,\mathbb{R}^m),\ u_n - \rightharpoonup u$, тогда с учетом (4.5) и определения дискретной слабой сходимости имеем цепочку неравенств

$$\langle u, div\, v\rangle = \int_D u(x)\, div\, v(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{x\in D_n} h^m u_n(x)\sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x)\le$$

$$\le \liminf_{n\to\infty}\sup\left\{\sum_{x\in D_n} h^m u_n(x)\sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}:\ v_n\in C_0^1(D_n,\mathbb{R}_n^m),\ |v_n(x)|\le 1\right\}\le \liminf_{n\to\infty} J_n(u_n).$$

Переходя в левой части к верхней грани по $v(x),\ |v(x)|<1$, получаем нужное свойство.

Примем обозначения $\Phi_n^\alpha(u),\ \hat u_n$ для целевого функционала и решения задачи (4.4). Как и прежде, u^α — решение задачи (2.2), а r_n — операторы кусочно-постоянного восполнения сеточного решения. На основании введенной выше дискретной аппроксимации определены понятия дискретной сходимости элементов и операторов. В следующей теореме формулируются достаточные условия дискретной сходимости конечномерных аппроксимаций, т.е. условия, гарантирующие сходимость (при $n \to \infty$) решений конечномерных экстремальных задач (4.4) к решению регуляризованной бесконечномерной задачи (2.2).

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия аппроксимации:*

$$A_n - \to A, \quad A_n - \rightharpoonup A; \tag{4.7}$$

$$f_n - \to f, \quad u_n^0 - \to u^0.$$

Тогда задача (4.4) *имеет единственное решение* $\hat{u}_n$ *и справедливы следующие свойства сходимости:*

$$\hat{u}_n - \to u^\alpha, \quad \lim_{n\to\infty} ||r_n \hat{u}_n - u^\alpha||_{L_p} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} J_n(\hat{u}_n - u_n^0) = J(u^\alpha - u^0), \quad \lim_{n\to\infty} \Phi_n^\alpha(\hat{u}_n) = \Phi^\alpha(u^\alpha) = \Phi_*^\alpha.$$

Доказательство. Разрешимость. Обозначим через d_n нижнюю грань в задаче (4.4) при фиксированном параметре n. Пусть $\{u_n^k\}$ — минимизирующая последовательность, т.е. $u_n^k \in l_p^n$ и $\Phi_n^\alpha(u_n^k) \to d_n$ при $k \to \infty$. Так как все три слагаемых целевого функционала Φ_n^α положительны, то $\{u_n^k\}$ ограничена в l_p^n. Поэтому найдется подпоследовательность $\{u_n^{k_i}\}$, сходящаяся к некоторому элементу $\hat{u}_n \in l_p^n$:

$$\lim_{i\to\infty} ||u_n^{k_i} - \hat{u}_n||_{l_p^n} = 0.$$

Для любого допустимого вектора $v_n(x) \in C_0^1(D_n, \mathbb{R}_n^m)$ имеем соотношения

$$\sum_{x\in D_n} h^m \hat{u}_n(x) \sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x) = \lim_{i\to\infty} \sum_{x\in D_n} h^m u_n^{k_i}(x) \sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x) \le$$

$$\le \liminf_{i\to\infty} \sup\left\{ \sum_{x\in D_n} h^m u_n^{k_i}(x) \sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x) : \ |v_n(x)| \le 1 \right\} = \liminf_{i\to\infty} J_n(u_n^{k_i}).$$

Переходя в левой части к верхней грани по v_n, получаем

$$J_n(\hat{u}_n) \le \liminf_{i\to\infty} J_n(u_n^{k_i}). \tag{4.8}$$

Теперь, принимая во внимание непрерывность оператора A_n и установленное свойство полунепрерывности снизу функционала J_n (4.8), приходим к цепочке неравенств

$$d_n \le \Phi_n^\alpha(\hat{u}_n) \le \liminf_{i\to\infty} \Phi_n^\alpha(u_n^{k_i}) = d_n,$$

что означает, что $\hat{u}_n$ — решение задачи (4.4). Единственность решения следует из выпуклости первого и третьего слагаемого в $\Phi_n^\alpha(u_n)$ и строгой выпуклости нормы $||u_n||_{l_p^n}^p$.

Сходимость. Согласно лемме 3.1, для любой функции $u \in U = \{v : \ v \in L_p(D), \ J(v) < \infty\}$ существует последовательность $u_j \in C^\infty(D)$, для которой

$$\lim_{i\to\infty} ||u_j(x) - u(x)||_{L_p} = 0, \quad \lim_{j\to\infty} J(u_j) = J(u).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ **найдется** функция $u_\varepsilon \in C^\infty(D)$, удовлетворяющая свойству

$$\Phi_*^\alpha = \Phi^\alpha(u^\alpha) \le \Phi^\alpha(u_\varepsilon) \le \Phi_*^\alpha + \varepsilon. \tag{4.9}$$

Убедимся,что

$$\Phi^\alpha(u_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^\alpha(\bar{p}_n u_\varepsilon), \tag{4.10}$$

где $\{\bar{p}_n\}$ — семейство связывающих операторов (сноса на сетку), заданное формулой (4.6). С учетом условий теоремы и свойств дискретной сходимости для этого достаточно проверить сходимость

$$\lim_{n\to\infty} J_n(\bar{p}_n u_\varepsilon) = J(u_\varepsilon).$$

Действительно, так как $u_\varepsilon \in C^\infty(D)$, $v_n \in C_0^1(D_n, \mathbb{R}_n^m)$, то, привлекая суммирование по частям, получаем

$$|J(u_\varepsilon) - J_n(\bar{p}_n u_\varepsilon)| =$$

$$= \left| \int\limits_D |\nabla u_\varepsilon(x)|\, dx - \sup\left\{ \sum_{x\in D_n} h^m u_n(x) \sum_{j=1}^m \partial_j v_{jn}(x) :\ v_n \in C_0^1(D_n, \mathbb{R}_n^m),\ |v_n(x)| \le 1 \right\} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_D |\nabla u_\varepsilon(x)|\, dx - \sup\left\{ - \sum_{x\in D_n} h^m \sum_{j=1}^m v_{jn}(x) \overline{\partial_j} u_{\varepsilon n}(x) :\ v_n \in C_0^1(D_n, \mathbb{R}_n^m),\ |v_n(x)| \le 1 \right\} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_D |\nabla u_\varepsilon(x)| dx - \sum_{x\in D_n} h^m |\overline{\partial} u_{\varepsilon n}(x)| \right| \le$$

$$\le \sum_{x\in D_n} \int\limits_{\omega_n(x)} |\nabla u_\varepsilon(x) - \overline{\partial} u_{\varepsilon n}(x)| dx = O(h) \to 0, \quad h \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Здесь использовано обозначение

$$\overline{\partial} u_{\varepsilon n}(x) = (\overline{\partial_1} u_{\varepsilon n}(x), \overline{\partial_2} u_{\varepsilon n}(x), \ldots, \overline{\partial_m} u_{\varepsilon n}(x)), \qquad \overline{\partial_j} u_{\varepsilon n}(x) = (u_{\varepsilon n}(x + he_j) - u_{\varepsilon n}(x))/h.$$

Объединяя соотношения (4.9), (4.10), приходим к оценке

$$\limsup_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^\alpha(\hat{u}_n) \le \limsup_{n\to\infty} \Phi_n^\alpha(\bar{p}_n u_\varepsilon) \le \Phi_*^\alpha + \varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon > 0$, что влечет

$$\limsup_{n\to\infty} d_n \le \Phi_*^\alpha.$$

Из установленного факта следует, что последовательность $\{\hat{u}_n\}$ ограничена и, следовательно, согласно лемме 4.1, дискретно слабо компактна, т.е. для некоторой $\{n'\} \subseteq \{n\}$

$$\hat{u}_{n'} \rightharpoonup \tilde{u} \in L_p(D). \tag{4.11}$$

На основании условий теоремы, леммы 4.3 и свойства б) дискретной сходимости приходим к неравенствам

$$\Phi_*^\alpha \le \Phi^\alpha(\tilde{u}) \le \liminf_{n'\to\infty} \Phi_{n'}^\alpha(\hat{u}_{n'}) \le \limsup_{n'\to\infty} \Phi_{n'}^\alpha(\hat{u}_{n'}) \le \limsup_{n'\to\infty} d_{n'} \le \Phi_*^\alpha,$$

откуда вытекает, что $\tilde{u}$ — решение задачи (2.2), т.е. $\tilde{u} = u^\alpha$, кроме того,

$$\lim_{n' \to \infty} ||\hat{u}_{n'}||^p = ||u^\alpha||^p, \tag{4.12}$$

$$\lim_{n' \to \infty} J_{n'}(\hat{u}_{n'} - u^0_{n'}) = J(u^\alpha - u^0), \tag{4.13}$$

$$\lim_{n' \to \infty} ||A_{n'}\hat{u}_{n'} - f_{n'}||^q = ||Au^\alpha - f||^q. \tag{4.14}$$

В силу леммы 4.2 и ее следствия, соотношений (4.11), (4.12), заключаем

$$\hat{u}_{n'} - \to u^\alpha. \tag{4.15}$$

Поскольку u^α — единственная предельная точка, то свойства (4.12)–(4.15) верны для всей последовательности. Как установлено в [20], операторы кусочно-постоянного восполнения в пространстве L_p обладают свойством

$$u_n - \to u \implies \lim_{n \to \infty} ||r_n u_n - u||_{L_p} = 0.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Замечание. В случае гильбертовых пространств и квадратичного стабилизатора условия (4.7), (4.8) являются необходимыми и достаточными условиями сходимости дискретных аппроксимаций в методе регуляризации Тихонова (см. [20]).

Поступила 02.11.2001

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Агеев А.Л.** Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 819–826.

[2] **Леонов А.С.** Функции нескольких переменных с ограниченной вариацией в некорректных задачах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1996. Т. 36, № 9. С. 35–49.

[3] **Леонов А.С.** Об использовании функций нескольких переменных с ограниченной вариацией для кусочно-равномерной регуляризации некорректных задач // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 5. С. 592–595.

[4] **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems. Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.

[5] **Giusti E.** Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhäuser. 1984. 240 p.

[6] **Chavent G., Kunisch K.** Regularization of linear least squares problems by total bounded variation. Control, Optimization and Calculus of Variations. 1997. Vol. 2. P. 359–376.

[7] **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

[8] **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника, 1984. 688 с.

[9] **Андриенко В.А.** Теоремы вложения для функций одного переменного // Итоги науки. Математический анализ. М.: ВИНИТИ. 1971. С. 203–254.

[10] **Иоффе А.Ф., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.

[11] **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.

[12] **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

[13] **Коннов И.В.** Методы недифференцируемой оптимизации. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1993. 99 с.

[14] **Adams R.A.** Sobolev spaces. New-York: Acad. Press. 1975. 268 p.

[15] **Stummel F.** Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. I, II. Math. Ann. 1970. B. 190, № 1. S. 45–92; Math. Z. 1971. B. 120. S. 231–264.

[16] **Stummel F.** Discrete convergence of mappings. In: Top. Numer. Anal. New-York etc. 1973. P. 285–310.

[17] **Вайникко Г.М.** Анализ дискретизационных методов. Тарту: Изд-во Тартус. ун-та, 1976. 161 с.

[18] **Васин В.В.** Общая схема дискретизации регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 2. С. 271-275.

[19] **Васин В.В.** Дискретная аппроксимация бесконечномерных задач математического программирования // В кн.: Методы оптимизации и приложения. Иркутск: Изд-во СЭИ СО АН СССР. 1979. С. 44–48.

[20] **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, the Netherlands: VSP. 1995. 255 p.