где

$$\widetilde{\omega}_i = V_i^* \omega_i = \frac{1}{4\pi} dd^c \log \Sigma \exp(2(z, \lambda)).$$

Основной этап доказательства теоремы – вычисление асимптотики последнего интеграла при $A = B_R$ – здесь не приводится.

Замечание 2. Теорема 2 была ранее получена А.Г. Кушниренко в случае n совпадающих вещественных спектров. При вычислении асимптотики интеграла для $T(\{\Lambda_i\}, B_R)$ используются его результаты.

Благодарю А.Г. Хованского за многочисленные ценные обсуждения.

Московский научно-исследовательский и проектный институт типового и экспериментального проектирования

Поступило 6 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б.Я. Левин,* Распределение корней целых функций, М., "Гостехиздат", 1956. [2] *Д.Н. Бернштейн,* Функц. анализ и его прилож., т. 9, в. 3 (1975). [3] Математическая энциклопедия, т. 1. М., "Советская энциклопедия", 1977, стр. 604. [4] *А.Г. Хованский,* Функц. анализ и его прилож., т. 11, в. 4 (1977). [5] *А.Л. Ронкин,* там же, т. 14, в. 3 (1980). [6] *О.А. Гельфонд,* Корни систем почти периодических полиномов, Препринт ФИАН, № 200, 1978. [7] *B. Shiffman,* In: Value-Distribution Theory, Part A, N.Y., 1974, p. 90.

УДК 519.5

МАТЕМАТИКА

В.Г. КАНОВЕЙ

О НЕСЧЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ МНОЖЕСТВ, ДАВАЕМЫХ ОПЕРАЦИЕЙ РЕШЕТА

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 1 XI 1980)

1. Борелевская и проективная иерархии. Пространство Бэра I состоит из всех функций, определенных на натуральном ряду $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ со значениями в ω ([1]). Борелевская иерархия подмножеств пространств I^m, $m \in \omega$, образована классами Σ^0_α, Π^0_α, Δ^0_α, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, определяемыми индукцией по α:

Σ^0_1 есть совокупность всех открытых множеств;

Π^0_α есть совокупность всех дополнений множеств из Σ^0_α;

Σ^0_α (при $\alpha \geqslant 2$) есть совокупность всех счетных объединений множеств из $\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^0_\beta$;

$\Delta^0_\alpha = \Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha$.

Каждое борелевское $X \subseteq I^m$ принадлежит одному из классов Δ^0_α (и тогда всем Δ^0_β с $\beta > \alpha$). Наименьший из таких ординалов α, что $X \in \Delta^0_\alpha$, назовем рангом X.

Проективная иерархия подмножеств пространств I^m образована классами Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n, $n \in \omega$, определяемыми индукцией по n следующим образом:

$\Sigma^1_0 = \Sigma^0_1$ есть совокупность всех открытых множеств;

Π^1_n есть совокупность всех дополнений множеств из Σ^1_n;

Σ^1_{n+1} есть совокупность всех проекций на данное пространство I^m множеств $P \subseteq I^{m+1} = I^m \times I$ класса Π^1_n;

$\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$.

Класс всех борелевских множеств совпадает с классом Δ^1_1 по теореме Суслина. Классы Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n имели обозначения A_n, CA_n, B_n в классической системе обозначений ([2], [3]).

2. Внешние конституанты. Пусть Q – совокупность всех рациональных точек действительной прямой. Решетом называется всякое семейство $R = \langle R_q\colon\ q \in Q\rangle$ множеств $R_q \subseteq I$, называемых элементами решета R. Если все R_q принадлежат проективному или борелевскому классу K, то R условимся называть K-решетом. Всякое решето R определяет множество

$$[R] = \{x \in I\colon \text{ совокупность } R''x = \{q\colon\ x \in R_q\} \text{ вполне упорядочена в смысле естественного порядка } Q\},$$

а также определяет разбиение этого множества на внешние конституанты $[R]_\nu$, определяемые для каждого $\nu < \omega_1$ равенством

$$[R]_\nu = \{x \in [R]\colon\ R''x \text{ имеет порядковый тип } \nu\}.$$

Если решето R борелевское (т.е. Δ^1_1-), то все $[R]_\nu$ – борелевские множества, а $[R]$ принадлежит классу Π^1_1. Более подробно о решетах и конституантах см ([2], [3], [8], [10]).

Исследование положения конституант открытых (т.е. Σ^0_1-) решет в борелевской иерархии составляет содержание ряда работ Н.Н. Лузина 30-х годов (см. ([2]), стр. 552–682; ([3])). В этих работах поставлены проблемы, направленные на построение открытых неограниченных (т.е. с несчетным числом непустых $[R]_\nu$) решет R с "небольшими" или "не очень сложными" конституантами. Эти проблемы (их точную формулировку см. ниже) можно рассматривать как уточнения общей проблемы "эффективного" представления кардинала ω_1 в континууме. Такое представление можно искать в виде "эффективной" совокупности ω_1 точек (такая постановка восходит к Лебегу ([2]), стр. 173), или, что эквивалентно, одноточечных множеств. Среди методов классической дескриптивной теории множеств был лишь один метод, позволяющий строить "эффективные" последовательности из ω_1 точечных множеств – метод, связанный с операцией решета. Конкретизируя постановку Лебега, Лузин ставит такую проблему:

Проблема 1 (([2]), стр. 553, 672). Существует ли открытое неограниченное решето R такое, что каждая конституанта $[R]_\nu$ содержит не более одной точки?

Указывая на непреодолимые трудности, возникающие при попытке решить эту проблему, Лузин (([2]), стр. 554, 560) предсказал ее неразрешимость. Это предположение подтвердилось: в работах П.С. Новикова ([5], [6]) установлено, что положительное решение проблемы 1 ("такое решето существует") не противоречит теории ZFC (= ZF + аксиома выбора ([8–10])), а непротиворечивость отрицательного ее решения доказана Леви в работе ([12]), где построена модель ZF, в которой континуум не содержит подмножеств мощности ω_1, а также модель ZFC, в которой континуум не содержит проективных подмножеств мощности ω_1.

Далее Лузин поставил ряд проблем, являющихся последовательными ослаблениями проблемы 1.

Проблема 2 (([2]), стр. 554, 629, 672). Существует ли открытое неограниченное решето R с не более чем счетными $[R]_\nu$?

Проблема 3 (([2]), стр. 173, 555, 624, 672). Существует ли открытое неограниченное решето R такое, что конституанты $[R]_\nu$ образуют ограниченную по рангу совокупность (т.е. все $[R]_\nu$ имеют ранг меньше некоторого одного ординала $\alpha < \omega_1$)?

Требование ограниченности по рангу существенно: Лузин ([2], стр. 624–626) указал открытое решето R такое, что ранги конституант $[R]_\nu$ монотонно стремятся к ω_1.

Проблема 4 ([2], стр. 556, 673). Существует ли неограниченное открытое решето R, конституанты $[R]_\nu$ которого можно вложить в попарно не пересекающиеся борелевские множества, образующие ограниченную по рангу совокупность?

Проблемы 3 и 4 фигурируют в качестве нерешенных проблем в обзорах 50-х годов по дескриптивной теории, см., например, [4].

Проблема 5 ([2], стр. 675). Существует ли открытое неограниченное решето R такое, что для каждого ординала ν, начиная с некоторого $\nu_0 < \omega_1$, найдется множество $\subseteq I$ ранга $< \nu$, включающее $[R]_\nu$ и не пересекающееся с $\bigcup\limits_{\mu \neq \nu} [R]_\mu$?

Теорема 1. *Следующие предложения попарно эквивалентны в* ZFC *и неразрешимы средствами* ZFC:

(а) *положительное решение проблемы* 1;

(б) *положительное решение проблемы* 2;

(в) *положительное решение проблемы* 3;

(г) *положительное решение проблемы* 4;

(д) *найдутся борелевское решето R, ординал $\alpha < \omega_1$ и несчетное множество $u \subseteq \omega_1$ такие, что при любом $\nu \in u$ конституанта $[R]_\nu$ непуста и Δ^0_α-отделима или от $\bigcup\limits_{\mu < \nu,\, \mu \in u} [R]_\mu$ (т.е. найдется Δ^0_α-множество, включающее $[R]_\nu$ и не пересекающееся с $\bigcup\limits_{\mu < \nu,\, \mu \in u} [R]_\mu$), или от $[R]_* = I - [R]$*;

(е) *существует несчетное Π^1_1-множество $\subseteq I$, не имеющее совершенного подмножества*;

(ж) *найдется $z \in I$ такое, что $\omega_1^{L[z]} = \omega_1$.*

Через $\omega_\gamma^{L[z]}$ обозначается γ-й несчетный кардинал в классе $L[z]$ всех множеств, конструктивных относительно z [9,10]. Эквивалентность (а) $\leftrightarrow$ (б) доказана П.С. Новиковым [5]; эквивалентность (б) $\leftrightarrow$ (е) составляет классический результат Лузина, см. [2,3]; эквивалентность (е) $\leftrightarrow$ (ж) установлена в [7,11]; неразрешимость средствами ZFC предложения (ж) доказана в [12]. Предложение (д), очевидно, слабее каждого из (а)–(г). Поэтому существенным моментом теоремы 1 является импликация (д) $\to$ (ж), наше доказательство которой использует идею заметки [13].

Эквивалентность (д) $\leftrightarrow$ (е) приводит к решению проблемы существования AF_{II}-множества $\subseteq I$, не принадлежащего классу G_δ: как показано в [14], предложение о существовании такого множества вытекает из (е) и влечет (д), и поэтому указанная проблема также неразрешима средствами ZFC.

Таким образом, проблемы 1–4 попарно эквивалентны и неразрешимы средствами теории ZFC. В отличие от них проблема 5 разрешима:

Теорема 2. *Существует неограниченное открытое решето R такое, что каждая конституанта $[R]_\nu$ с $\nu \geqslant 2$ имеет ранг $< \nu$, и, следовательно, является Δ^0_α-отделимой от $\bigcup\limits_{\mu \neq \nu} [R]_\mu$ для некоторого ординала $\alpha < \nu$.*

Следующая теорема (из которой следует импликации (д) $\to$ (ж) теоремы 1) дает верхнюю границу "простых" конституант. Перед ее формулировкой $\Delta^1_1(L[z])$-решетом назовем всякое решето R такое, что множество $\{\langle k, x \rangle\colon\ x \in R_{f(k)}\}$ (где f: ω на Q – каноническая биекция) является множеством рода Δ^1_1 в $L[z]$ в смысле [9], стр. 261.

Теорема 3. *Пусть* $z \in I$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, $\omega_\alpha^{L[z]} \leqslant \nu < \omega_1$, *и* $\Delta_1^1(L[z])$*-решето* R *таково, что* $[R]_\nu \neq \phi$.

Тогда конституанта $[R]_\nu$ *не является* $\Sigma^0_{1+\alpha}$*-отделимой от* $\bigcup\limits_{\mu<\nu} [R]_\mu$, *и, следовательно,* $[R]_\nu \notin \Sigma^0_{1+\alpha}$.

Проблемы 1–4 становятся разрешимыми (отрицательно), если мы введем дополнительное требование, обеспечивающее достаточную частоту непустых конституант:

Теорема 4. *Пусть* $\alpha < \omega_1$ *и борелевское решето* R *таково, что для всякого* $\nu < \omega_1$ *найдется ординал* $\mu \geqslant \nu$, *получаемый из ординалов* $\leqslant \nu$ *с помощью действий ординальной арифметики* ([8]), *и такой, что* $[R]_\mu \neq \phi$.

Тогда найдется ординал $\nu < \omega_1$ *такой, что множество* $[R]_\nu$ *не является* Δ^0_α*-отделимым от* $\bigcup\limits_{\mu<\nu} [R]_\mu$, *и тем самым имеет ранг больше* α.

3. Внутренние конституанты и производные решета. Множество $I - [R]$, подобно множеству $[R]$, может быть разбито на конституанты $[R]_{*\nu}$, называемые внутренними:

$[R]_{*\nu} = \{x \in I - [R]:$ наибольший вполне упорядоченный начальный сегмент множества $R''x$ имеет порядковый тип $\nu\}$.

Производное решето R' определяется соотношениями $R'_q = R_q \cap \left(\bigcup\limits_{r<q} R_r\right)$, $\forall q \in Q$. Последовательность производных решет R^ν определяется индукцией по $\nu < \omega_1$ следующим образом:

$$R^0 = R, \qquad R^{\nu+1} = (R^\nu)',$$

и $R^\nu_q = \bigcap\limits_{\mu<\nu} R^\mu_q$ для всех предельных $\nu < \omega_1$ и всех $q \in Q$. Если решето R борелевское, то все $[R]_{*\nu}$ –борелевские множества, а все R^ν – борелевские решета. Следующие две проблемы названы Лузиным (([2]), стр. 658, 661) "основной проблемой теории аналитических совокупностей" и "основной проблемой теории решет".

Проблема 6. Существует ли открытое решето R такое, что совокупность всех множеств $[R]_\nu$ и $[R]_{*\nu}$ ограничена по рангу, и среди этих множеств несчетное число непустых?

Проблема 7. Существует ли открытое решето R такое, что совокупность всех множеств R^ν_q ($\nu < \omega_1$ и $q \in Q$) ограничена по рангу, и $R^{\nu+1} \neq R^\nu$ для каждого $\nu < \omega_1$?

Теорема 5. *Проблемы 6 и 7 решаются отрицательно: открытых (и даже борелевских) решет указанных видов не существует.*

Фактически теорема 5 является следствием такой теоремы:

Теорема 6. *Если* $\alpha < \omega_1$ *и борелевское решето* R *имеет несчетное число непустых конституант* $[R]_{*\nu}$, *то найдется конституанта* $[R]_{*\nu}$, *не являющаяся* Δ^0_α*-отделимой от* $\bigcup\limits_{\mu<\nu} [R]_\mu$ *и тем самым не принадлежащая классу* Δ^0_α.

Несколько ослабив требования проблемы 6, мы получаем уже неразрешимую проблему:

Теорема 7. *Следующие предложения эквивалентны предложениям* (а) – (ж) *и неразрешимы средствами* ZFC:

(з) *существует открытое решето* R *такое, что все* $[R]_\nu$ *пусты, а среди конституант* $[R]_{*\nu}$ *несчетное число одноточечных множеств*;

(и) *существуют борелевское решето* R, *ординал* $\alpha < \omega_1$ *и несчетное множество* $u \subseteq \omega_1$ *такие, что при любом* $\nu \in u$ *конституанта* $[R]_{*\nu}$ *непуста и* Δ^0_α*-отделима от* $\bigcup\limits_{\mu<\nu} [R]_{*\mu}$.

Предложения, "лежащие между" (з) и (и) (как, например, предложение о существовании ординала $\alpha < \omega_1$ и борелевского решета R с несчетным числом непустых конституант $[R]_{*\nu}$ ранга не более α) также, очевидно, будут эквивалентны предложениям (а)–(и) и неразрешимы.

4. Разбиение пространства I с помощью проективных решет. Через C_n обозначим предложение: найдется Δ^1_n-решето R такое, что множества $[R]_\nu$ и $[R]_{*\nu}$ образуют ограниченную по рангу совокупность, содержащую несчетное число непустых множеств. Предложения C_n можно рассматривать как уточнения поставленной Лузиным (([2]), стр. 172) "узкой проблемы континуума", состоящей в "эффективном" разбиении континуума на несчетное число непустых борелевских множеств, образующих ограниченную по рангу совокупность.

Теорема 8. *Предложение* C_1 *ложно в* ZF. *Предложение* C_2 *эквивалентно в* ZF *предложениям* (а)–(и) *и неразрешимо средствами* ZFC. *Если* $n \geqslant 3$, *то предложение* C_n *неразрешимо средствами даже теории* ZFC + $\neg$ (ж).

Автор глубоко признателен проф. В.А. Успенскому за помощь и ценные замечания.

Московский институт инженеров железнодорожников транспорта

Поступило
28 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *П.С. Александров,* Введение в теорию множеств и общую топологию, М., "Наука", 1977. [2] *Н.Н. Лузин,* Собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1958. [3] *Н.Н. Лузин,* Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., ГИТТЛ, 1953. [4] *П.С. Новиков, Л.В. Келдыш,* УМН, т. 8, № 2, 93 (1953). [5] *П.С. Новиков,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 1, № 2, 231 (1937). [6] *П.С. Новиков,* Тр. МИАН, т. 38, 279 (1951). [7] *В.А. Любецкий,* ДАН, т. 182, № 4 (1980). [8] *К. Куратовский, А. Мостовский,* Теория множеств, М., "Мир", 1970. [9] *Дж. Шенфилд,* Математическая логика, М., "Наука", 1975. [10] Handbook of Math.Logic, Amsterdam, North Holland, 1977. [11] *R.M. Solovay,* On the Cardinality of Σ^1_2 Sets of Reals, Found. of Math., Berlin, 1969, p. 58. [12] *A. Levy,* Math. Logic and Found. of Set Theory, Amsterdam, North Holland, 1970, p. 129. [13] *J. Stern,* C.R., v. 288, Ser. A, 527 (1979). [14] *А.В. Островский,* ДАН, т. 227, № 6, 1297 (1976).

УДК 517.977.8 + 519.837.4 МАТЕМАТИКА

А.Н. КРАСОВСКИЙ

О ФОРМАЛИЗАЦИИ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

(Представлено академиком А.Ю. Ишлинским 18 XI 1980)

В работе рассматривается формализация дифференциальной игры, которая охватывает в одной схеме формализацию дифференциальной игры в рамках обобщенных дифференциальных уравнений в контингенциях, в квазистратегиях, т.е. в форме отклика в текущий момент t одного из игроков на историю действий его противника вплоть до этого момента t, в форме предельного перехода от многошаговых конструкций. При этом допустимые направления для движений в каждой позиции определяются из некоторых неравенств, которые заменяют в этой формализации соотношения динамического программирования. Данная формализация