Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. Cotsiolis, A. P. Oskolkov, On the limit behaviour and the attractor for the equations of motion of Oldroyd fluids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1986, Volume 152, 67–71

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
March 27, 2025, 20:11:24

А.А.Котсиолис, А.П.Осколков

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ И АТТРАКТОРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОЛДРОЙТА

I. О.А.Ладыженская предложила в [I] брать в качестве основного объекта изучения теории турбулентности для эволюционных систем с диссипацией, и в том числе для систем, описывающих течения вязких несжимаемых жидкостей, аттрактор системы $\mathfrak{M} = \bigcap_{t\geq 0} V_t(H_0)$, где V_t – эволюционный оператор задачи, H_0 – фазовое пространство. В [I] она подробно изучила свойства $\mathfrak{M}$ для двумерной системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\nu\Delta v+\operatorname{grad}p=f(x),\quad \operatorname{div}v=0,\ x\in\Omega\in E^2,\ v\big|_{\partial\Omega}=0,\ t\geq 0, \tag{I}$$

в частности, доказала компактность $\mathfrak{M}$, изучила свойства динамической системы, порожденной задачей (I), и доказала "конечномерность динамики V_t" задачи (I) на $\mathfrak{M}$. В [2] на основе установленных в [I] свойств эволюционного оператора V_t задачи (I) О.А.Ладыженская доказала конечность хаусдорфовой размерности аттрактора $\mathfrak{M}$.

О.А.Ладыженская указала в [2], что доказанные в [I], [2] для задачи (I) результаты справедливы и для многих других задач диссипативного типа, к числу которых относятся определенные классы абстрактных нелинейных параболических уравнений, например, предложенные О.А.Ладыженской модификации трехмерных уравнений Навье-Стокса [3], [4]. В настоящей заметке указывается еще один пример такого уравнения, которое порождается двумерной начально-краевой задачей для уравнения движения жидкостей Олдройта.

2. Жидкостью Олдройта называется линейная вязкоупругая жидкость, определяющее уравнение которой имеет вид [5]:

$$\sigma+\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial t}=2\nu\mathfrak{D}+2\varkappa\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t},\qquad \lambda,\nu,\varkappa>0,\qquad \nu-\varkappa\lambda^{-1}>0. \tag{2}$$

А.П.Осколков показал [6], что движение жидкости Олдройта может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu\Delta v-\Delta u+\operatorname{grad}p=f,\ v=\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\lambda^{-1}u,\ \operatorname{div}v=0, \tag{3}$$
$$\mu=\varkappa\lambda^{-1},\qquad \alpha=\lambda(\nu-\varkappa\lambda^{-1})^{-1}.$$

Систему (3) будем решать в ограниченной области $\Omega\in E^2$ при $f\equiv f(x)$ и начально-краевых условиях

$$v\big|_{t=0}=v_0(x),\quad u\big|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega;\quad v\big|_{\partial Q_T}=u\big|_{\partial Q_T}=0\,. \tag{4}$$

Обозначим через P ортопроектор из $L_2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ и положим $P\Delta\equiv\tilde\Delta$, $P(v_k v_{x_k})\equiv A(v)$, $\vec\varphi=\{v,u\}$, $\vec F=\{f,0\}$,

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-\mu\tilde\Delta+A & -\tilde\Delta\\ -\alpha^{-1} & \lambda^{-1}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда система (3) запишется в виде операторного уравнения

$$\frac{\partial\vec\varphi}{\partial t}+\Lambda\vec\varphi=\vec F(x), \tag{6}$$

которое решается в $Q_\infty=\Omega\times(0,\infty)$ при начально-краевых условиях

$$\vec\varphi\big|_{t=0}=\{v_0(x),0\}\ ,\quad \vec\varphi\big|_{\partial Q_\infty}=0\,. \tag{7}$$

Положим $E_0(\Omega)=\overset{\circ}{J}(\Omega)\times H(\Omega)$, $\|\vec\varphi\|^2_{E_0}=\left[\|v\|^2_{2,\Omega}+\alpha\|u_x\|^2_{2,\Omega}\right]$. Из энергетического равенства

$$\frac12\frac{d}{dt}\|\vec\varphi\|^2_{E_0}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\alpha\lambda^{-1}\|u_x\|^2_{2,\Omega}=(f,v)_{2,\Omega},\quad t\geqslant 0 \tag{8}$$

для любого решения задачи (6), (7) следует оценка (ср. [2]):

$$\|\vec\varphi\|_{E_0}\leqslant R_0=(\mu\lambda_1)^{-1}\|f\|_{2,\Omega}\ , \tag{9}$$

где λ_1 – первое собственное число спектральной задачи

$$-\Delta\psi+\nabla q=\lambda\psi,\quad \operatorname{div}\psi=0,\ x\in\Omega;\quad \psi\big|_{\partial\Omega}=0\,. \tag{10}$$

3. Возьмем в качестве фазового пространства задачи (6), (7) пространство $E_0(\Omega)$. На нем, как показал А.П.Осколков [6], определена полугруппа ограниченных непрерывных операторов V_t, $t\geqslant 0$, однозначно определяющих слабое решение (решение в смысле Э.Хопфа [4]) $\vec\varphi(\cdot,t)\equiv\vec\varphi(t)$ задачи (6), (7) по его значению при $t=0$: $\vec\varphi(t)\equiv V_t(\vec\varphi(0))$. Аттрактором задачи (6), (7) называется множество $\mathfrak{M}=\bigcap_{t\geqslant 0}V_t(K_{R_0})$, где $K_{R_0}=\{\vec\varphi:\ \vec\varphi\in E_0(\Omega),\ \|\vec\varphi\|_{E_0}\leqslant R_0\}$. В [6] – [8] доказано, что $\mathfrak{M}$ является компактом в $E_0(\Omega)$, лежащим в K_{R_0}, и что нормы его элементов $\vec\psi(\cdot)=\{w(\cdot),s(\cdot)\}$ в пространствах $E_\ell(\Omega)\equiv(W_2^\ell(\Omega)\cap H(\Omega))\times(W_2^{\ell+1}(\Omega)\cap H(\Omega))$, $\ell\geqslant 1$, равномерно ограни-

чены числами C_ℓ, если только $f(x)\in W_2^{\ell-1}(\Omega)\cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$, а $\partial\Omega\in C^{\ell+1}$. В 8 доказано, далее, что на множестве $\mathfrak{M}$ полугруппа $V_t, t\geq 0$, продолжается до группы $V_t, -\infty<t<\infty$, ограниченных непрерывных операторов (эта группа $V_t, -\infty<t<\infty$, в совокупности с $\mathfrak{M}$ и есть динамическая система, порождаемая задачей (6), (7)), и что множество $\mathfrak{M}$ состоит из тех и только тех элементов ψ из $K_{R_0}\in E_0(\Omega)$, для которых задача (6), (7) имеет решение $\vec{\varphi}(t)$ при $\forall t\in(-\infty,\infty)$, равное $\vec{\psi}$ при $t=0$.

Пусть $\mathcal{E}^n$ – n-мерное подпространство пространства $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, натянутое на первые n собственных функций спектральной задачи (10), P_n – ортопроектор из $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ на $\mathcal{E}^n$, $Q_n=I\ominus P_n$. Пусть, далее $\vec{\Phi}(t)=\vec{\varphi}(t)-\vec{\tilde{\varphi}}(t)\equiv\{w,\tilde{w}\}$ – разность двух произвольных решений $\vec{\varphi}\equiv\{v,u\}$ и $\vec{\tilde{\varphi}}\equiv\{\tilde{v},\tilde{u}\}$ задачи (6), (7) из $\mathfrak{M}, -\infty<t<\infty$, $\vec{\Phi}''(t)=\vec{\varphi}''(t)-\vec{\tilde{\varphi}}''(t)\equiv\{w'',\hat{w}''\}\equiv\{Q_n w, Q_n\hat{w}\}$. Для $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\varphi}''(t)$ справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (1.7) и (1.8) из [2]:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\Phi}\|^2_{E_0}+\mu\|w_x\|^2_{2,\Omega}+\alpha\lambda^{-1}\|\hat{w}_x\|^2_{2,\Omega}=\int_\Omega w_k\tilde{v}\,w_{x_k}dx, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\varphi}''\|^2_{E_0}+\mu\|w''_x\|^2_{2,\Omega}+\alpha\lambda^{-1}\|\hat{w}''_x\|^2_{2,\Omega}=-\int_\Omega(\tilde{v}_k w+w_k v)\,w''_{x_k}dx. \tag{12}$$

Повторяя почти дословно рассуждения, с помощью которых О.А. Ладыженская доказывает в [1], [2] "конечномерность динамики V_t на $\mathfrak{M}$" и конечность хаусдорфовой размерности $\mathfrak{M}$ для задачи (1), мы доказываем с помощью соотношений (11), (12) и ограниченности аттрактора $\mathfrak{M}$ в пространствах $E_\ell(\Omega), \ell\geq 1$ следующие результаты для задачи (6), (7).

ТЕОРЕМА 1. Если для двух решений $\vec{\varphi}(t)\equiv\{v,u\}$ и $\vec{\tilde{\varphi}}(t)\equiv\{\tilde{v},\tilde{u}\}$ из $\mathfrak{M}$ задачи (6), (7) при достаточно большом $n\equiv n(\mu,\Omega,\tilde{v})$ (см. [1], § 3) $P_n v(t)=P_n\tilde{v}(t)$ и $P_n u(t)=P_n\tilde{u}(t), -\infty<t<\infty$, то $\vec{\varphi}(t)\equiv\vec{\tilde{\varphi}}(t)$, $-\infty<t<\infty$.

Эта теорема доказывает "конечномерность динамики V_t задачи (6), (7) на $\mathfrak{M}$".

ТЕОРЕМА 2. Для $\forall\vec{\psi}, \vec{\tilde{\psi}}\in\mathfrak{M}$ и $\forall t\in(-\infty,\infty)$ справедливы неравенства:

$$\|V_t(\vec{\psi})-V_t(\vec{\tilde{\psi}})\|_{E_0}\leq\ell\|\vec{\psi}-\vec{\tilde{\psi}}\|_{E_0},\quad \ell\equiv\ell(\mu,t), \tag{13}$$

$$\|Q_nV_t(\vec{\psi})-Q_nV_t(\vec{\tilde{\psi}})\|_{E_0}\leq\delta\|\vec{\psi}-\vec{\tilde{\psi}}\|_{E_0},\ 0<\delta\equiv\delta(\mu,n,t)<1,\ n\equiv n(\mu,\Omega,t)>>1, \tag{14}$$

из которых следует конечность хаусдорфовой размерности d аттрактора $\mathfrak{M}$ и оценка ([2], теорема 1.1): $d\leq n\ln\left(\frac{2\gamma^2\ell^2}{1-\delta^2}\right)\ln^{-1}\left(\frac{2}{1+\delta^2}\right)$.

Отметим, что при доказательстве теорем I и 2 и особенно при построении в [8] динамической системы $(\mathfrak{M}; V_t, -\infty < t < \infty)$ формулировка начально-краевой задачи (3), (4) в операторной форме (6), (7) оказывается очень удобной.

Авторы выражают благодарность О.А.Ладыженской за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6. Зап. научн.семин.ЛОМИ, 1972, т.27, с.91-114.
2. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1982, т.115, с.137-155.
3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О предельных режимах для модифицированных уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 11. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.84, с.131-146.
4. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязких несжимаемых жидкостей, 2-ое изд. М., 1970.
5. О л д р о й т Дж.Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. - В сб.: Реология, теория и приложения. М., 1962, с.262-310.
6. О с к о л к о в А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореферат докт.дисс., Л., 1983, 32 с.
7. К о т с и о л и с А.А., О с к о л к о в А.П. О разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнений движения жидкостей Олдройта на $(0,\infty)$ и поведении ее решений при $t \to +\infty$. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 6. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1986, т.150, с.112-117.
8. К о т с и о л и с А.А., О с к о л к о в А.П. О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VIII. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1986, т.155, с.119-125.

Cotsiolis A.A., Oskolkov A.P. On the limit behaviour and the attractor for the equations of motion of Oldroyd fluids.

The attractor $\mathfrak{M}$ for the two-dimensional initial-value problem for the equations of motion of Oldroyd fluids is constructed. It is proved that the Hausdorf dimension of $\mathfrak{M}$ is finite, and the corresponding dynamical problem on $\mathfrak{M}$ is finite dimensional.