Андрей В. Чернов, О разрешимости игры преследования с нелинейной динамикой в гильбертовом пространстве, *МТИП*, 2024, том 16, выпуск 1, 92–125

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.16, в.1, с. 92–125

УДК 517.957+517.978.2+517.988.6
ББК 22.18

О РАЗРЕШИМОСТИ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Андрей В. Чернов
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
e-mail: chavnn@mail.ru

Рассматривается дифференциальная игра преследования в гильбертовом пространстве. Динамика игры описывается двумя полулинейными эволюционными уравнениями с необязательно ограниченным оператором в гильбертовом пространстве, управляемыми каждое своим игроком. Управления входят линейно в правые части уравнений и подчиняются условиям ограниченности по норме заданными константами. Устанавливаются достаточные условия разрешимости поставленной задачи преследования, как в линейном, так и в нелинейном случае. При этом используются теорема Минти-Браудера, а также цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примеров сведения к абстрактному операторному уравнению рассматриваются система уравнений Осколкова и полулинейное волновое уравнение.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве, необязательно ограниченный оператор, условия

разрешимости игры преследования.

Поступила в редакцию: 09.11.23 *После доработки*: 19.01.24 *Принята к публикации*: 01.03.24

1. Введение

Рассматривается дифференциальная игра в гильбертовом пространстве, которую можно трактовать как задачу преследования или как задачу об успокоении возмущения. Динамика игры описывается двумя полулинейными эволюционными уравнениями с необязательно ограниченным оператором в гильбертовом пространстве, управляемыми каждое своим игроком. Управления входят линейно в правые части уравнений и подчиняются условиям ограниченности по норме заданными константами. Целью первого игрока является обнуление расстояния между состояниями управляемых систем («поимка второго игрока»); цель второго игрока противоположна. Устанавливаются достаточные условия разрешимости поставленной задачи преследования, как в линейном, так и в нелинейном случае. При этом используются теорема Минти-Браудера, а также цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примеров сведения к абстрактному операторному уравнению рассматриваются система уравнений Осколкова и полулинейное волновое уравнение. Отметим, что ранее достаточные условия разрешимости задачи преследования в дифференциальных играх, связанных с распределенными управляемыми системами, устанавливались, главным образом, для случая линейных уравнений, см., например, [9,2,3,10,17]. Поэтому исследование нелинейного случая представляется достаточно актуальным.

2. Предварительные построения и соглашения

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[.,.]_X$, $G : X \to X$ — инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \in [0;T]$, с областью определения $D(G) \subset X$, $z \in Z = L_2\big(0,T;X\big)$, $x_0 \in X$. Следуя [1, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X):

$$x'(t) = Gx(t) + z(t), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0. \tag{2.1}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1 ([1, теорема 4.8.3]). *Для любых $z \in Z$, $x_0 \in X$ существует единственная функция $x : [0;T] \to X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ функция $\big[x(t), y\big]_X$ абсолютно непрерывна на $[0;T]$,*

$$\frac{d}{dt}\big[x(t), y\big]_X = \big[x(t), G^* y\big]_X + \big[z(t), y\big]_X \quad \text{п.в.}\, t \in [0;T],$$

$$\lim_{t\to 0}\big[x(t), y\big]_X = [x_0, y] \quad \forall\, y \in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула:

$$x(t) = S(t)x_0 + \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0;T]. \tag{2.2}$$

Лемма 2.2 ([1, следствие 4.8.1]). *Для любых $z \in Z$, $x_0 \in X$ существует единственная слабо непрерывная функция $x : [0;T] \to X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ имеем:*

$$\big[x(t), y\big]_X = [x_0, y]_X + \int\limits_0^t \big[x(s), G^* y\big]_X\,ds + \int\limits_0^t \big[z(s), y\big]_X\,ds,$$

и более того, эта функция представляется формулой (2.2).

Напомним, см., например, [12, глава III, § 1, п.3.2, с.72], [11, с.96], что функция $x : [0;T] \to X$ (для вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y \in X^*$ функция $y\big[x(t)\big]$ непрерывна на $[0;T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x : [0;T] \to X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$. Для дальнейшего важно, что норма $\big\|x(t)\big\|_X$ всякой функции $x \in \mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$ ограничена на $[0;T]$. С другой стороны, см., например, [4, глава IV, теорема 1.9, с.154], всякая функция $x \in \mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$ интегрируема по Бохнеру, следовательно, измерима по Бохнеру. Стало быть, $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big) \subset L_\infty\big(0,T;X\big)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой в множестве $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$ утверждается в леммах 2.1, 2.2, будем называть *слабым решением* задачи (2.1).

Далее будем предполагать, что оператор G при некотором $T_0 > 0$ удовлетворяет следующему условию.

$\mathbf{G}_1$) Полугруппа $S(.)$ равномерно ограничена на промежутке $[0;T_0)$, то есть $\|S(t)\| \le M$ для всех $t \in [0;T_0)$.

Замечание 2.1. Для любой сильно непрерывной полугруппы $S(t)$ существуют константы $\omega \ge 0$, $R \ge 1$ такие, что выполняется условие на порядок роста: $\|S(t)\| \le Re^{\omega t}$ $\forall\, t \ge 0$, см. [18, § 1.2, theorem 2.2]. Поэтому условие $\mathbf{G}_1$) заведомо выполнено на любом конечном промежутке $[0;T_0]$ с константой $M = M(T_0) = Re^{\omega T_0}$.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2.3. *Пусть выполнено предположение* $\mathbf{G}_1$), $T \in (0;T_0)$,

$$A[z](t) = \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0;T],$$

— слабое решение задачи (2.1) *при* $x_0 = 0$, $z \in Z$. *Тогда для п.в.* $t \in [0;T]$ *справедлива оценка*

$$\big\|A[z](t)\big\|_X \le M \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds. \tag{2.3}$$

Будем считать выполненным также следующее предположение.

$\mathbf{G}_2$) Существует число $a > 0$ такое, что

$$\big\|S^*(t)\xi\big\|_X \ge a\,\|\xi\|_X \quad \text{для п.в.}\, t \in (0;T_0), \quad \forall\, \xi \in X.$$

3. Конкретизация предположений $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$)

Рассмотрим следующие два случая.

I. Линейный оператор G ограничен. В этом случае порождаемая оператором G полугруппа определяется однозначно и является равномерно непрерывной [18, §1.1, theorems 1.2, 1.3]. Последнее означает выполнение следующих трех условий, [18, definition 1.1].

I.a) $S(0) = I$.

I.b) $S(t+s) = S(t)S(s)$ для всех $t, s \ge 0$ (*полугрупповое свойство*).

I.c) $\lim\limits_{t\to+0}\big\|S(t)-I\big\|=0.$

Отсюда вытекает [18, (1.4)], что:

$$\lim_{s\to t}\big\|S(s)-S(t)\big\|=0.$$

В частности, отсюда следует, что функция $\big\|S(t)\big\|$ непрерывна на $[0;T_0]$, а значит, по теореме Вейерштрасса, равномерно ограничена, то есть выполнено условие $\mathbf{G}_1$). Кроме того, можно оценить:

$$\big\|S^*(t)\xi\big\|_X=\Big\|\big(S(t)-I\big)^*\xi+\xi\Big\|\ge$$

$$\ge\|\xi\|_X-\Big\|\big(S(t)-I\big)^*\Big\|\,\|\xi\|_X\ge\frac{1}{2}\,\|\xi\|_X$$

для п.в. $t\in[0;T_0]$, $\forall\,\xi\in X$, где [8, глава IV, §5, п.5, теорема 6, с.231]

$$\Big\|\big(S(t)-I\big)^*\Big\|=\big\|S(t)-I\big\|\le\frac{1}{2}\quad\text{для п.в.}\,t\in[0;T_0],$$

при некотором (достаточно малом) $T_0>0$ в силу I.c). Таким образом, условие $\mathbf{G}_2$) выполнено при $a=\dfrac{1}{2}$.

II. Оператор $(-G)$ является максимальным монотонным, то есть

$$[-Gx,x]_X\ge0\ \text{для всех}\ x\in D(G)\ \text{(монотонность) и}$$

$$\text{множество значений}\ \big\{(I-G)[x]:\ x\in D(G)\big\}=X\ \text{(максимальность).}$$

Этот случай уже подробно анализировался в [13]. В частности, в [13, замечание 1.1] пояснялось, что при данном условии $S(.)$ будет полугруппой сжатий: $\big\|S(t)\big\|\le1$ для всех $t\in[0;+\infty)$. Это означает, что при $M=1$ выполнено предположение $\mathbf{G}_1$). Как показано в [13], для выполнения условия $\mathbf{G}_2$) (при $a=1$ и произвольном $T_0>0$) достаточно следующего.

$\mathbf{G}^*$) $[Gx,x]=0$ для всех $x\in D(G)$; $[G^*x,x]=0$ для всех $x\in D(G^*)$.

4. Задача преследования в линейном случае

В этом разделе предполагаем, что выполнены условия $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$), $x_0,y_0\in X$; $T>0$ — нефиксированное финальное время (понимаемое как время поимки второго игрока первым). Напомним, что в соответствии с условием $\mathbf{G}_1$) задан также параметр $T_0 > 0$. Рассмотрим две задачи Коши для управляемых линейных эволюционных уравнений.

$$x'(t) = Gx(t) + u(t), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0, \tag{4.1}$$

$$y'(t) = Gy(t) + v(t), \quad t \in [0;T]; \quad y(0) = y_0, \tag{4.2}$$

где $u(t)$, $v(t)$ — управляющие функции первого и второго игроков, соответственно, из класса $L_2\big(0,T;X\big)$. Множества допустимых управлений:

$$U = \big\{u \in L_\infty(0,+\infty;X) : \ \|u(t)\|_X \le \rho_1\big\},$$

$$V = \big\{v \in L_\infty(0,+\infty;X) : \ \|v(t)\|_X \le \rho_2\big\}.$$

Обозначим $x(t;u)$ — слабое решение задачи (4.1), отвечающее управлению u; $y(t;v)$ — слабое решение задачи (4.2), отвечающее управлению v. Управления здесь и всюду далее предполагаются программными. Будем считать, что игра происходит с дискриминацией второго игрока: второй игрок сообщает свой выбор программного (то есть на всем промежутке $[0;+\infty)$) управления $v(.)$ первому игроку; уравнения динамики известны обоим игрокам (игра с полной информацией).

Исследуем разрешимость задачи преследования: для любого выбора управления $v \in V$ вторым игроком найти управление $u \in U$ первого игрока такое, что при некотором финальном времени $T > 0$ происходит поимка второго игрока первым игроком в смысле равенства $x(T;u) = y(T;v)$.

Обозначим $z(t;u,v) = x(t;u) - y(t;v)$. Управление $u(t)$ будем искать в виде: $u(t) = v(t) + w(t)$. Очевидно, что $z = z(t;u,v)$ подчиняется следующей динамике:

$$z'(t) = Gz(t) + w(t), \quad t \in [0;T]; \quad z(0) = z_0. \tag{4.3}$$

Решение задачи (4.3) определяется формулой

$$z(t) = S(t)z_0 + \int\limits_0^t S(t-s)w(s)\,ds, \quad t \ge 0. \tag{4.4}$$

Заметим, что $\forall\, v \in V$

$$\big\|u(t)\big\|_X = \big\|v(t) + w(t)\big\|_X \le \rho_2 + \big\|w(t)\big\|_X,$$

и если $w \in L_\infty(0,+\infty;X)$, $\big\|w(t)\big\|_X \le \rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho > 0$, то $u \in U$. Таким образом, достаточно обеспечить разрешимость следующей задачи управления: при заданном $z_0 \in X$ найти

$$w \in W = \big\{w \in L_\infty(0,+\infty;X):\ \|w(t)\|_X \le \rho\big\}$$

такое, что при некотором $T \in (0;+\infty)$ соответствующее решение $z = z(t;w)$ задачи (4.3) удовлетворяло условию $z(T;w) = 0$.

Справедливо следующее утверждение [1, § 4.3].

Лемма 4.1. *Пусть G — инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \ge 0$. Тогда $S(t)^*$ — тоже сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным производящим оператором G^*.*

Отметим, что уже из того факта, что линейный оператор является инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, следует его замкнутость и плотность вложения его области определения в X, см. [1, § 4.1, с.210, с.213].

Напомним следующие определения, хорошо известные специалистам по теории эволюционных уравнений уравнений в абстрактных пространствах.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\langle .,. \rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$), $\Omega \subset \mathcal{X}$ – заданное множество. Оператор $F: \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ называется *хеминепрерывным* на Ω, если для всех $x, y \in \mathcal{X}$, $z \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}$ таких, что $z + t\,y \in \Omega$, имеет место равенство: $\lim\limits_{t\to 0}\big\langle F\big[z + t\,y\big] - F[z], x\big\rangle = 0$. Ясно, что из непрерывности оператора F следует его хеминепрерывность.

Оператор $F: \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ называется *монотонным*, если

$$\big\langle F[y] - F[z], y - z\big\rangle \ge 0 \quad \forall y, z \in \mathcal{X}.$$

Оператор $F: \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ называется *строго монотонным*, если

$$\big\langle F[y] - F[z], y - z\big\rangle > 0 \quad \forall y, z \in \mathcal{X}, \quad y \ne z.$$

Наконец, если существует константа $\beta > 0$ такая, что

$$\big\langle F[y] - F[z], y - z \big\rangle \geq \beta \, \|y - z\|^2_{\mathcal{X}} \quad \forall y, z \in \mathcal{X},$$

то говорят, что оператор F сильно монотонный.

Следующее утверждение известно как теорема Минти–Браудера [7, теорема 2.1].

Лемма 4.2. *Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности:*

$$\big\langle F(x), x \big\rangle \geq \gamma\big(\|x\|_{\mathcal{X}}\big)\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(t)$ — вещественная функция при $t \geq 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$. Тогда оператор F осуществляет сюръективное отображение пространства $\mathcal{X}$ на (все) пространство $\mathcal{X}^*$. Иными словами, для каждого $y \in \mathcal{X}^*$ уравнение $F[x] = y$ имеет решение $x \in \mathcal{X}$.

Как известно [6, глава V, § 7, с.236], гильбертово пространство X является рефлексивным, причем в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[.,.]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить X и X^*. Очевидно, что для выполнения условия коэрцитивности оператора $F : X \to X$ достаточно его сильной монотонности:

$$\big[F(\xi_1) - F(\xi_2), \xi_1 - \xi_2\big]_X \geq \alpha\|\xi_1 - \xi_2\|^2_X \quad \forall\, \xi_1, \xi_2 \in X; \quad \alpha > 0.$$

Для произвольного $\xi \in X$ положим

$$w(t) = S(T - t)^*\xi. \tag{4.5}$$

Фактически, $S(T-t)^*\xi = h(T-t)$, где $h(t)$ — слабое решение задачи

$$h'(t) = G^*h(t), \quad t \in [0; T]; \quad h(0) = \xi.$$

Поэтому $S(T - t)^*\xi$ есть элемент пространства

$$\mathbb{C}_w\big(0, T; X\big) \subset L_\infty(0, T; X).$$

И соответственно, $w \in L_\infty(0, T; X)$ (если T — финальное время, то при $t > T$ можем считать формально, что $w(t) = 0$, и таким образом полученное продолжение принадлежит $L_\infty(0,+\infty;X)$). При заданном $T>0$ определим оператор $F=F_T:X\to X$ формулой:

$$F[\xi]=\int\limits_0^T S(T-t)S^*(T-t)\xi\,dt,\quad \xi\in X.$$

В силу условия $\mathbf{G}_1$), F — линейный ограниченный оператор,

$$\|F\|\le M^2T.$$

Отсюда следует, что оператор F непрерывен, а стало быть, и хеминепрерывен.

Лемма 4.3. *Для любого $T\in(0;T_0)$ оператор F_T сильно монотонный.*

Доказательство. Для всех ξ_1, $\xi_2\in X$, и соответственно, $\xi=\xi_1-\xi_2$, получаем:

$$\big[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2\big]_X=\big[F(\xi),\xi\big]_X=$$

$$=\int\limits_0^T\big[S(T-s)S(T-s)^*\xi,\xi\big]_X\,ds=$$

$$=\int\limits_0^T\big[S(T-s)^*\xi,S(T-s)^*\xi\big]_X\,ds=\int\limits_0^T\big\|S(T-s)^*\xi\big\|_X^2\,ds,$$

и в силу условия $\mathbf{G}_2$),

$$\big[F(\xi),\xi\big]_X=\int\limits_0^T\big\|S(T-s)^*\xi\big\|_X^2\,ds\ge\alpha\,\|\xi\|_X^2,$$

$$\alpha=\alpha(T)=\int\limits_0^T a^2\,dt=a^2T>0.$$

$\square$

Непосредственно из лемм 4.2, 4.3 вытекает, что $\forall\,T\in(0;T_0)$ уравнение $F_T[\xi]=\eta$ имеет решение $\xi\in X$ для любого $\eta\in X$. А за счет сильной монотонности (для этого достаточно было бы строгой) решение определяется однозначно, то есть определен обратный линейный оператор $F_T^{-1} : X \to X$. Более того, пользуясь оценкой из доказательства леммы 4.3, можем оценить норму решения:

$$\big[\eta = F_T(\xi), \xi\big]_X \geq \alpha(T) \|\xi\|_X^2,$$

откуда по неравенству Коши–Буняковского,

$$\|\xi\|_X \leq \frac{1}{\alpha(T)} \|\eta\|_X.$$

Таким образом, F_T^{-1} — линейный ограниченный оператор (ЛОО), причем

$$\|F_T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha(T)}.$$

Решением поставленной задачи управления при $T \in (0; T_0)$ будет $w(t) = S(T-t)^* \xi$, где $\xi \in X$ — решение уравнения

$$0 = z(T; w) = S(T) z_0 + F_T[\xi],$$

то есть $\xi = F_T^{-1}\big[-S(T)z_0\big]$. Однако нам еще требуется, чтобы было выполнено условие: $\big\|w(t)\big\|_X \leq \rho$ для п.в. $t \in [0; T]$. Считая, что $T \in (0; T_0)$, $t \in [0; T]$, оценим

$$\big\|w(t)\big\|_X = \big\|S(T-t)^* \xi\big\|_X \leq M \|\xi\|_X \leq \frac{M}{\alpha(T)} \big\|S(T) z_0\big\|_X \leq \frac{M^2 \|z_0\|_X}{\alpha(T)}.$$

Отсюда видно, что выполнение указанного условия при ограниченном $T_0 > 0$ не гарантировано. Если же $T_0 = +\infty$, то учитывая, что $\alpha(T) = a^2 T \to +\infty$ при $T \to +\infty$, можем сделать $\big\|w(t)\big\|_X$ сколь угодно малой. Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$), $T_0 = +\infty$. *Тогда при достаточно большом* $T > 0$ *поставленная задача управления имеет решение вида* (4.5), *где* $\xi \in X$, $\xi = F_T^{-1}\big[-S(T)z_0\big]$, $F_T^{-1} : X \to X$ — *линейный ограниченный оператор. Соответственно, поставленная задача преследования имеет решение* $u(t) = v(t) + w(t)$.

При ограниченном T_0 будем действовать несколько иначе. Потребуем выполнения следующего условия

G$_3$) Существует всюду плотное подмножество $X' \subset X$ такое, что для всех $\xi \in X'$ имеет место оценка:

$$\varlimsup_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)\xi-\xi}{t}\right\|_X \le K(\xi).$$

По поводу этого условия заметим, что согласно [18, theorem 2.4], для всех $\xi \in D(G)$ имеем: $S(t)\xi \in D(G)$ и при этом существует

$$\frac{d}{dt}\,S(t)\xi = GS(t)\xi = S(t)G\xi,$$

то есть

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{S(t+\tau)\xi-S(t)\xi}{\tau}-S(t)G(\xi)\right\|_X = 0.$$

В частности, отсюда вытекает, что существует

$$\lim_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)\xi-\xi}{t}\right\|_X = \|G\xi\|_X.$$

Более того, согласно [18, corollary 2.5], область определения $D(G)$ всюду плотна в X (а оператор G является замкнутым линейным оператором). Таким образом, условие **G**$_3$) заведомо выполнено при $X' = D(G)$, $K(\xi) = \|G\xi\|_X$. В случае ограниченности оператора G, как видно из доказательства [18, theorem 1.2], имеет место оценка:

$$\left\|\frac{S(t)-I}{t}-G\right\| \le \|G\|\,\max_{0\le s\le t}\bigl\|S(s)-I\bigr\| \to 0$$

при $t \to +0$, откуда следует, что

$$\lim_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)-I}{t}\right\| = \|G\|.$$

Стало быть, в случае ограниченного оператора G условие **G**$_3$) выполняется при $X' = X$, $K(\xi) = \|G\|\,\|\xi\|_X$.

Итак, условие **G**$_3$) в любом случае выполнено, но есть нюанс: в случае ограниченного оператора G имеем: $X' = X$.

Положим $\kappa = a^2 > 0$, $K_1(z_0) = \dfrac{M}{\kappa}\,K(z_0)$. Будем считать, что $z_0 \in X'$, $\rho > K_1(z_0)$.

Выберем параметры δ и ε, исходя из следующих условий.

P$_1$) Для $\varepsilon = \rho - K_1(z_0)$ в соответствии с условием **G**$_3$) выберем произвольно число $\delta \in (0; T_0)$ такое, что

$$\left\| \frac{S(t)z_0 - z_0}{t} \right\|_X \leq K(z_0) + \frac{\kappa\varepsilon}{2M} \quad \text{для п.в. } t \in (0;\delta].$$

При заданных ε и δ выберем число $k \in \mathbb{N}$ по следующему правилу (выбор неоднозначен; будем считать его произвольно фиксированным).

$\Lambda[\varepsilon,\delta]$) Для параметра $\gamma = \dfrac{\varepsilon\kappa\delta}{2M}$, и для элементов z_0 и $z_1 = 0$ выберем числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k = 1$, удовлетворяющие условиям:

$$(\lambda_i - \lambda_{i-1})\|z_1 - z_0\|_X \leq \gamma, \quad i = \overline{1,k}.$$

Соответственно, k — это количество элементов указанного разбиения отрезка $[0;1]$.

Для $\lambda \in [0;1]$ положим $z_\lambda = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)$. Тогда

$$\|z_{\lambda_i} - z_{\lambda_{i-1}}\|_X = (\lambda_i - \lambda_{i-1})\|z_1 - z_0\|_X \leq \gamma, \quad i = \overline{1,k}.$$

Обозначим $t_i = i\delta$, $i = \overline{1,k}$. Рассмотрим $(i = 1)$-локальную задачу управления: на $[0;t_1] = [0;\delta]$ найти управление $w \in L_\infty(0,t_1;X)$, удовлетворяющее условиям: $\|w(t)\|_X \leq \rho$, $z(t_1;w) = z_{\lambda_1}$. В силу проведенных выше рассуждений, найдется управление $w(t) = S(t_1 - t)^*\xi_1$, $\xi_1 \in X$, такое, что $z(t_1;w) = z_{\lambda_1}$,

$$\|w(t)\|_X = \|S(t_1 - t)^*\xi_1\|_X \leq M\|\xi_1\|_X \leq \frac{M}{\kappa\delta}\,\|z_{\lambda_1} - S(t_1)z_0\|_X \leq$$

$$\leq \frac{M}{\kappa\delta}\left\{\|z_{\lambda_1} - z_0\|_X + \|S(t_1)z_0 - z_0\|_X\right\} \leq \frac{M\gamma}{\kappa\delta} + \frac{M}{\kappa}\left(K(z_0) + \frac{\kappa\varepsilon}{2M}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + K_1(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + K_1(z_0) = \rho.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 4.4. *Пусть выполнены предположения* **G**$_1$) – **G**$_3$)*. Тогда для любого* $z_0 \in X'$ *такого, что* $K(z_0) < \dfrac{\kappa\rho}{M}$*, найдется* $\delta \in (0;T_0)$*, при котором* $(i = 1)$*-локальная задача управления имеет решение.*

Лемма 4.5. *Для любых* $z \in L_1(0,T;X)$ *и ЛОО* $\Psi : X \to X$ *справедливо равенство:*

$$\Psi \int\limits_0^T z(s)\,ds = \int\limits_0^T \Psi z(s)\,ds.$$

Доказательство. Так как функция $z(.)$ интегрируема по Бохнеру, то согласно определению [4, глава IV, § 1, определение 1.5, с.152], существует последовательность $\{z_n\}$ простых функций такая, что:

$$z_n(s) \to z(s) \quad \text{п.в. } s \in [0;T],$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T \big\| z(s) - z_n(s) \big\|_X \, ds = 0, \quad \int\limits_0^T z(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T z_n(s)\,ds.$$

Согласно [4, глава IV, § 1, определение 1.4, с.152], для любой простой функции $\varphi(s)$ существует конечное число попарно непересекающихся измеримых подмножеств $h_i \subset [0;T]$, $i = \overline{1,k}$, таких, что

$$\varphi(s) = \varphi_i \in X, \quad \forall\, s \in h_i, \quad i = \overline{1,k},$$

$$\varphi(s) = 0 \quad \forall\, s \in [0;T] \setminus \bigcup_{i=1}^k h_i,$$

$$\int\limits_0^T \varphi(s)\,ds = \sum_{i=1}^k \varphi_i \operatorname{mes} h_i.$$

Очевидно, что функция $\psi(s) = \Psi\varphi(s)$ тоже является простой со значениями $\psi_i = \Psi\varphi_i$, $i = \overline{1,k}$. Таким образом,

$$\Psi \int\limits_0^T \varphi(s)\,ds = \sum_{i=1}^k \Psi\varphi_i \operatorname{mes} h_i = \int\limits_0^T \psi(s)\,ds = \int\limits_0^T \Psi\varphi(s)\,ds.$$

В частности,

$$\Psi \int\limits_0^T z_n(s)\,ds = \int\limits_0^T \Psi z_n(s)\,ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим

$$\Psi \int_0^T z(s)\, ds = \Psi \int_0^T z_n(s)\, ds + R_{1,n} =$$

$$= \int_0^T \Psi z_n(s)\, ds + R_{1,n} = \int_0^T \Psi z(s)\, ds + R_{1,n} + R_{2,n},$$

где

$$R_{1,n} = \Psi \int_0^T \bigl\{ z(s) - z_n(s) \bigr\}\, ds, \quad R_{2,n} = \int_0^T \Psi \bigl\{ z(s) - z_n(s) \bigr\}\, ds.$$

Очевидно, что

$$\|R_{i,n}\|_X \le \|\Psi\| \int_0^T \bigl\| z(s) - z_n(s) \bigr\|_X\, ds \to 0, \quad i = 1, 2,$$

при $n \to \infty$. Таким образом, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем равенство:

$$\Psi \int_0^T z(s)\, ds = \int_0^T \Psi z(s)\, ds.$$

□

Отметим, что, например, при доказательстве [18, theorem 2.4] без каких-либо оговорок и ссылок применяется равенство вида

$$S(\tau) \int_0^t S(s) x\, ds = \int_0^t S(\tau) S(s) x\, ds = \int_0^t S(\tau + s) x\, ds \quad \forall\, x \in X.$$

Оно и ему подобные равенства следуют из леммы 4.5.

Предполагая, что уже найдено управление $w = \widetilde{w} \in L_\infty(0, t_{i-1}; X)$, удовлетворяющее условиям:

$$z(t_{i-1}; \widetilde{w}) = z_{\lambda_{i-1}}, \ \bigl\| \widetilde{w}(t) \bigr\|_X \le \rho,$$

рассмотрим i-локальную задачу управления: найти управление $\widehat{w} \in L_\infty(t_{i-1}, t_i; X)$ такое, что $z(t_i; w) = z_{\lambda_i}$ при

$$w(t) = \begin{cases} \widetilde{w}(t), & t \in [0; t_{i-1}), \\ \widehat{w}(t), & t \in [t_{i-1}; t_i]; \end{cases}$$

$\left\|\widehat{w}(t)\right\|_X \leq \rho$.

В соответствии с формулой (4.4) решение $z(t;w)$ на $[t_{i-1};t_i]$ определяется формулой

$$z(t) = S(t-t_{i-1})z_{\lambda_{i-1}} + \int\limits_{t_{i-1}}^{t} S(t-s)\widehat{w}(s)\,ds \quad t\in[t_{i-1};t_i]. \tag{4.6}$$

Действительно, это следует из соотношений:

$$S(t-t_{i-1})S(t_{i-1}) = S(t), \quad S(t-t_{i-1})S(t_{i-1}-s) = S(t-s),$$

которые вытекают непосредственно из полугруппового свойства, и из леммы 4.5.

Если сделать замену $\tau = t - t_{i-1} \in [0; t_i - t_{i-1}] = [0;\delta]$, то формула (4.6) преобразуется к виду:

$$z(t_{i-1}+\tau) = S(\tau)z_{\lambda_{i-1}} + \int\limits_{t_{i-1}}^{\tau+t_{i-1}} S(\tau+t_{i-1}-s)\widehat{w}(s)\,ds,$$

или, после замены $s - t_{i-1} = \eta$,

$$z(t_{i-1}+\tau) = S(\tau)z_{\lambda_{i-1}} + \int\limits_{0}^{\tau} S(\tau-\eta)\widehat{w}(\eta+t_{i-1})\,d\eta, \quad \tau\in[0;\delta].$$

Таким образом, i-локальная задача управляемости равносильна ($i = 1$)-локальной задаче управляемости, с тем лишь отличием, что вместо $z_{\lambda_0} = z_0$ и z_{λ_1} выступают $z_{\lambda_{i-1}}$ и z_{λ_i}, вместо $z(\tau)$ — соответственно, $\widetilde{z}(\tau) = z(t_{i-1}+\tau)$, и вместо $w(\eta)$ — соответственно, $\widehat{w}(\eta + t_{i-1})$. При этом для всех $\lambda\in[0;1]$ имеем:

$$\frac{\left\|S(\tau)z_\lambda - z_\lambda\right\|}{\tau} \leq \lambda\frac{\left\|S(\tau)z_1 - z_1\right\|}{\tau} + (1-\lambda)\frac{\left\|S(\tau)z_0 - z_0\right\|}{\tau} =$$

$$= (1-\lambda)\frac{\left\|S(\tau)z_0 - z_0\right\|}{\tau} \leq (1-\lambda)\left\{K(z_0) + \frac{\kappa\varepsilon}{2M}\right\}.$$

Поэтому ситуация ($i = 1$)-локальной задачи управления полностью воспроизводится. Стало быть, непосредственно из леммы 4.4 вытекает

Лемма 4.6. *Пусть выполнены предположения* $\mathbf{G}_1$) – $\mathbf{G}_3$). *Тогда для любого* $z_0 \in X'$ *такого, что* $K(z_0) < \dfrac{\kappa\rho}{M}$, *найдется* $\delta \in (0; T_0)$, *при котором* i*-локальная задача управления имеет решение вида* $\widehat{w}(t) = S(t_i - t)^*\xi_i$, $\xi_i \in X$, *при любом* $i = \overline{1,k}$.

Непосредственно из леммы 4.6 следует

Теорема 4.2. *Пусть выполнены предположения* $\mathbf{G}_1$) – $\mathbf{G}_3$). *Тогда для любого* $z_0 \in X'$ *такого, что* $K(z_0) < \dfrac{\kappa\rho}{M}$, *найдутся числа* $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0; T_0)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* λ_i, $i = \overline{0,k}$, *определяемые по правилам* $\mathbf{P}_1$), $\Lambda[\varepsilon, \delta]$, *и соответственно,* $t_i = i\delta$, $i = \overline{1,k}$, $T = t_k$, *такие, что существует управление* $w \in L_\infty(0, T; X)$ *вида*

$$w(t) = \Big\{ S(t_i - t)^*\xi_i,\ \xi_i \in X,\ t \in (t_{i-1}; t_i],\ i = \overline{1,k} \Big\},$$

удовлетворяющее условиям: $z(t_i; w) = z_{\lambda_i}$, $i = \overline{1,k}$, $z(T; w) = z_1 = 0$, $\big\|w(t)\big\|_X \le \rho$ *п.в.* $t \in [0; T]$. *Это означает, что задача преследования имеет решение вида* $u(t) = v(t) + w(t)$.

Замечание 4.1. Как видно из условий $\mathbf{P}_1$), $\Lambda[\varepsilon, \delta]$, число $\delta > 0$ может быть выбрано произвольным достаточно малым, и соответственно, число $k \in \mathbb{N}$ может быть сколь угодно малым (вплоть до единицы) в случае, если норма $\|z_1 - z_0\|_X$ достаточно мала. Таким образом, при достаточной близости начальных состояний игроков время поимки $T = k\delta > 0$ оказывается сколь угодно малым. Тем самым, если задано ограничение сверху на время поимки $T \le T_*$, то в соответствии с теоремой 4.2, для поимки второго игрока, фактически, достаточно выполнения двух условий: 1) начальные состояния игроков достаточно близки; 2) между нормами управлений игроков имеется некий положительный зазор (то есть первый игрок обладает преимуществом по выбору управления). Очевидно, что при нарушении хотя бы одного из этих условий (игроки сколь угодно далеки друг от друга в начальный момент времени и/или обладают равными возможностями по выбору управления) надеяться на возможность поимки второго игрока за ограниченное заданное время первым игроком было бы наивно: образно говоря, второй игрок уходит на максимальной скорости от первого игрока, а первый, поскольку его скорость не больше, либо он находится бесконечно далеко от второго, за лимитированное время его не догонит.

5. Задача преследования в нелинейном случае

Предполагая, что выполнены условия $\mathbf{G}_1) - \mathbf{G}_3)$, $x_0, y_0 \in X$, $T > 0$ — нефиксированное финальное время (понимаемое как время поимки второго игрока первым), рассмотрим две задачи Коши для управляемых полулинейных эволюционных уравнений.

$$x'(t) = Gx(t) + f\big(t, x(.)\big) + u(t), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0, \tag{5.1}$$

$$y'(t) = Gy(t) + g\big(t, y(.)\big) + v(t), \quad t \in [0;T]; \quad y(0) = y_0, \tag{5.2}$$

где $u(t)$, $v(t)$ — управляющие функции первого и второго игроков, соответственно, из класса $L_2\big(0, T; X\big)$. Множества допустимых управлений:

$$U = \big\{u \in L_\infty(0, +\infty; X) : \ \|u(t)\|_X \le \rho_1\big\},$$
$$V = \big\{v \in L_\infty(0, +\infty; X) : \ \|v(t)\|_X \le \rho_2\big\}.$$

Обозначим $x(t; u)$ — слабое решение задачи (5.1), отвечающее управлению u (если оно существует); $y(t; v)$ — слабое решение задачи (5.2), отвечающее управлению v (если оно существует). Будем считать, что игра происходит с дискриминацией второго игрока: второй игрок сообщает свой выбор программного управления $v \in V$ первому игроку; уравнения динамики известны обоим игрокам (игра с полной информацией).

Исследуем разрешимость задачи преследования: для любого выбора управления $v \in V$ вторым игроком, при условии, что задача (5.2) имеет однозначное решение $y(t; v)$, найти управление $u \in U$ первого игрока такое, что при некотором финальном времени $T > 0$ задача (5.1) имеет решение $x = x(t; u)$ такое, что $x(T; u) = y(T; v)$.

Обозначим $z(t; u, v) = x(t; u) - y(t; v)$, $z_0 = x_0 - y_0$. Управление $u(t)$ будем искать в виде: $u(t) = v(t) + w(t)$. Очевидно, что $z = z(t; u, v)$ подчиняется следующей динамике:

$$z'(t) = Gz(t) + f\big(t, y(.) + z(.)\big) - g\big(t, y(.)\big) + w(t), \ t \in [0;T]; \ z(0) = z_0. \tag{5.3}$$

Обозначим

$$\Phi\big(t, z(.)\big) = f\big(t, y(.) + z(.)\big) - g\big(t, y(.)\big),$$

$t \geq 0$, $z \in L_\infty(0,T;X)$.

Слабое решение задачи (5.3) на $[0;T]$ понимаем как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$z(t) = \theta(t) + A\Big[\Phi\big(.,z(.)\big) + w(.)\Big](t), \quad t \in [0;T]; \quad z \in E = E(T), \tag{5.4}$$

при $\theta(t) = S(t)z_0$, $E = E(T) = L_\infty(0,T;X)$, $\theta \in \mathbb{C}_w\big(0,T;X\big) \subset E$. Ясно, что всякое решение $z \in E$ в соответствии со свойствами оператора правой части принадлежит также и пространству $\mathbb{C}_w\big(0,T;X\big)$.

Потребуем выполнения следующих условий для любого $T > 0$.

F$_1$) Для всех $z \in E(T) = L_\infty(0,T;X)$ отображение $[0;T] \ni t \to \Phi\big(t,z(.)\big)$ принадлежит классу $L_2\big(0,T;X\big)$ и является вольтерровым в том смысле, что значения $\Phi\big(t,z(.)\big)$ зависят лишь от значений $z(s)$ при $s \in [0;t]$ для п.в. $t \in [0;T]$.

F$_2$) Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $\xi, \eta \in E = E(T)$, $\|\xi\|_E$, $\|\eta\|_E \leq M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\big\|\Phi(t,\xi) - \Phi(t,\eta)\big\|_X = \big\|f(t,\xi) - f(t,\eta)\big\|_X \leq$$
$$\leq \mathcal{N}(t,M)\,\big\|\xi - \eta\big\|_{L_\infty(0,t;X)}.$$

F$_3$) Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t такая, что $\Big\|\Phi(t,\xi)\Big\|_X \leq \mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M > 0$, $\xi \in E = E(T)$, $\|\xi\|_E \leq M$, п.в. $t \in [0;T]$.

F$_4$) Для любого $\sigma > 0$ справедливы оценки:

$$\int\limits_h \mathcal{N}(s,\sigma)\,ds \leq K_1(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h, \quad \int\limits_h \mathcal{N}_1(s,\sigma)\,ds \leq K_2(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h.$$

Считая выполненными условия **G**$_1$) – **G**$_3$), положим $\kappa = a^2 > 0$. Полагая, что $z_0 \neq 0$ (иначе задача преследования не имеет смысла), обозначим $\sigma = \sigma(z_0) = 2M\|z_0\|_X$.

Положим $K_0(z_0) = \dfrac{M}{\kappa}\Big\{K(z_0) + K_2(\sigma)\Big\}$. Далее будем считать, что $z_0 \in X'$, $\rho > K_0(z_0)$.

Выберем параметры δ и ε, исходя из следующих условий.

P$_2$) Для $\varepsilon = \rho - K_0(z_0)$ в соответствии с условием **G**$_3$) зафиксируем произвольно число $\delta_1 \in (0; T_0)$ такое, что

$$\left\| \frac{S(t)z_0 - z_0}{t} \right\|_X \leq K(z_0) + \frac{\kappa\varepsilon}{2M}, \quad \text{для п.в. } t \in (0; \delta_1].$$

Соответственно, выберем число $\delta \in (0; \delta_1)$, исходя из условий:

$$\gamma_1(z_0)\delta < \|z_0\|_X,\ \gamma_1(z_0) \equiv \rho + K_2(\sigma),$$

$$\gamma_2(z_0)\delta < \frac{1}{2},\ \gamma_2(z_0) \equiv MK_1(\sigma)\big(1 + M^2\kappa^{-1}\big).$$

При заданных ε и δ выберем число $k \in \mathbb{N}$ (и соответствующие числа λ_i, $i = \overline{0,k}$) по правилу $\Lambda[\varepsilon, \delta]$) (выбор неоднозначен; будем считать его произвольно фиксированным).

Для $\lambda \in [0; 1]$ положим $z_\lambda = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)$. Тогда

$$\|z_{\lambda_i} - z_{\lambda_{i-1}}\|_X = (\lambda_i - \lambda_{i-1})\|z_1 - z_0\|_X \leq \gamma, \quad i = \overline{1,k}.$$

Обозначим $t_i = i\delta$, $i = \overline{1,k}$. Рассмотрим ($i = 1$)-локальную задачу управления: на $[0; t_1] = [0; \delta]$ найти управление $w \in L_\infty(0, t_1; X)$, удовлетворяющее условиям: $\big\|w(t)\big\|_X \leq \rho$, $z(t_1; w) = z_{\lambda_1}$.

Предполагая, что на $[0; t_1] = [0; \delta]$ управление w имеет вид (4.5), будем использовать ЛОО F_T и F_T^{-1}, определенные в предыдущем разделе, при $T = t_1 = \delta$. Соответственно, определим также оператор $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T : E(T) \to E(T)$, $E(T) = L_\infty(0, T; X)$, формулой:

$$\mathcal{F}[z](t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)\Phi\big(s, z(.)\big)\, ds +$$

$$+ \int_0^t S(t-s)S(T-s)^* F_T^{-1}\big[\omega(z)\big]\, ds,$$

где

$$\omega(z) = \omega_T(z) \equiv z_{\lambda_1} - S(T)z_0 - \int_0^T S(T-s)\Phi\big(s, z(.)\big)\, ds.$$

Считая, что $z_0 \in X'$, определим множество

$$\Omega(T) = \big\{z \in E(T) :\ \|z\|_{E(T)} \leq \sigma\big\}, \quad \sigma = \sigma(z_0).$$

Лемма 5.1. *При сделанных предположениях* $\forall\, z \in \Omega(T)$ *и соответствующего* $w(t) = S(T-t)^* F_T^{-1}\big[\omega_T(z)\big]$ *имеем:* $\big\|w(t)\big\|_X \le \rho$ *для п.в.* $t \in [0;T]$.

Доказательство. Учитывая, что $T = t_1 = \delta \le \delta_1$, оценим

$$\big\|w(t)\big\|_X \le \frac{M}{\kappa\delta}\Big\{\big\|z_{\lambda_1} - S(t_1)z_0\big\|_X + K_2(\sigma)\delta\Big\} \le$$

$$\le \frac{M}{\kappa\delta}\Big\{\|z_{\lambda_1} - z_0\|_X + \big\|S(t_1)z_0 - z_0\big\|_X + K_2(\sigma)\delta\Big\} \le$$

$$\le \frac{M\gamma}{\kappa\delta} + \frac{M}{\kappa}\ \Big(K(z_0) + \frac{\kappa\varepsilon}{2M} + K_2(\sigma)\Big) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + K_0(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + K_0(z_0) = \rho.$$

□

Исследуем разрешимость уравнения

$$z = \mathcal{F}_T[z], \quad z \in \Omega(T). \tag{5.5}$$

Лемма 5.2. *При сделанных предположениях уравнение* (5.5) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Воспользуемся принципом сжимающих отображений. Прежде всего, докажем, что $\mathcal{F}_T$ не выводит из $\Omega(T)$. Выберем произвольно $z \in \Omega(T)$ и, пользуясь сделанными предположениями и леммой 5.1, при $t \in [0;T]$ оценим:

$$\big\|\mathcal{F}_T[z](t)\big\|_X \le \big\|S(t)z_0\big\|_X + \int\limits_0^t \big\|S(t-s)\big\|\,\Big\|S(T-s)^* F_T^{-1}\big[\omega_T(z)\big]\Big\|_X\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \big\|S(t-s)\big\|\,\big\|\Phi(s, z(.))\big\|_X\, ds \le M\|z_0\|_X + M\rho t + MtK_2(\sigma) \le$$

$$\le M\|z_0\|_X + M\delta\big(\rho + K_2(\sigma)\big) = M\|z_0\|_X + M\delta\gamma_1(z_0) \le 2M\|z_0\|_X = \sigma.$$

Таким образом, $\mathcal{F}_T[z] \in \Omega(T)$.

Установим сжимаемость оператора $\mathcal{F}_T$ на $\Omega(T)$. Выберем произвольно $z_1, z_2 \in \Omega(T)$ и пользуясь сделанными предположениями, при $t \in [0;T]$ оценим:

$$\big\|\mathcal{F}_T[z_1](t) - \mathcal{F}_T[z_2](t)\big\|_X \leq tM^3 \big\|F_T^{-1}\big\| \int\limits_0^T \big\|\Phi(s, z_1(.)) - \Phi(s, z_2(.))\big\|_X \, ds +$$

$$+ M \int\limits_0^t \big\|\Phi(s, z_1(.)) - \Phi(s, z_2(.))\big\|_X \, ds \leq$$

$$\leq \left[M \int\limits_0^t \mathcal{N}(s,\sigma)\, ds + tM^3 \big\|F_T^{-1}\big\| \int\limits_0^T \mathcal{N}(s,\sigma)\, ds \right] \|z_1 - z_2\| \leq$$

$$\leq \big\{ MK_1(\sigma) + M^3 \kappa^{-1} K_1(\sigma) \big\} \delta \, \|z_1 - z_2\|_{E(T)} =$$

$$= \gamma_2(z_0)\delta \, \|z_1 - z_2\|_{E(T)} \leq \frac{1}{2} \, \|z_1 - z_2\|_{E(T)}.$$

Таким образом,

$$\big\|\mathcal{F}_T[z_1] - \mathcal{F}_T[z_2]\big\|_{E(T)} \leq \frac{1}{2} \, \|z_1 - z_2\|_{E(T)},$$

то есть оператор F_T является сжимающим на $\Omega(T)$.

Очевидно, что множество $\Omega(T)$ замкнуто в $E(T)$. Согласно принципу сжимающих отображений Каччопполи–Банаха [6, глава XVI, §1, теорема 1], уравнение (5.5) имеет единственное решение на $\Omega(T)$. $\square$

Предположим, $z \in \Omega(T)$ — решение уравнения (5.5), $T = t_1 = \delta$. Положим

$$\xi = F_T^{-1} \left[z_{\lambda_1} - S(T) z_0 - \int\limits_0^T S(T-s) \Phi\big(s, z(.)\big)\, ds \right] = F_T^{-1} \big[\omega_T(z)\big], \tag{5.6}$$

$w(t) = S^*(T-t)\xi$. Учитывая, что z — решение (5.5), имеем:

$$z(t) = S(t) z_0 + \int\limits_0^t S(t-s) \Phi\big(s, y(.)\big)\, ds + \int\limits_0^t S(t-s) w(s)\, ds, \quad t \in [0;T].$$

Стало быть, z — есть решение задачи (5.3) на $[0;T] = [0;t_1] = [0;\delta]$, отвечающее управлению w, то есть $z = z(t;w)$. При этом, согласно определению элемента ξ, имеем:

$$z_{\lambda_1} = S(T)z_0 + \int\limits_0^T S(T-s)\Phi\big(s, z(.)\big)\,ds + F_T[\xi] =$$

$$= S(T)z_0 + \int\limits_0^T S(T-s)\Phi\big(s, z(.)\big)\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^T S(T-s)w(s)\,ds = z(T;w) = z(t_1;w).$$

И согласно лемме 5.1, $\|w\|_{E(T)} \le \rho$. Таким образом, w является решением $(i=1)$-локальной задачи управления. Из проведенных рассуждений и леммы 5.2 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть выполнены предположения* $\mathbf{G}_1)$ – $\mathbf{G}_3)$, $\mathbf{F}_1)$ – $\mathbf{F}_4)$. *Тогда для любого* $z_0 \in X'$ *такого, что* $K_0(z_0) < \dfrac{\kappa\rho}{M}$, *и соответствующего выбора числа* $\delta > 0$, *описанного выше,* $(i=1)$*-локальная задача управления имеет решение вида* (4.5) *при некотором* $\xi \in X$ *вида* (5.6) *(при* $T = t_1 = \delta$*),* $z = z(t;w) \in \Omega(T)$.

Предполагая, что уже найдено управление $w = \widetilde{w} \in L_\infty(0, t_{i-1}; X)$, удовлетворяющее условиям:

$$z(t_{i-1};\widetilde{w}) = z_{\lambda_{i-1}},\ \big\|\widetilde{w}(t)\big\|_X \le \rho,$$

рассмотрим i-локальную задачу управления: найти управление $\widehat{w} \in L_\infty(t_{i-1}, t_i; X)$ такое, что $z(t_i;w) = z_{\lambda_i}$ при

$$w(t) = \begin{cases} \widetilde{w}(t), & t \in [0;t_{i-1}), \\ \widehat{w}(t), & t \in [t_{i-1};t_i]; \end{cases} \qquad \big\|\widehat{w}(t)\big\|_X \le \rho.$$

Далее всякое выражение вида $\Phi\big(t, z(.)\big)$, с учетом вольтерровости оператора Φ, см. предположение $\mathbf{F}_1)$, понимаем в смысле:

$$\Phi\big(t, z(.)\big) = \Phi\big(t, Q_{[0;t_{i-1}]}z(.;\widetilde{w}) + Q_{(t_{i-1};t_i]}z(.)\big),\big),$$

где Q_h — оператор продолжения нулем с множества $h \subset [0; t_i]$. Иначе говоря, при вычислении значений $\Phi\big(t, z(.)\big)$, $t \in [t_{i-1}; t_i]$ в качестве $z(s)$ при $s \in [0; t_{i-1}]$ используются значения уже найденного решения $z(s; \widetilde{w})$, а собственно $z(s)$ берутся лишь при $s \in (t_{i-1}; t]$.

В соответствии с определением решения задачи (5.3), $z = z(t; w)$ на промежутке $[t_{i-1}; t_i]$ определяется как решение уравнения

$$z(t) = S(t - t_{i-1}) z_{\lambda_{i-1}} + \int\limits_{t_{i-1}}^{t} S(t-s)\Big\{\Phi\big(s, z(.)\big) + \widehat{w}(s)\Big\}\, ds \quad t \in [t_{i-1}; t_i]. \tag{5.7}$$

Действительно, это следует из соотношений:

$$S(t - t_{i-1}) S(t_{i-1}) = S(t), \quad S(t - t_{i-1}) S(t_{i-1} - s) = S(t - s),$$

которые вытекают непосредственно из полугруппового свойства.

Если сделать замену $\tau = t - t_{i-1} \in [0; t_i - t_{i-1}] = [0; \delta]$, то уравнение (5.7) преобразуется к виду:

$$z(t_{i-1} + \tau) = S(\tau) z_{\lambda_{i-1}} + \int\limits_{t_{i-1}}^{\tau + t_{i-1}} S(\tau + t_{i-1} - s)\Big(\Phi\big(s, z(.)\big) + \widehat{w}(s)\Big)\, ds,$$

или, после замены $s - t_{i-1} = \eta$,

$$z(t_{i-1}+\tau) = S(\tau) z_{\lambda_{i-1}} + \int\limits_{0}^{\tau} S(\tau-\eta)\Big(\Phi\big(., z(.)\big) + \widehat{w}\Big)(\eta + t_{i-1})\, d\eta, \ \tau \in [0; \delta].$$

Таким образом, i-локальная задача управляемости равносильна ($i = 1$)-локальной задаче управляемости, с тем лишь отличием, что вместо $z_{\lambda_0} = z_0$ и z_{λ_1} выступают $z_{\lambda_{i-1}}$ и z_{λ_i}, вместо $z(\tau)$ — соответственно, $\widetilde{z}(\tau) = z(t_{i-1} + \tau)$, и вместо $w(\eta)$ — соответственно, $\widehat{w}(\eta + t_{i-1})$. При этом для всех $\lambda \in [0; 1]$ имеем:

$$\frac{\big\|S(\tau) z_\lambda - z_\lambda\big\|}{\tau} \le \lambda \frac{\big\|S(\tau) z_1 - z_1\big\|}{\tau} + (1 - \lambda) \frac{\big\|S(\tau) z_0 - z_0\big\|}{\tau} =$$

$$= (1 - \lambda) \frac{\big\|S(\tau) z_0 - z_0\big\|}{\tau} \le (1 - \lambda) \left\{ K(z_0) + \frac{\kappa \varepsilon}{2M} \right\}.$$

И аналогично, $S(\tau) z_{\lambda_{i-1}} = (1 - \lambda_{i-1}) z_0$.

Поэтому ситуация ($i = 1$)-локальной задачи управления полностью воспроизводится. Некоторая кажущаяся неочевидность может возникнуть лишь касательно переноса на исследуемый случай обоснования сжимаемости. Но она устраняется, если предъявить неравенство, см. предположения $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_4$):

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \Big\| \Phi\big(t, z_1(.)\big) - \Phi\big(t, z_2(.)\big) \Big\|_X \, dt \le \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(t,\sigma)\, dt\, \|z_1 - z_2\|_{L_\infty(0,t_i;X)} =$$

$$= \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(t,\sigma)\, dt\, \|z_1 - z_2\|_{L_\infty(t_{i-1},t_i;X)},$$

поскольку, как уже было сказано выше, значения $z_1(s) = z_2(s) = z(s;\widetilde{w})$ при $s \in [0; t_{i-1}]$. Стало быть, непосредственно из теоремы 5.1 вытекает

Теорема 5.2. *Пусть выполнены предположения* $\mathbf{G}_1$) – $\mathbf{G}_3$), $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_4$). *Тогда для любого $z_0 \in X'$ такого, что $K_0(z_0) < \rho$, и соответствующего выбора числа $\delta > 0$, описанного выше, i-локальная задача управления имеет решение вида $\widehat{w}(t) = S(t_i - t)^* \xi_i$, $\xi_i \in X$, при любом $i = \overline{1,k}$.*

Непосредственно из теоремы 5.2 следует

Теорема 5.3. *Пусть выполнены предположения* $\mathbf{G}_1$) – $\mathbf{G}_3$), $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_4$). *Тогда для любого $z_0 \in X'$ такого, что $K_0(z_0) < \rho$, найдутся числа $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0;T_0)$, $k \in \mathbb{N}$ и λ_i, $i = \overline{0,k}$, определяемые по правилам* $\mathbf{P}_2$), $\Lambda[\varepsilon,\delta]$, *и соответственно, $t_i = i\delta$, $i = \overline{1,k}$, $T = t_k$, существует управление $w \in L_\infty(0,T;X)$ вида*

$$w(t) = \Big\{ S(t_i - t)^* \xi_i,\ \xi_i \in X,\ t \in (t_{i-1}; t_i],\ i = \overline{1,k} \Big\},$$

удовлетворяющее условиям: $z(t_i; w) = z_{\lambda_i}$, $i = \overline{1,k}$, $z(T;w) = z_1 = 0$, $\big\|w(t)\big\|_X \le \rho$ п.в. $t \in [0;T]$. Это означает, что задача преследования имеет решение вида $u(t) = v(t) + w(t)$, $t \in [0;T]$.

Замечание 5.1. По отношению к теореме 5.3 можно воспроизвести замечание 4.1, сделанное ранее в отношении теоремы 4.2.

Очевидно, что совершенно точно так же мы можем исследовать разрешимость задачи об успокоении возмущения: при любом выборе управления $v\in V$ вторым игроком («возмущающей помехи») найти управление $u\in U$ первого игрока, приводящее систему

$$z'(t)=Gz(t)+\Phi\big(t,z(.)\big)+u(t)-v(t),\ t\in[0;T];\ z(0)=z_0. \qquad (5.8)$$

в состояние покоя $z(T;u)=0$ к некоторому моменту времени $T>0$, если в начальный момент времени система была выведена из состояния покоя: $z_0\neq 0$.

6. Пример: система уравнений Осколкова

Прежде всего, необходимо сделать следующее замечание касательно случая ЛОО $G:X\to X$ для задачи (2.1).

Замечание 6.1. Как уже пояснялось в разделе 3, уже из того факта, что $G:X\to X$ — ЛОО, следует, что он является инфинитезимальным генератором равномерно непрерывной (а следовательно, сильно непрерывной) полугруппы (которая определяется однозначно). При этом G может рассматриваться и как ЛОО $L_2(0,T;X)\to L_2(0,T;X)$. Как показано в [4, глава V, §1.3, теорема 1.3], при сделанных предположениях для любых $x_0\in X$, $z\in L_2(0,T;X)$ задача вида (2.1) с производной, понимаемой в смысле распределений, имеет единственное решение $x\in\mathbf{C}\big(0,T;X\big)$ с производной $x'\in L_2\big(0,T;X\big)$. Более того, определенное тем самым соответствие $\{x_0;z\}\to\{x;x'\}$ непрерывно как отображение

$$X\times L_2\big(0,T;X\big)\to\mathbf{C}\big(0,T;X\big)\times L_2\big(0,T;X\big).$$

При этом, как указано в [4, глава V, §1.3, замечание 1.4], если $x\in L_2\big(0,T;X\big)$ является решением, то отсюда в силу [4, глава IV, теоремы 1.6, 1.7] вытекают следующие факты:

1) функция $x:[0;T]\to X$ непрерывна и п.в. на $[0;T]$ (сильно) дифференцируема;

2) имеет место тождество:

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^t\big\{Gx(s)+z(s)\big\}\,ds\quad\forall\,t\in[0;T];$$

3) для п.в. $t \in [0;T]$ имеем: производная в смысле распределений (по этому поводу см. также [4, глава IV, §1, лемма 1.8, с.169]) $x'(t) = Gx(t) + z(t)$.

Для сильной производной (см. пункт 1)) справедливо тождество [14, доказательство леммы 2.2]:

$$\frac{d}{dt}\big[x(t), \omega\big] = \big[x'(t), \omega\big] \quad \forall\, \omega \in X.$$

Таким образом, в силу 3), получаем:

$$\frac{d}{dt}\big[x(t), \omega\big] = \big[Gx(t) + z(t), \omega\big] = \big[x(t), G^{*}\omega\big] + \big[z(t), \omega\big] \quad \forall\, \omega \in X.$$

Это означает, что x есть решение задачи (2.1) также и в слабом смысле.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область с локально липшицевой границей $\partial\Omega$, $T > 0$, $\Gamma = [0;T] \times \partial\Omega$, $\Pi_T = [0;T] \times \Omega$. Следуя [5, глава 2, с.16–37], рассмотрим в цилиндре Π_T систему

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_1 \Delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \mu_2 \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t} - \int\limits_0^t h(s,t)\Delta\varphi(s)\, ds + \nabla p = g; \tag{6.1}$$

$$\operatorname{div}\varphi = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T; \tag{6.2}$$

$$\varphi(0, x) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega; \tag{6.3}$$

$$\varphi\,\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{6.4}$$

Система (6.1), (6.2) называется *системой уравнений Осколкова*, или *интегродифференциальной системой Кельвина–Фойгта*. Она является модельной для описания движения неньютоновской жидкости, которой требуется время для того, чтобы среагировать на действие внезапно приложенной силы (в рамках модели Кельвина–Фойгта). Здесь $\varphi(t, x)$ — вектор скорости частицы жидкости, расположенной в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0;T]$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — компоненты вектора φ; $p = p(t, x)$ — давление жидкости; $g = g(t, x)$ — вектор внешних сил, действующих на жидкость (их также называют объемными); μ_1, μ_2 $(\mu_2 > 0)$ — константы; $h \in L_\infty\big((0,T) \times (0,T)\big)$ —

заданная функция (может быть тождественно равной нулю). С физической точки зрения число μ_1 также должно быть положительным (поскольку это вязкость жидкости), однако с математической точки зрения это не важно.

Обозначим $\mathcal{D}(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса $\mathbf{C}^\infty$ с компактным носителем в Ω; $H_0^1(\Omega)^n$ — замыкание $\mathcal{D}(\Omega)^n$ в норме пространства $H^1(\Omega)^n$; $\mathcal{V} = \Big\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^n : \ \operatorname{div}\varphi = 0\Big\}$ — множество соленоидальных функций; H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2^n(\Omega)$; V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением

$$(v, w) = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla w\, dx, \quad \nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial w_i}{\partial x_j}.$$

Известно [5], что соответствующая норма $\|.\|_V$ эквивалентна норме пространства $H^1(\Omega)^n$. Согласно [4], имеют место непрерывные и плотные вложения

$$V \subset H, \quad H^* \subset V^*,$$

причем H допускает отождествление с H^*. Определим пространство

$$W = W[0;T] = \Big\{\varphi : \quad \varphi \in \mathbf{C}\big(0,T;V\big), \quad \varphi' \in L_2\big(0,T;V\big)\Big\}$$

с нормой $\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_{\mathbf{C}\left(0,T;V\right)} + \|\varphi'\|_{L_2\left(0,T;V\right)}$. Производная φ' понимается в смысле распределений.

Следуя [5, определение 2.2.1], слабым решением задачи (6.1)–(6.4) назовем функцию $\varphi \in W$, удовлетворяющую для всех $\omega \in V$ и п.в. $t \in [0;T]$ тождеству[1]

$$\begin{gathered}\langle J\varphi'(t), \omega\rangle + \langle \mu_2 A\varphi'(t), \omega\rangle + \langle \mu_1 A\varphi(t), \omega\rangle + \\ + \langle (N\varphi)(t), \omega\rangle - \langle B\varphi(t), \omega\rangle = \langle g, \omega\rangle,\end{gathered} \tag{6.5}$$

с начальным условием

$$\varphi(0) = \varphi_0. \tag{6.6}$$

Здесь предполагается, что $\varphi_0 \in V$, $g \in L_2\big(0,T;V^*)$ и используются следующие операторы

$$J : V \to V^*, \quad \langle J\varphi, \omega\rangle = \int\limits_\Omega \varphi\omega\, dx, \quad \varphi, \omega \in V;$$

[1]Давление p здесь отсутствует, поскольку $\int\limits_\Omega \nabla p\, \omega\, dx = \int\limits_\Omega p \operatorname{div}\omega\, dx = 0$.

$$A : V \to V^*, \quad \langle A\varphi, \omega\rangle = \int\limits_\Omega \nabla\varphi : \nabla\omega\, dx, \quad \varphi, \omega \in V;$$

$$N : L_2\big(0, T; V\big) \to L_2\big(0, T; V^*\big),$$

$$\langle (N\varphi)(t), \omega\rangle = \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(s,t)\, \nabla\varphi(s)\, ds : \nabla\omega\, dx,\ \varphi \in L_2\big(0,T;V\big),\ \omega \in V;$$

$$B : L_4^n(\Omega) \to V^*, \quad \langle B\varphi, \omega\rangle = \int\limits_\Omega \varphi_i\varphi_j \frac{\partial\omega}{\partial x_i}\, dx, \quad \varphi \in L_4^n(\Omega), \quad \omega \in V.$$

В силу произвольности выбора $\omega \in V$ тождество (6.5) эквивалентно операторному дифференциальному уравнению

$$(\mu_2 A + J)\varphi' + \mu_1 A\varphi + N\varphi - B\varphi = g, \quad \varphi \in W. \tag{6.7}$$

В [5, теорема 2.2.1] уже было установлено, что для любых $\varphi_0 \in V$, $g \in L_2\big(0,T;V^*\big)$ существует единственное слабое решение исходной задачи, то есть, иначе говоря, решение задачи Коши (6.7), (6.6).

Лемма 6.1. *1) Оператор $A : V \to V^*$ обратим, непрерывен,*

$$\|A\varphi\|_{V^*} \le \|\varphi\|_V \quad \text{для всех} \quad \varphi \in V;$$

2) для всех $\varphi \in L_2\big(0,T;V\big)$ имеем:

$$A\varphi \in L_2\big(0,T;V^*\big), \quad \|A\varphi\|_{L_2(0,T;V^*)} \le \|\varphi\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Доказательство — см. [5, лемма 2.3.1].

Лемма 6.2. *1) Оператор $(\mu_2 A + J) : V \to V^*$ обратим, непрерывен,*

$$\mu_2\|\varphi\|_V \le \big\|(\mu_2 A + J)\varphi\big\|_{V^*} \le \ell_1(\mu_2)\|\varphi\|_V;$$

$$\big\|(\mu_2 A + J)^{-1}v - (\mu_2 A + J)^{-1}w\big\|_V \le \frac{1}{\mu_2}\, \|v - w\|_{V^*}$$

для всех $\varphi \in V$, $v, w \in V^*$;

2) для всех $\varphi \in L_2\big(0,T;V\big)$ имеем: $(\mu_2 A + J)\varphi \in L_2\big(0,T;V^*\big)$,

$$\mu_2\|\varphi\|_{L_2(0,T;V)} \le \big\|(\mu_2 A + J)\varphi\big\|_{L_2(0,T;V^*)} \le \ell_1(\mu_2)\|\varphi\|_{L_2(0,T;V)};$$

соответствующий оператор обратим, причем

$$\left\|(\mu_2 A+J)^{-1}v-(\mu_2 A+J)^{-1}w\right\|_{L_2\left(0,T;V\right)}\leq\frac{1}{\mu_2}\left\|v-w\right\|_{L_2\left(0,T;V^*\right)}$$

для всех $v,w\in L_2\big(0,T;V^*\big)$.

Доказательство — см. [5, лемма 2.3.2].

Лемма 6.3. *Оператор* $N:L_2\big(0,T;V\big)\to\mathbf{C}\big(0,T;V^*\big)$ *является линейным и ограниченным,*

$$\|N\|_{L_2\to\mathbf{C}}\leq\sqrt{T}\|h\|_{L_\infty}\quad\|N\|_{L_2\to L_2}\leq T\|h\|_{L_\infty};\tag{6.8}$$

$$\left\|(N\varphi)(t)\right\|_{V^*}\leq\left\|h(.,t)\right\|_{L_\infty[0;t]}\sqrt{t}\|\varphi\|_{L_2\left(0,t;V\right)},$$

и соответственно, для $\varphi\in L_\infty(0,T;V)$ *имеем:*

$$\left\|(N\varphi)(t)\right\|_{V^*}\leq\left\|h(.,t)\right\|_{L_\infty[0;t]}t\|\varphi\|_{L_\infty\left(0,t;V\right)}.$$

Доказательство — см. [15, лемма 3.5].

Лемма 6.4. *Оператор* B *обладает свойствами:*

1) $B:L_4^n(\Omega)\to V^*$, $V\subset L_4^n(\Omega)$;

2) $B:L_\infty\big(0,T;V\big)\to L_2\big(0,T;V\big)$;

3) *для любого* $\varphi\in V$, $\|\varphi\|_V\leq M$, *имеем:*

$$\|B\varphi\|_{V^*}\leq\widetilde{\mathcal{N}}_1(M),\quad\widetilde{\mathcal{N}}_1(M)=K^2M^2,$$

где K *— константа непрерывного вложения* $V\subset L_4^n(\Omega)$;

4) *для всех* φ, $\psi\in V$, $\|\varphi\|_V$, $\|\psi\|_V\leq M$, *имеем:*

$$\|B\varphi-B\psi\|_{V^*}\leq\widetilde{\mathcal{N}}_2(M)\|\varphi-\psi\|_V,\quad\widetilde{\mathcal{N}}_2(M)=2K^2n^{3/2}M.$$

Доказательство — см. [15, лемма 3.6].

На основе лемм 6.1–6.4, как видно из построений [15, раздел 3], задача (6.7), (6.6) может быть переписана в виде:

$$\varphi'-G\varphi=\Phi(.,\varphi)+\Psi^{-1}g,\quad\varphi(0)=\varphi_0.\tag{6.9}$$

где приняты обозначения

$$\Psi = \mu_2 A + J, \quad G = -\mu_1 \Psi^{-1} A, \quad \Phi(.,\varphi) = \Psi^{-1}\big(B\varphi - N\varphi\big).$$

Задача (6.9) имеет вид (5.3). Как видно из лемм 6.3, 6.4, для любых фиксированных $\varphi \in L_\infty(0,T;V)$, $g \in L_2(0,T;V^*)$ правая часть $\psi = \Phi(.,\varphi) + \Psi^{-1}g$ принадлежит классу $L_2(0,T;V)$. Отсюда же, кстати, следует выполнение предположения $\mathbf{F}_1$) (вольтерровость оператора Φ очевидна). По поводу соотношения между слабой производной и производной в смысле распределений для случая ЛОО G — см. замечание 6.1.

Чтобы проверить выполнение условия $\mathbf{F}_2$), для произвольно выбранных $\varphi_1, \varphi_2 \in L_\infty(0,T;V)$, $\|\varphi_i\| \le \sigma$, $i = 1,2$, оценим норму:

$$\big\|\Phi(t,\varphi_1) - \Phi(t,\varphi_2)\big\|_V \le$$

$$\le \|\Psi^{-1}\| \Big[\|B\varphi_1(t) - B\varphi_2(t)\|_{V^*} + \big\|N(\varphi_1 - \varphi_2)(t)\big\|_{V^*}\Big] \le$$

$$\le \|\Psi^{-1}\| \Big\{\widetilde{\mathcal{N}}_2(\sigma)\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_V + \big\|h(.,t)\big\|_{L_\infty[0;t]} t \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_\infty\left(0,t;V\right)}\Big\} \le$$

$$\le \mathcal{N}(t,\sigma)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_\infty\left(0,t;V\right)},$$

при п.в. $t \in [0;T]$, где

$$\mathcal{N}(t,\sigma) = \|\Psi^{-1}\| \Big\{\widetilde{\mathcal{N}}_2(\sigma) + t\big\|h(.,t)\big\|_{L_\infty[0;t]}\Big\}.$$

Чтобы проверить выполнение условия $\mathbf{F}_3$), для произвольно выбранного $\varphi \in L_\infty(0,T;V)$, $\|\varphi\| \le \sigma$, оценим норму:

$$\big\|\Phi(t,\varphi)\big\|_V \le \|\Psi^{-1}\| \Big\{\|B\varphi(t)\|_{V^*} + \big\|N(\varphi)(t)\big\|_{V^*}\Big\} \le$$

$$\le \|\Psi^{-1}\| \Big\{\widetilde{\mathcal{N}}_1(\sigma) + \big\|h(.,t)\big\|_{L_\infty[0;t]} t \|\varphi\|_{L_\infty\left(0,t;V\right)}\Big\} \le \mathcal{N}_1(t,\sigma),$$

при п.в. $t \in [0;T]$, где

$$\mathcal{N}_1(t,\sigma) = \|\Psi^{-1}\| \Big\{\widetilde{\mathcal{N}}_1(\sigma) + \big\|h(.,t)\big\|_{L_\infty[0;t]} t\sigma\Big\}.$$

Учитывая полученные выражения функций $\mathcal{N}(t,\sigma)$, $\mathcal{N}_1(t,\sigma)$, для выполнения предположения $\mathbf{F}_4$) достаточно следующего условия.

H) Существуют $T_0 > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что для п.в. $t > T_0$ имеет место оценка: $t\big\|h(.,t)\big\|_{L_\infty[0;t]} \le h_0$.

И как показано в пункте 2.I и разделе 4, предположения $\mathbf{G}_1$)–$\mathbf{G}_3$) тоже выполнены при $X' = V$ (за счет ограниченности оператора G). Таким образом, применимы результаты разделов 4, 5. В частности, если считать, что $g(t) = u(t) - v(t)$, где u, v — управления первого и второго игроков, и в задаче об успокоении возмущения для управляемой задачи Коши (6.9) получено управление $w(t) = \Psi^{-1}g(t)$, то $u(t) = v(t) + \Psi w(t)$ — искомое управление первого игрока. Физический смысл задачи об успокоении возмущения здесь очевиден: при наличии внешней неконтролируемой возбуждающей силы $v(t)$ найти нейтрализующую силу $u(t)$, которая позволяет остановить течение жидкости к какому-либо моменту времени $T > 0$: $\varphi(T) = 0$.

Отметим, наконец, что точно так же можно рассмотреть аналог управляемой системы, получаемый при добавлении в правую часть оператора $g_1(.,\varphi)$ такого, что для оператора $\Phi_1(.,\varphi) = \Psi^{-1}g_1(.,\varphi)$ выполнены предположения вида $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_4$).

7. Пример: волновое уравнение

Пусть $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое ограниченное множество с границей Γ. Положим $Q = \Omega \times (0;T]$, $\Sigma = \Gamma \times (0;T]$. В качестве управляемой начально-краевой задачи рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t) : \overline{\Omega} \times [0;T] \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = g(x,t,\varphi) + W(x,t), \quad (x,t) \in Q; \tag{7.1}$$

$$\varphi\,\Big|_\Sigma = 0; \tag{7.2}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{7.3}$$

Задача (7.1)–(7.3) уже подробно анализировалась в [13]; см. также [16, sec.10.3]. Было показано, что она сводится к задаче (5.3), причем касательно оператора G имеет место ситуация, описанная в пункте 2.II, с выполнением условий $\mathbf{G}_1$) ($M = 1$), $\mathbf{G}^*$), и соответственно, $\mathbf{G}_2$) при $a = 1$. Касательно условия $\mathbf{G}_3$) см. пояснения в разделе 4. Поэтому применимы результаты, полученные в разделах 4, 5 (в случае максимального монотонного оператора $-G$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакришнан А.В. *Прикладной функциональный анализ.* М.: Наука, 1980.

2. Власенко А.А., Чикрий А.А. *Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами* // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 71–80.

3. Власенко А.А., Руткас А.Г., Чикрий А.А. *О дифференциальной игре в абстрактной параболической системе* // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 26–40.

4. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978.

5. Звягин В.Г., Турбин М.В. *Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3–144.

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984.

7. Качуровский Р.И. *Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах* // Успехи матем. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2(140). С. 121–168.

8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976.

9. Осипов Ю.С. *К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами* // ДАН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314–1317.

10. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. *Об уклонении от встречи в одном классе распределенных управляемых систем* // Матем. заметки. 2015. Т. 97. Вып. 5. С. 749–760.

11. *Функциональный анализ* / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1979.

12. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: ИЛ, 1962. 830 с.

13. Чернов А.В. *О точной управляемости полулинейного эволюционного уравнения с неограниченным оператором* // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 2. С. 257–269.

14. Чернов А.В. *О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации коэффициента уравнения глобальной электрической цепи* // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1586–1601.

15. Чернов А.В. *О тотальном сохранении глобальной разрешимости операторного дифференциального уравнения: L_2-теория* // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017). Пермь: Изд-во Пермского нац. исслед. политех. ун-та, 2018. С. 263–276.

16. Brezis H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* N.Y., Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2011.

17. Ibragimov G., Alias I.A., Waziri U., Ja'afaru A.B. *Differential game of optimal pursuit for an infinite system of differential equations* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2019. V. 2(42). № 1. P. 391–403.

18. Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* New York etc.: Springer-Verlag, 1983.

ON SOLVABILITY OF A PURSUIT GAME WITH NONLINEAR DYNAMICS IN THE HILBERT SPACE

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University, Cand.Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: We consider a pursuit differential game in the Hilbert space. The game dynamics is described by two semilinear evolutionary equations with an optionally bounded operator in the Hilbert space; and each of these equations is controlled by its own player. The controls appear linearly in right hand sides of the equations and are restricted by conditions of the norm boundedness with given constants. We establish sufficient conditions for solvability of the determined pursuit game in both linear and nonlinear cases. Here we use the Minty-Browder's theorem and also a chain technology of successive continuation of the solution to a controlled system to intermediate states. As examples of reduction to the abstract operator equation under study we consider Oskolkov's system of equations and a semilinear wave equation.

Keywords: semilinear evolutionary equation in the Hilbert space, optionally bounded operator, conditions for solvability of a pursuit game.