А. А. Адизов, Веса на йордановых банаховых алгебрах, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 2, 64–65

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 64—65

УДК 517.98

ВЕСА НА ЙОРДАНОВЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

А. А. Адизов

В работе [1] изучены свойства весов на W^*-алгебрах. В частности, дано решение проблемы, поставленной в работе [2, Chap. I, sect. 4, p. 52]: является ли всякий нормальный вес на W^*-алгебре $\mathfrak{U}$ суммой нормальных положительных функционалов на $\mathfrak{U}$.

JBW-алгебры [3; 4] являются абстрактным йордановым аналогом W^*-алгебр. В последние годы появилось много работ, в которых для JBW-алгебр доказываются аналоги различных результатов из теории W^*-алгебр. В частности, в работах [5; 6] были рассмотрены веса на JBW-алгебре с полуконечным следом и доказаны теоремы Радона — Никодима для весов относительно следа. Настоящая работа посвящена изучению свойств весов на JBW-алгебрах. Получен аналог основного результата работы [1] о характеризации нормальных весов.

Определение 1. Векторное подпространство B JBW-алгебры A называется *квадратичным идеалом*, если для любых $a \in A$, $b \in B$ имеем $U_b a \in B$, где $U_b a = 2b(ba) - b^2 a$.

Определение 2. JBW-подалгебра B JBW-алгебры A называется *наследственной*, если для $b \in B^+$ и $a \in A^+$ из $a \leqslant b$ следует $a \in B^+$.

Определение 3 [5]. *Весом* на JBW-алгебре A будем называть отображение φ: $A^+ \to [0, +\infty]$ такое, что (1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и (2) $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для a, $b \in A^+$, $\lambda \in R^+$, причем $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Вес φ называется: *вполне аддитивным*, если $\varphi(\Sigma a_i) = \Sigma\varphi(a_i)$ для произвольного семейства $\{a_i\}$ положительных элементов, для которых определено Σa_i; *нормальным*, если $\varphi(a_\alpha) \nearrow \varphi(a)$ для любой сети $\{a_\alpha\} \subset A^+$, возрастающей к $a \in A^+$; *полуконечным*, если в A^+ существует сеть $\{a_\alpha\}$, возрастающая к единице 1, такая, что $\varphi(a_\alpha) < +\infty$ для всех α.

Пусть φ — вес на JBW-алгебре A. Положим

$$A_\varphi^+ = \{a \in A^+ \colon \varphi(a) < +\infty\},$$

$$A_\varphi = A_\varphi^+ - A_\varphi^+ = \{a - b \colon a, b \in A_\varphi^+\}; \quad A_\varphi^2 = \{a \in A \colon \varphi(a^2) < +\infty\}.$$

Предложение 1. (а) A_φ — *наследственная подалгебра в* A *и* φ *единственным образом продолжается до положительного линейного функционала на* A_φ;

(б) A_φ^2 — *квадратичный идеал в* A *и для произвольных* $a \in A_\varphi^2$, $b \in A$ *имеет место* $U_a b \in A_\varphi$;

(в) A_φ — *квадратичный идеал.*

Напомним, что *сильная* (соответственно *слабая*) топология на A — это локально выпуклая топология, порожденная преднормами $\rho(a^2)^{1/2}$ (соответственно $|\rho(a)|$), когда ρ пробегает нормальные состояния на A.

Предложение 2. *Следующие условия эквивалентны*:

(а) *вес* φ *полуконечен*;

(б) A_φ *плотно в* A *в сильной топологии*;

(в) A_φ *плотно в* A *в слабой топологии.*

Теперь сформулируем одну вспомогательную теорему, которая представляет самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть* φ — *нормальный вес на* JBW-*алгебре* A; *тогда существует единственный проектор* $p \in A$ *такой, что* φ *полуконечен на* $U_p A$ *и* $\varphi(a) = +\infty$ *для произвольного* $a \in U_{1-p} A$.

Набросок доказательства. Пусть $\bar{A}_\varphi^\omega$ — слабое замыкание квадратичного идеала A_φ. В силу непрерывности умножения в сильной топологии нетрудно доказать, что $\bar{A}_\varphi^\omega$ является квадратичным идеалом. Как в доказательстве леммы 9.1 [3] построим возрастающую сеть $\{e_\alpha\} \subset A_\varphi$ такую, что $\sup e_\alpha = p \in \bar{A}_\varphi^\omega$. Теперь методом, использованным в [7, теорема 2.3], доказывается, что $\bar{A}_\varphi^\omega = U_p A$. Учитывая предложение 2, получаем утверждение теоремы.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть* φ — *вес на* JBW-*алгебре. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) φ *вполне аддитивен*;

(2) φ *нормален*;

(3) φ *слабо полунепрерывен снизу*;

(4) $\varphi(a) = \sup\{\psi(a): \psi \in F\}\ \forall a \in A^+$, *где* F — *некоторое семейство положительных нормальных функционалов*;

(5) $\varphi(a) = \sum_{i \in I} \varphi_i(a)\ \forall a \in A^+$, *где* $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ — *некоторое семейство положительных нормальных функционалов.*

Набросок доказательства. Импликации (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Для доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (5) в силу предложения 1.3 [6] достаточно рассмотреть отдельно следующие два случая:

(а) $A = L^\infty(\Omega, \mu, M)$, где μ — мера Радона на локально компактном пространстве Ω и M — либо исключительная JBW-алгебра M_3^8, либо спин-фактор [8] размерности $\geqslant 2$;

(б) A — обратимая JW-алгебра, т. е. слабо замкнутая йорданова алгебра ограниченных самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H, удовлетворяющая условию $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n + a_n \ldots a_2 \cdot a_1 \in A$ для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

В случае (а) импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказывается методом работы [1]. При доказательстве (2) $\Rightarrow$ (5), используя теорему 1, сведем задачу к исследованию полуконечных и чисто бесконечных весов, и далее, используя предложение 2.5 [6], получим требуемую импликацию.

В случае (б) вес φ продолжается до веса на обертывающую W^*-алгебру $\mathfrak{U}(A)$, т. е. наименьшую W^*-алгебру в $B(H)$, содержащую A (см. [6, теорема 2.3]). Теперь утверждение теоремы следует из работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haagerup U.* // J. Funct. Anal.— 1975.— V.19.— P. 302—317. 2. *Dixmier J.* // Les Algebras d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien. Gauthier — Villars. Paris, 1969. 3. *Alfsen E. M.*, *Shultz F. W.*, *Stormer E.* // Advances in Math.— 1978. V. 28.— P. 11—56. 4. *Shultz F. W.* // J. Funct. Anal.— 1979.— V. 31.— P. 360—376. 5. *King W. P. C.* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.— 1983. V. 93.— P. 503—509. 6. *Ajupov Sh. A.*, *Abdullaev R. Z.* // Math. Z.— 1985.— V. 188, № 4.— P. 475—484. 7. *Edwards C. M.* // J. London Math. Soc.— 1977. V. 16.— P. 507—513. 8. *Topping D.* // Mem. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 53.— P. 1.

Институт математики
им. В. И. Романовского АН УзССР

Поступило в редакцию
17 декабря 1984 г.