С. А. Айсагалиев, К теории регулируемых и фазовых систем, *Автомат. и телемех.*, 1987, выпуск 5, 29–39

# Детерминированные системы

УДК 62-501.42

## К ТЕОРИИ РЕГУЛИРУЕМЫХ И ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

АЙСАГАЛИЕВ С. А.

(Алма-Ата)

Рассматриваются вопросы приведения возмущенных траекторий фазовых координат регулируемых систем к их программным траекториям за конечное время с помощью стабилизирующих управлений. Получены алгоритмы определения стабилизирующих управлений.

### 1. Введение

В теории автоматического регулирования и теории фазовых систем рассматривается асимптотическая устойчивость в целом системы [1, 2]

(1) $\dot{x}=Ax+b\varphi(\sigma),\quad \sigma=c^*x,\quad t\geqslant 0,\quad x(0)=x_0,$

(2) $\varphi(\sigma)\in M=\{\varphi|\varphi(0)=0,\ k_1\sigma^2\leqslant\varphi(\sigma)\sigma\leqslant k_2\sigma^2\},\quad k_1,\ k_2=\mathrm{const},$

где $x$ — вектор состояния $n\times 1$, $A$ — постоянная матрица порядка $n\times n$, $b$, $c$ — векторы $n\times 1$, $\varphi(\sigma)$ — нелинейная функция. В частности, она может быть периодической по $\sigma$. Методы теории абсолютной устойчивости регулируемых и фазовых систем развиты в [3—5].

Уравнениями (1), (2) описываются возмущенные движения в системах регулирования, предназначенная для поддержания постоянного значения фазовых координат объекта.

В настоящей статье сформулирован ряд задач для управляемых систем и приведены алгоритмы стабилизации движения за конечное время. Предложенные алгоритмы стабилизации могут быть реализованы современными средствами микропроцессорной техники.

### 2. Постановка задачи

Пусть известны уравнения движения объекта и управляющей системы, а также их программная траектория. Пусть уравнения возмущенного движения замкнутой системы имеют вид

(3) $\dot{x}=A(t)x+C(t)\varphi(\sigma,\ t)+B(t)u(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,$

(4) $\sigma(t)=S(t)x(t),\quad \varphi(\sigma,\ t)=\{\varphi_1(\sigma_1,\ t),\ldots,\varphi_m(\sigma_m,\ t)\},$

(5) $\varphi_i(0,\ t)=0,\ \alpha_i\sigma_i^2\leqslant\varphi_i(\sigma_i,\ t)\sigma_i\leqslant\beta_i\sigma_i^2,\ i=1,\ i=\overline{1,\ m},\ t\in[t_0,\ t_1],$

где $A(t)$, $C(t)$, $B(t)$, $S(t)$ — матрицы с непрерывными по $t$ элементами порядков $n\times n$, $n\times m$, $n\times r$, $m\times n$ соответственно, $u(t)=\{u_1(t),\ldots,u_r(t)\}$, $t\in[t_0,\ t_1]$ — стабилизирующее управление. Представим $\varphi(\sigma,\ t)$ в виде суммы $\varphi(\sigma,t)=K\sigma+\overline{\varphi}(\sigma,t)$, где $K=\mathrm{diag}\ \{(\alpha_1+\beta_1)/2,\ldots,(\alpha_m+\beta_m)/2\}$, $\overline{\varphi}(\sigma,t)=\{\overline{\varphi}_1(\sigma_1,\ t),\ldots,\overline{\varphi}_m(\sigma_m,\ t)\}$, $|\overline{\varphi}_i(\sigma_i,\ t)\sigma_i|\leqslant[(\beta_i-\alpha_i)/2]\sigma_i^2$, $i=\overline{1,\ m}$. В частности, $\overline{\varphi}(\sigma,\ t)$ может быть периодической функцией по $\sigma$. Тогда уравнения

(3)—(5) запишутся в виде

(6) $$\dot{x}=[A(t)+C(t)KS(t)]x+C(t)\overline{\varphi}(\sigma,\ t)+B(t)u(t),\quad x(t_0)=x_0,$$

(7) $$\sigma(t)=S(t)x(t),\quad \overline{\varphi}_i(0,\ t)=0,\quad |\overline{\varphi}_i(\sigma_i,\ t)\sigma_i|\leqslant\gamma_i\sigma_i^2,\quad \gamma_i=(\beta_i-\alpha_i)/2.$$

*Задача 1.* Найти управления $u(t)\in C[t_0,\ t_1]$, которые переводят траекторию систем (6), (7) из начального состояния $x(t_0)=x_0$ в заданное $x_1=x(t_1)$, за конечное время $t_1-t_0$ при всех разбросах характеристики нелинейных элементов, удовлетворяющих условиям (7).

Пусть функции $\varphi_i(\sigma_i,t)$, $i=\overline{1,\ m}$ равны

$$\varphi_i(\sigma_i,t)=\sum_{k=1}^{s} d_{ki}(t)\sigma_i^k,\qquad i=\overline{1,m},$$

где $\sigma_i=s_i^*x$, $i=\overline{1,m}$, $s_i^*=s_i^*(t)$ — $i$-строка матрицы $S(t)$. Тогда вектор-функцию $\varphi(\sigma,\ t)$ можно представить в виде

$$\varphi(\sigma,t)=D_1(t)S(t)x+P(x,t),$$

где матрица $D_1(t)=\mathrm{diag}\,\{d_{11}(t),\ldots,d_{1m}(t)\}$, вектор $P(x,\ t)=(P_1(x,\ t),\ldots$ $\ldots,P_m(x,\ t))$, $P_i(x,t)=\sum_{k=2}^{s} d_{ki}(t)\,(s_i^*(t)x)^k$, $i=\overline{1,m}$. В этом случае уравнения (3)—(5) приводятся к виду

(8) $$\dot{x}=[A(t)+C(t)D_1(t)S(t)]x+C(t)P(x,\ t)+B(t)u,$$
$$x(t_0)=x_0,\ t\in[t_0,\ t_1].$$

*Задача 2.* Найти управления $u(t)\in C[t_0,\ t_1]$, которые переводят траекторию системы (8) из начального состояния $x_0=x(t_0)$ в заданное $x_1=x(t_1)$ за конечное время $t_1-t_0$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

(9) $$\dot{x}=A(t)x+C(t)\varphi(u,\ t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\in[t_0,\ t_1],$$

(10) $$|\varphi_i(u_i,\ t)u_i|\leqslant\gamma_i u_i^2,\quad i=\overline{1,\ m},\quad \gamma_i=\mathrm{const}>0.$$

*Задача 3.* Найти управления $u(t)\in C[t_0,t_1]$, которые переводят траекторию системы (9), (10) из начального состояния $x_0=x(t_0)$ в заданное $x_1=x(t_1)$ за конечное время $t_1-t_0$.

## 3. Интегральные уравнения

Рассмотрим уравнения (6), (7). Пусть $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы: $\dot{x}=\bar{A}(t)x$, $\bar{A}(t)=A(t)+C(t)KS(t)$, а $\Phi(t,\ \tau)=\theta(t)\theta^{-1}(\tau)$.

*Лемма 1.* Если линейная система $\dot{y}=\bar{A}(t)y+B(t)v(t)$, $t\in[t_0,\ t_1]$ вполне управляема, то управление $u(t)\in C[t_0,\ t_1]$, являющееся решением интегральных уравнений

(11) $$u(t)=v^0(t)+S_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(\sigma,\tau)\,d\tau,\qquad \sigma=S(t)x.$$

$$x(t)=y^0(t)+S_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\bar{\varphi}(\sigma,\tau)\,d\tau+ \tag{12}$$

$$+S_3(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\bar{\varphi}(\sigma,\tau)\,d\tau,$$

переводит траекторию систем (6), (7) из начального состояния $x_0=x(t_0)$ в состояние $x_1=x(t_1)$. Здесь

$$u^0(t)=B^*(t)\Phi^*(t_0,\ t)W^{-1}(t_0,\ t_1)\,[\Phi(t_0,\ t_1)x_1-x_0]+w(t),\quad t\in[t_0,\ t_1], \tag{13}$$

$$y^0(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)v^0(\tau)\,d\tau,\qquad t\in[t_0,t_1], \tag{14}$$

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)\,d\tau, \tag{15}$$

$$S_1(t)=-B^*(t)\Phi^*(t_0,\ t)W^{-1}(t_0,\ t_1),\qquad S_2(t)=-\Phi(t,\ t_0)W(t_0,\ t)\times \tag{16}$$
$$\times W^{-1}(t_0,t_1),\quad S_3(t)=\Phi(t,t_0),$$

а $w(t)\in C[t_0,\ t_1]$ — произвольная $r$-вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)w(\tau)\,d\tau=0. \tag{17}$$

Аналогичным путем дифференциальное уравнение (8) может быть сведено к интегральным уравнениям:

$$u(t)=\bar{v}^0(t)+\bar{S}_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\bar{\Phi}(t_0,\tau)C(\tau)P(x(\tau),\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

$$x(t)=\bar{y}^0(t)+\bar{S}_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\bar{\Phi}(t_0,\tau)C(\tau)P(x(\tau),\tau)\,d\tau+ \tag{19}$$

$$+\bar{S}_3(t)\int_{t_0}^{t}\bar{\Phi}(t_0,\tau)C(\tau)P(x(\tau),\tau)\,d\tau.$$

Векторы $\bar{v}^0(t)$, $\bar{y}^0(t)$, $\bar{w}(t)$, $t\in[t_0,\ t_1]$ и матрицы $\bar{S}_i(t)$, $i=1,\ 2,\ 3$, $\bar{W}(t_0,\ t_1)$ определяются выражениями (13)—(17) путем замены $\Phi(t,\ \tau)$ на $\bar{\Phi}(t,\ \tau)$.

Рассмотрим уравнения (9), (10) для следующих случаев:

1°. Пусть $\varphi(u,\ t)=Ku+\bar{\varphi}(u,\ t)$, $|\bar{\varphi}_i(u_i,\ t)u_i|\leqslant\gamma_i u_i^2$, $i=\overline{1,\ m}$.

2°. Пусть $\varphi(u,\ t)=D_1(t)u+P(u(t),\ t)$.

Для первого случая уравнения (9), (10) запишутся в виде

$$\dot{x}=A(t)x+C(t)Ku+C(t)\bar{\varphi}(u,\ t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\in[t_0,\ t_1], \tag{20}$$

$$|\bar{\varphi}_i(u_i,\ t)u_i|\leqslant\gamma_i u_i^2,\quad t\in[t_0,\ t_1],\quad \gamma_i=\text{const}>0,\quad i=\overline{1,\ m}. \tag{21}$$

Для второго случая (9), (10) имеют вид

(22) $$\dot{x}=A(t)x+C(t)D_1(t)u+C(t)P(u,t), \quad x(t_0)=x_0, \quad t\in[t_0,t_1].$$

Для системы (20), (21) соответствующие интегральные уравнения будут:

(23) $$u(t)=v_1^0(t)+\bar{\bar{S}}_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)\bar{\varphi}(u(\tau),\tau)\,d\tau, \qquad t\in[t_0,t_1],$$

(24) $$x(t)=y_1^0(t)+\bar{\bar{S}}_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)\bar{\varphi}(u,\tau)\,d\tau+$$
$$+\bar{\bar{S}}_3(t)\int_{t_0}^{t}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)\bar{\varphi}(u,\tau)\,d\tau.$$

Аналогично для системы (22) получим:

(25) $$u(t)=v_2^0(t)+\tilde{S}_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)P(u(\tau),\tau)\,d\tau,$$

(26) $$x(t)=y_2^0(t)+\tilde{S}_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)P(u(\tau),\tau)\,d\tau+$$
$$+\tilde{S}_3(t)\int_{t_0}^{t}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)P(u(\tau),\tau)\,d\tau.$$

## 4. Решение интегральных уравнений

Рассмотрим интегральные уравнения (11), (12). Обозначим евклидову норму вектора $z=(z_1,\ldots,z_m)$ и норму матрицы $A(t)=\{a_{ij}(t)\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$: $|z|=\sqrt{(z,z)_{E_m}}$ и $\|A(t)\|=\sup|A(t)z|$ при $|z|\leqslant 1$. Вводя вектор-функцию $f(\sigma,t)=\Phi(t_0,t)C(t)\varphi(\sigma,t)$, $\sigma=S(t)x$, запишем интегральные уравнения (11), (12):

(27) $$u(t)=v^0(t)+S_1(t)\int_{t_0}^{t_1}f(\sigma,t)\,dt, \qquad t\in[t_0,t_1],$$

(28) $$x(t)=y^0(t)+S_2(t)\int_{t_0}^{t_1}f(\sigma,t)\,dt+S_3(t)\int_{t_0}^{t}f(\sigma(\tau),\tau)\,d\tau,$$
$$t\in[t_0,t_1].$$

*Лемма 2.* Пусть выполнены условия леммы 1. Если имеет место неравенство

(29) $$\alpha\gamma(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)(t_1-t_0)<1,$$

то существуют постоянные $c_1$, $c_2=\mathrm{const}>0$, такие, что решения интегральных уравнений (27), (28) удовлетворяют условиям

(30) $$\|x\|_c\leqslant c_1, \quad \|u\|_c\leqslant c_2,$$

где $\alpha = \max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1} \|\Phi(t_0,t)C(t)\|\,\|S(t)\|, \qquad \gamma = \max(\gamma_1,\ldots,\gamma_m),$

$$\|S_2\|_c = \max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\|S_2(t)\|, \qquad \|S_3\|_c = \max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\|S_3(t)\|,$$

$$c_1 = \|y^0\|_c/[1-\alpha\gamma(t_1-t_0)(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)], \quad c_2 = |v^0\|_c+$$

$$+\|S_1\|_c\alpha\gamma c_1(t_1-t_0),$$

$$\|y^0\|_c = \max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|y^0(t)|, \qquad \|v^0\|_c = \max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\|v^0(t)|.$$

Пусть $g(t)=y^0(t)+S_2(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} f(\sigma,t)\,dt+S_3(t)\int\limits_{t_0}^{t} f(\sigma(\tau),\tau)\,d\tau$. Тогда интегральное уравнение (28) можно записать в виде

(31) $\qquad g(t)=Wx(t).$

Нетрудно показать, что если вектор-функция $\varphi(\sigma,\ t)$ непрерывна, то оператор $W$ отображает $C[t_0,\ t_1]$ в себя [6].

*Теорема 1.* Пусть выполнены все условия лемм 1, 2 и, кроме того, функция $f(\sigma,\ t)$ удовлетворяет условию Липшица в области $G=\{(\sigma,\ t)/|\sigma|\leqslant \leqslant\|S\|_c c_1,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1\}$ по переменной $\sigma$ при любых $\varphi(\sigma,\ t)$, удовлетворяющих условиям (7), т. е.

(32) $\qquad |f(\sigma^1,\ t)-f(\sigma^2,\ t)|\leqslant L|\sigma^1-\sigma^2|, \quad L=\text{const}>0.$

Тогда для того, чтобы $W$ был оператором сжатия, достаточно, чтобы

(33) $\qquad L\|S\|_c(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)(t_1-t_0)<1.$

Итак, если

(34) $$t_1-t_0<\min\left(\frac{1}{\alpha\gamma(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)},\frac{1}{L\|S\|_c(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)}\right),$$

то интегральное уравнение (28) имеет единственное решение. Это решение

$x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$, где $x_{n+1}(t)=y^0(t)+S_2(t)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)C(t)\varphi(S(t)x_n(t),t)\,dt+$

$+S_3(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\varphi(S(\tau)x_n(\tau),\tau)\,d\tau$. По известной $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$ легко определить $u(t)$ по выражению (27).

Рассмотрим интегральные уравнения (18), (19). Пусть $x(t)=\varepsilon\bar{x}(t)$, $u(t)=\varepsilon\bar{u}(t)$, $\bar{v}^0(t)=\varepsilon\tilde{v}^0(t)$, $\bar{y}^0(t)=\varepsilon\tilde{y}^0(t)$, где $\varepsilon>0$ — малый параметр. Тогда интегральные уравнения (18), (19) запишутся в виде

(35) $$\bar{u}(t)=\tilde{v}^0(t)+\varepsilon\bar{S}_1(t)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)P(\tau,\bar{x}(\tau),\varepsilon)\,d\tau, \quad t\in[t_0,t_1],$$

(36) $$\bar{x}(t)=\tilde{y}^0(t)+\varepsilon\bar{S}_2(t)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)P(\tau,\bar{x}(\tau),\varepsilon)\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\bar{S}_3(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)P(\tau,\bar{x}(\tau),\varepsilon)\,d\tau,$$

где $P(\varepsilon\bar{x}(\tau),\tau)=\varepsilon^2 P(\tau,\bar{x}(\tau),\varepsilon)$. Пусть

$$g(t)=W_1\bar{x}(t)=\tilde{y}^0(t)+\varepsilon\bar{S}_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)P(\tau,\bar{x}(\tau),\varepsilon)\,d\tau+ \tag{37}$$

$$+\varepsilon\bar{S}_3(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)P(\tau,\bar{x}(\tau),\varepsilon)\,d\tau.$$

*Теорема 2.* Пусть существует число $\varepsilon_0>0$, такое, что неравенство

$$\|\bar{x}\|_c\leqslant\|\tilde{y}^0\|_c+\alpha_1(t_1-t_0)\sum_{k=2}^{s}\varepsilon^{k-1}\|\bar{x}\|_c^k,\qquad 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

выполняется при $\|\bar{x}\|_c\leqslant c_3$, $c_3=\mathrm{const}>0$, где $\alpha_1=\|\Phi(t_0,t)C(t)\|_c(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)$, $\beta_k=\|\bar{D}_k\|\sqrt{\|s_1\|_c^{2k}+\ldots+\|s_m\|_c^{2k}}$, $\|\bar{D}_k\|=\sup\limits_{\varphi}\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|\bar{d}_k(t)|$, $k=\overline{2,s}$, $\bar{d}_k(t)=(d_{k1}(t),\ldots,d_{km}(t))$, $\|s_j\|_c=\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|s_j(t)|$, $j=\overline{1,m}$.

Тогда оператор $W_1$ из (37) отображает $C[t_0,t_1]$ в себя. Если, кроме того, имеет место неравенство

$$\alpha_1(t_1-t_0)\sum_{k=2}^{s}\varepsilon^{k-1}\|\bar{D}_k\|\sqrt{k\sum_{j=1}^{m}(\|s_j\|_c^k c_3^{k-1})^2}<1,$$

то $W_1$ из (37) является оператором сжатия.

Рассмотрим интегральное уравнение (23). Пусть

$$g(t)=W_2u=v_1^0(t)+\bar{\bar{S}}_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)\varphi(u(\tau),\tau)\,d\tau,\quad t\in[t_0,t_1].$$

*Теорема 3.* Пусть выполнено неравенство

$$\alpha_2\gamma(t_1-t_0)<1,$$

где $\alpha_2=\|\bar{\bar{S}}_1\|_c\|\Phi_1(t_0,t)C(t)\|_c$, $\gamma=\max(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$. Тогда

$$\|u\|_c\leqslant c_4,\quad \|x\|_c\leqslant c_5,$$

где $c_4=\|v_1^0\|_c/[1-\alpha_2\gamma(t_1-t_0)]$, $c_5=\|y_1^0\|_c+\|\Phi(t_0,t)C(t)\|_c(\|\bar{\bar{S}}_2\|_c+\|\bar{\bar{S}}_3\|_c)\gamma c_4\times\times(t_1-t_0)$.

Тогда оператор $W_2$ отображает $C[t_0,t_1]$ в себя.

Если, кроме того, выполняются условия

$$|\varphi(u^1,t)-\varphi(u^2,t)|\leqslant L_1|u^1-u^2|,\quad L_1\alpha_2(t_1-t_0)<1,$$

то $W_2$ является оператором сжатия.

Наконец, рассмотрим интегральное уравнение (35). Пусть

$$g(t)=W_3\tilde{u}=\tilde{v}_2^0(t)+\varepsilon\tilde{S}_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)P(\tilde{u}(\tau),\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

где $u(\tau)=\varepsilon\tilde{u}(\tau)$, $v_2^0(\tau)=\varepsilon\tilde{v}_2^0(\tau)$, $\varepsilon>0$ — малый параметр.

*Теорема 4.* Пусть существует число $\varepsilon_1>0$, такое, что неравенство $\|\tilde{u}\|_c\leqslant\|\tilde{v}_2^0\|_c+\alpha_3(t_1-t_0)\sum_{k=2}^{s}\varepsilon^{k-1}\beta_k\|\tilde{u}^{(k)}\|_c^k$, $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ выполняется при $\|\tilde{u}\|_c\leqslant c_6$, $c_6=\mathrm{const}>0$, где $\alpha_3=\|\Phi_1(t_0,t)C(t)\|_c\|S_1\|_c$, $\tilde{u}^{(k)}=(u_1^k,\ldots,u_r^k)$, $\beta_k=\sup\limits_{\varphi}\times$ $\times\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|\bar{d}_k(t)|$, $\bar{d}_k(t)=(d_{k1}(t),\ldots,d_{km}(t))$. Тогда оператор $W_3$ отображает $C[t_0,t_1]$ в себя.

Если, кроме того, имеет место неравенство

$$\alpha_3(t_1-t_0)\sum_{k=2}^{s}\varepsilon^{k-1}\beta_k\sqrt{kc_6^{k-1}}<1,$$

то $W_3$ является оператором сжатия.

Доказательства теорем 2, 3, 4 аналогичны доказательству теоремы 1.

*Пример 1.* Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}=ax+c\varphi(\sigma,\ t)+bu(t),\quad \sigma=sx,\quad x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1, \tag{38}$$

где $a$, $c$, $b$, $s$ — некоторые числа, функция $\varphi(\sigma,t)$ — непрерывная по $\sigma$, $t$ и удовлетворяет условиям $\alpha\sigma^2\leqslant\varphi(\sigma,\ t)\sigma\leqslant\beta\sigma^2$, $\alpha$, $\beta=\mathrm{const}$.

Уравнение (38) можно привести к виду

$$\dot{x}=(a+k_0)x+c\bar{\varphi}(\sigma,\ t)+bu(t),\quad |\bar{\varphi}(\sigma,\ t)\sigma|\leqslant\gamma\sigma^2,\quad \sigma=sx, \tag{39}$$

где $k_0=cks$, $k=(\alpha+\beta)/2$, $\gamma=(\beta-\alpha)/2>0$. В данном случае

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}b^2e^{2a(t_0-\tau)}\,d\tau=\frac{b^2}{2(a+k_0)}\left[1-e^{-2(a+k_0)(t_1-t_0)}\right],$$

$$v^0(t)=\frac{2(a+k_0)e^{(a+k_0)(t_0-t)}}{b\left[1-e^{-2(a+k_0)(t_1-t_0)}\right]}\left[e^{(a+k_0)(t_1-t_0)}x_1-x_0\right]+w(t),$$

$$y^0(t)=e^{(a+k_0)(t-t_0)}x_0+\frac{1-e^{-2(a+k_0)(t-t_0)}}{1-e^{-2(a+k_0)(t_1-t_0)}}e^{(a+k_0)(t-t_0)}\left[e^{(a+k_0)(t_1-t_0)}x_1-x_0\right],$$

$$S_1(t)=-\frac{2(a+k_0)e^{-(a+k_0)(t-t_0)}}{b\left[1-e^{-2(a+k_0)(t_1-t_0)}\right]},$$

$$S_2(t)=-\frac{e^{(a+k_0)(t-t_0)}\left[1-e^{-2(a+k_0)(t-t_0)}\right]}{1-e^{-2(a+k_0)(t_1-t_0)}},\qquad S_3(t)=e^{(a+k_0)(t-t_0)}.$$

Функция $w(t)$, $t\in[t_0,\ t_1]$ определяется из условия $\int_{t_0}^{t_1}be^{(a+k_0)(t_0-\tau)}\times$ $\times w(\tau)d\tau=0$. В частности,

$$w(t)=c_1e^{(a+k_0)t}\sin\lambda t,\quad \lambda=(t_1-t_0)/2k\pi,\quad k=\pm1,\ \pm2,\ldots,$$

где $c_1=\mathrm{const}$ — произвольное число.

Легко убедиться, что при $a+k_0>0$ нормы определяются формулами

$$\|S\|_c=\frac{2(a+k_0)}{|b|\left[1-e^{-2(a+k_0)(t_1-t_0)}\right]},\qquad \|S_2\|_c=\|S_3\|_c=e^{(a+k_0)(t_1-t_0)},$$

$$\|s\|_c=|s|.$$

Тогда неравенство (29) запишется в виде

$$(40)\qquad 2|c|\,|s|\gamma e^{(a+k_0)(t_1-t_0)}(t_1-t_0)<1.$$

Пусть $\overline{\varphi}(\sigma, t)=\gamma\sin\omega t\cos\sigma$, где $\omega=\omega(t)$ — непрерывная функция. Тогда $|\overline{\varphi}(\sigma_1, t)-\overline{\varphi}(\sigma_2, t)\leqslant\gamma|\sigma_1-\sigma_2|$. Функция $f(\sigma, t)=\exp[(a+k_0)(t_0-t)]\times\times c\overline{\varphi}(\sigma, t)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(\sigma_1, t)-f(\sigma_2, t)|\leqslant|c|\gamma|\sigma_1-\sigma_2|$, т. е. $L=|c|\gamma$. Нетрудно показать, что неравенство (33) приводится к неравенству (40). Итак, если

$$t_1-t_0<\exp[-(a+k_0)(t_1-t_0)]/2|c|\,|s|\gamma,$$

то оператор $W$ из (31) будет оператором сжатия.

Выше были рассмотрены решения интегральных уравнений методом сжатых отображений. В ряде случаев удается определить решение интегральных уравнений в виде суммы двух управлений: управления, решающего поставленную задачу для линейной системы, и корректирующего управления с неопределенными коэффициентами, причем эти коэффициенты определяются из решения конечного числа алгебраических уравнений.

Рассмотрим уравнения (14), (15) при предположении $u=\sigma=S(t)x$, где $S(t)$ — неизвестная матрица порядка $m\times n$. Справедлива следующая лемма.

*Лемма 3.* Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть $n$-вектор $q_*$ является решением системы алгебраических уравнений

$$(41)\qquad q=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(v^0(\tau)+S_1(\tau)q,\tau)\,d\tau.$$

Тогда искомое управление

$$(42)\qquad u(t)=v^0(t)+S_1(t)q_*,\quad t\in[t_0, t_1],$$

а матрица $S(t)$ определяется из условия

$$(43)\qquad v^0(t)+S_1(t)q_*=S(t)\Big[y^0(t)+S_2(t)q_*+ +S_3(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(v^0(\tau)+S_1(\tau)q_*,\tau)\,d\tau\Big].$$

Доказательство леммы приведено в приложении. Аналогичным путем могут быть доказаны следующие леммы.

*Лемма 4.* Пусть $n$-вектор $q_{**}$ является решением системы нелинейных алгебраических уравнений

$$q=\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(v_1{}^0(\tau)+\overline{\overline{S}}_1(\tau)q,\tau)\,d\tau.$$

Тогда искомое управление для системы (20), (21) определяется выражением

$$(44)\qquad u(t)=v_1{}^0(t)+\overline{\overline{S}}_1(t)q_{**},\quad t\in[t_0, t_1].$$

*Лемма 5.* Пусть $n$-вектор $q_{***}$ является решением системы нелинейных алгебраических уравнений

$$q=\int_{t_0}^{t_1}\Phi_1(t_0,\tau)C(\tau)P(v_2{}^0(\tau)+\tilde{S}_1(\tau)q,\tau)\,d\tau.$$

Тогда искомое управление для системы (22) определяется выражением

$$u(t)=v_2{}^0(t)+\tilde{S}_1(t)q_{***},\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{45}$$

Из формул (42), (44), (45) следует, что искомое управление является суммой двух управлений, однако решение систем нелинейных алгебраических уравнений в общем случае довольно сложная задача.

*Пример 2.* Рассмотрим уравнение (38) для значений: $a=-1$, $c=-2$, $b=1$, $t_0=0$, $t_1=1$, $x_1=0$, $x_0=1$; $s=s(t)$ – неизвестная функция, $u=\sigma=s(t)x$, $\overline{\varphi}(\sigma,t)=\sin\sigma$. При указанных значениях параметров систем имеем: $W(0,1)=0{,}5(e^2-1)$, $v^0(t)=2e^t/(1-e^2)$, $y^0(t)=e^{-t}[1-(1-e^{2t})/(1-e^2)]$, $S_1(t)=2e^t/(1-e^2)$, $S_2(t)=e^{-t}(e^{2t}-1)/(1-e^2)$, $S_3(t)=e^{-t}$, а уравнение (41) запишется в виде

$$q=-2\int_0^1 e^{-t}\sin[2(q+1)e^t/(1-e^2)]\,dt.$$

Данное алгебраическое уравнение имеет решение $q_*=2{,}1$. Тогда

$$u(t)=6{,}2e^t/(1-e^2),\qquad S(t)=4e^{2t}/(1-e^2)\left[1-2\int_0^t e^{-\tau}\times\right.$$

$$\left.\times\sin(6{,}2e^\tau/(1-e^2))\,d\tau\right].$$

## 5. Заключение

В статье рассмотрены вопросы приведения возмущенных траекторий фазовых координат регулируемых систем к их программным траекториям за конечное время с помощью стабилизирующих управлений. Получены алгоритмы определения стабилизирующих управлений методом сжатых отображений и алгебраических уравнений. Предложенные алгоритмы могут быть реализованы современными средствами микропроцессорной техники.

Эти результаты могут быть полезными для определения множества допустимых пар $(x,u)$ в задачах оптимального управления [7]. Полученные результаты были применены для стабилизации движения роботов и электроэнергетических систем.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Из вполне управляемости линейной системы $\dot{y}=\bar{A}(t)y+$ $+B(t)v(t)$ следует, что матрица, определяемая по формуле (15) $W(t_0,t_1)$ – положительно определенная [8], т. е. существует $W^{-1}(t_0,t_1)$. Решение дифференциального уравнения (6), соответствующее моменту времени $t=t_1$ $(x(t_1)=x_1)$, имеет вид

$$\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(\sigma,\tau)\,d\tau. \tag{П.1}$$

Искомое управление $u(t)\in C[t_0,t_1]$ будем искать в виде [9]

(П.2) $$u(t)=B^*(t)\,\Phi^*(t_0,t)x_*+w(t),\qquad t\in[t_0,t_1],$$

где $w(t)\in C[t_0,t_1]$ удовлетворяет условию (17), $x_*$ – неизвестный $n$-вектор. Подставляя значение $u(t)$ из (П.2) в (П.1) и решая относительно $x_*$, получим

(П.3) $$x_*=W^{-1}(t_0,t_1)\left[\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(\sigma,\tau)\,d\tau\right].$$

Из выражения (П.2) с учетом равенства (П.3) и обозначений (13), (16) получим интегральное уравнение (11).

Решение дифференциального уравнения (6) имеет вид

(П.4) $$x(t)=\Phi(t_0,t)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(\sigma,\tau)\,d\tau.$$

Подставляя вместо $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ выражения в правой части интегрального уравнения (11) из равенства (П.4) с учетом обозначений (14), (16), получим интегральное уравнение (12).

Из (13), (14), (17) находим $y^0(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)[\Phi(t_0,t_1)x_1-$ $-x_0]$, $t\in[t_0,t_1]$. Отсюда имеем $y^0(t_0)=x_0$, $y^0(t_1)=x_1$. Тогда из интегрального уравнения (12) при $t=t_1$ следует $x(t_1)=y^0(t_1)=x_1$, так как $S_2(t_1)=-S_3(t_1)$. Лемма доказана.

*Доказательство леммы 2.* Так как $|f(\sigma,t)|\leqslant\|\Phi(t_0,t)C(t)\|\,|\varphi(\sigma,t)|$, то с учетом (15) имеем $|f(\sigma,t)|\leqslant\alpha\gamma|x|$. Тогда из интегральных уравнений (27), (28)

(П.5) $$\|u\|_c\leqslant\|v^0\|_c+\|S_1\|_c\alpha\gamma\int_{t_0}^{t_1}|x(\tau)|\,d\tau,$$

(П.6) $$\|x\|_c\leqslant\|y^0\|_c+\alpha\gamma(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)\|x\|_c(t_1-t_0).$$

Из неравенств (П.5), (П.6) при выполнении условия (29) получим оценки (30). Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 1.* Из выполнения условия лемм 1, 5 следует, что оператор $W$ действует из $C[t_0,t_1]$ в $C[t_0,t_1]$. Пусть $x^1(t)$, $x^2(t)\in C[t_0,t_1]$, $\sigma^1=S(t)x^1(t)$, $\sigma^2=S(t)x^2(t)$. Тогда $\bar g(t)=Wx^1(t)$, $\bar{\bar g}(t)=Wx^2(t)$ и при выполнении неравенства (32) справедливы следующие оценки:

$$|\bar g(t)-\bar{\bar g}(t)|\leqslant\|S_2(t)\|\int_{t_0}^{t_1}|f(\sigma^1,t)-f(\sigma^2,t)|\,dt+$$

$$+\|S_3(t)\|\int_{t_0}^{t_1}|f(\sigma^1,t)-f(\sigma^2,t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant L(\|S_2(t)\|+\|S_3(t)\|\int_{t_0}^{t_1}|\sigma^1(t,x^1)-\sigma^2(t,x^2)|\,dt,$$

(П.7) $$\|\bar g(t)-\bar{\bar g}(t)\|_c\leqslant L(\|S_2\|_c+\|S_3\|_c)\|S\|_c(t_1-t_0)\|x^1-x^2\|_c.$$

Из неравенства (П.7) заключаем, что оператор $W$ будет оператором сжатия при выполнении условия (33). Теорема доказана.

*Доказательство леммы 3.* При выполнении условия леммы 1 исходная задача сводится к решению интегральных уравнений (11), (12). Далее, если $u=\sigma$, то уравнение (11) решается независимо от уравнения (12). Введем вектор $q=$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)C(\tau)\overline{\varphi}(u(\tau),\tau)\,d\tau.$$ Тогда уравнение (11) имеет вид $u(t)=v^0(t)+S_1(t)q$, $t\in[t_0,t_1]$. Подставляя $u(t)$ в правую часть, получим систему нелинейных алгебраических уравнений (41). Если $q=q_*$ – решение системы (41), то искомое управление $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ определяется по формуле (42). Подставляя найденное значение $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ в интегральное уравнение (12), определим $x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$. Далее из условия $u(t)=\sigma(t)=S(t)x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ получим (43) для определения $S(t)$, $t\in[t_0,t_1]$. Лемма доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951.
2. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
3. *Леонов Г. А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сиб. мат. журн. 1976. № 1. Т. XVII. С. 320–331.
4. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления//Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 2. С. 384–420.
5. *Воронов А. А.* Системы с дифференцируемой неубывающей нелинейностью, абсолютно устойчивые в гурвицевом угле // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 1. С. 38–41.
6. *Айсагалиев С. А., Онайбаев К. О., Мазаков Т. Ж.* Управляемость нелинейных систем управления // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1985. № 1. С. 83–87.
7. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
8. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления. // Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 521–547.
9. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Наука. 1982.



Поступила в редакцию
28.IV.1986


## ON THE THEORY OF CONTROLLABLE AND PHASE SYSTEMS


AISAGALIEV S. A.



Perturbed paths of phase coordinates of control systems are reduced to their programmed paths within finite time by using stabilizing controls. Algorithms are obtained for determining the stabilizing controls.