

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Абрамов, А. В. Бутковский, Эффекты немонотонности потока энергии и нормального импульса в переходном режиме в задаче Куэтта при больших числах Маха, *ТВТ*, 2010, том 48, выпуск 2, 274–278

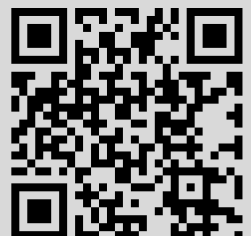
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

18 февраля 2025 г., 21:55:59



УДК 533. 6.011.8

## ЭФФЕКТЫ НЕМОНОТОННОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ И НОРМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАХА

© 2010 г. А. А. Абрамов, А. В. Бутковский

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, г. Жуковский

Поступила в редакцию 31.12.2008 г.

На основе численного решения уравнения Больцмана исследовано течение Куэтта в широком диапазоне чисел Кнудсена и скоростей верхней пластины. Рассмотрены зависимости потока энергии на нижнюю пластину, напряжения трения нижней пластины и потока нормального импульса, передаваемого нижней пластине от числа Кнудсена. Показано, что эффект немонотонности при больших числах Маха имеет место не только для напряжения трения, но и для потока энергии и потока нормального импульса.

### ВВЕДЕНИЕ

На задаче Куэтта о течении и теплопередаче между параллельными бесконечными пластинами, движущимися друг относительно друга, опробованы почти все известные методы решения уравнения Больцмана. При этом задача представляет и самостоятельный интерес, так как позволяет прояснить характер течения вблизи поверхностей тел, обтекаемых разреженным газом. Результаты исследования течения Куэтта представлены в [1, 2]. Эти результаты относятся как к свободномолекулярному, так и к переходному режимам течения. Наиболее интересный результат – немонотонность напряжения трения при больших числах Маха, найденная в [2] путем решения модельного уравнения.

Однако подробный анализ влияния числа Маха на параметры течения при различных числах Кнудсена в [1, 2] не проводился. Такой анализ является целью данной работы.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования возникающего в задаче Куэтта стационарного течения необходимо решить уравнение Больцмана

$$\xi \frac{df}{dx} = J(f, f) \quad (1)$$

с граничными условиями для функции распределения молекул на нижней и верхней пластинах. Предполагается, что отражение молекул от верхней и нижней пластин происходит диф-

фузно с температурой, равной температуре поверхности:

$$f = n_{r1}(2\pi RT_1)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_1}\right], \quad (2)$$

$$\xi > 0, \quad x = 0;$$

$$f = n_{r2}(2\pi RT_2)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + (\eta - U_2)^2 + \zeta^2}{2RT_2}\right], \quad (3)$$

$$\xi < 0, \quad x = 0.$$

Здесь  $J(f, f)$  – интеграл столкновений молекул [1];  $\xi, \eta, \zeta$  – декартовы компоненты скорости молекул, причем  $\xi$  направлена перпендикулярно граничным поверхностям; поперечная координата  $x$  нормирована на расстояние между пластинами  $L$ ;  $T_1, T_2$  – температуры нижней и верхней пластин;  $n_{r1}$  и  $n_{r2}$  – параметры функции распределения, соответствующие отраженным молекулам и определяемые из условия баланса падающих и отраженных молекул;  $U_2$  – скорость движения верхней пластины;  $R$  – газовая постоянная;  $k$  – постоянная Больцмана;  $m$  – масса молекулы.

Для решения задачи (1)–(3) необходимо задать среднюю плотность газа между пластинами  $n_{cp}$  и закон взаимодействия молекул при столкновении друг с другом.

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи методом прямого статистического моделирования, так же как и в [3], применялась процедура установления с некоторым достаточно малым шагом по времени  $\Delta t$ . При этом

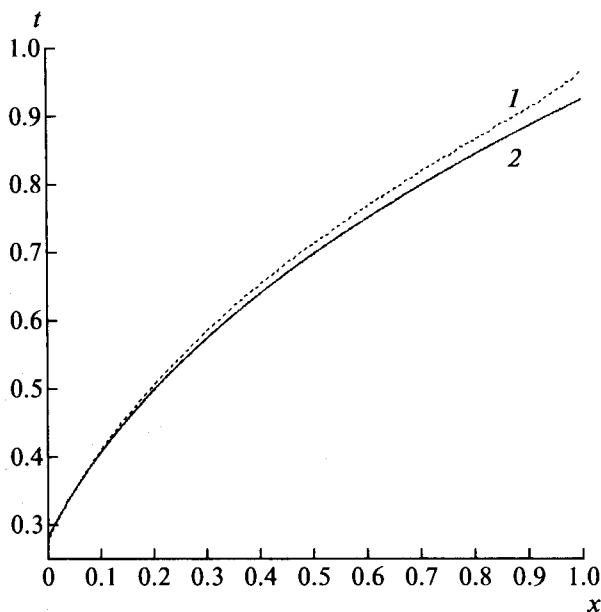


Рис. 1. Распределение температуры между пластинами в течении Куэтта при  $\text{Kn} = 0.02$ ,  $M = 0.548$ ,  $T_1/T_2 = 0.25$ : 1 – прямое статистическое моделирование, 2 – решение краевой задачи для уравнений Навье–Стокса со скольжением.

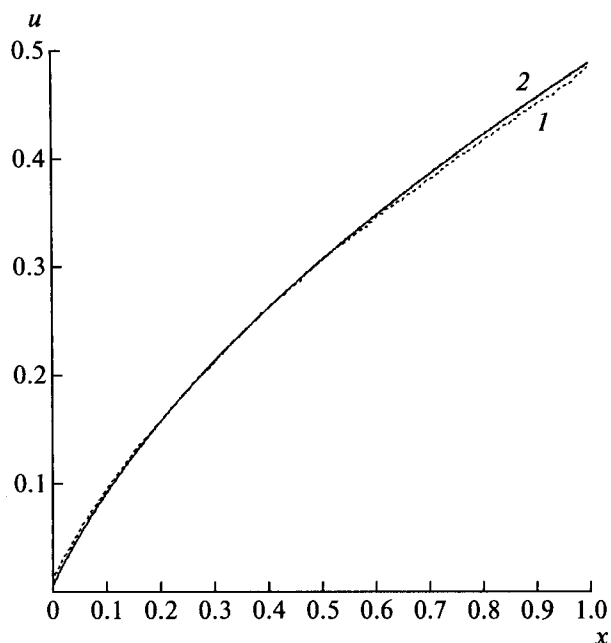


Рис. 2. Распределение среднemasовой скорости между пластинами в течении Куэтта, обозначения см. рис. 1.

пространство между плоскостями, ограничивающими течение, разбивалось на ячейки размером, меньшим длины свободного пробега молекул. Внутри ячеек плотность, скорость и температура газа считались постоянными. В ячейки помещались моделирующие течение молекулы. Эволюция системы частиц на временном интервале  $\Delta t$ , меньшем среднего времени между столкновениями молекул, распадалась на два этапа: 1) свободный перелет молекул за время  $\Delta t$ ; 2) столкновение молекул, принадлежащих данной ячейке [4, 5]. Макропараметры в ячейках вычислялись путем усреднения по времени вдоль траекторий молекул соответствующих микроскопических величин [6]. Расчеты проводились для модели молекул с постоянным сечением взаимодействия – “твердые сферы” и для модели молекул “псевдомаксвелловские сферы” с сечением взаимодействия  $\sigma = \sigma_0/g$ . Здесь  $\sigma_0$  – постоянная,  $g$  – относительная скорость сталкивающихся молекул.

Решение задачи зависит от числа Кнудсена  $\text{Kn} = \lambda/L$ , где  $\lambda$  – характерная длина свободного пробега молекул. Для модели псевдомаксвелловских молекул  $\lambda = c/n_{\text{cp}}\sigma_0$ , где  $c = \sqrt{2kT_2/m}$  – характерная тепловая скорость. Для модели молекул “твердых сфер”  $\lambda = (n_{\text{cp}}\sigma)^{-1}$ , где  $\sigma = \text{const}$ .

## АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для проверки результатов, полученных в данной работе, найдем для псевдомаксвелловских молекул решение уравнения Навье–Стокса с граничными условиями [1], имеющими вид скачка температур и скоростей при  $x = 0$  и  $x = 1$ , в случае полной тепловой аккомодации. Интегрирование уравнения Навье–Стокса для плоского течения Куэтта в общем виде сводится к решению кубического уравнения, в которое входят константы, определяемые с помощью тех или иных граничных условий [7].

На рис. 1 и 2 распределения температур  $T$  и скоростей  $U$  между пластинами, полученные в данной работе методом прямого статистического моделирования при  $\kappa = 5/3$ ,  $T_2/T_1 = 4$  и  $\text{Kn} = 0.02$ , сравниваются с результатами решения описанной выше краевой задачи для уравнения Навье–Стокса. Здесь  $t = T/T_2$ ,  $u = U/\sqrt{2RT_2}$ . Как видно из графиков, указанные решения весьма близки.

На рис. 3–5 представлены зависимости нормированного потока энергии на нижнюю пластину  $Q(\text{Kn})$ , напряжения трения нижней пластины  $F(\text{Kn})$  и передаваемого нижней пластине потока нормального импульса  $P(\text{Kn})$ , полученные для псевдомаксвелловских молекул методом прямого статистического моделирования при  $T_1/T_2 = 0.25$

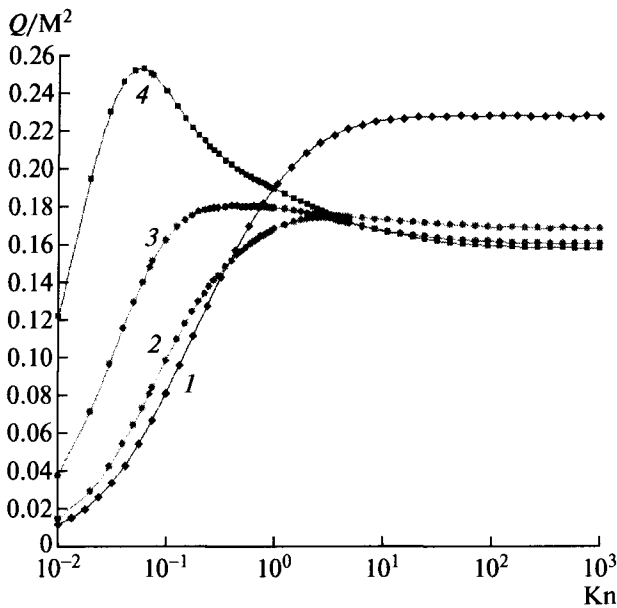


Рис. 3. Зависимости потока энергии на нижнюю пластину от числа Кнудсена для псевдомаквелловских молекул при  $T_1/T_2 = 0.25$ : 1 –  $M = 2$ , 2 – 5, 3 – 10, 4 – 20.

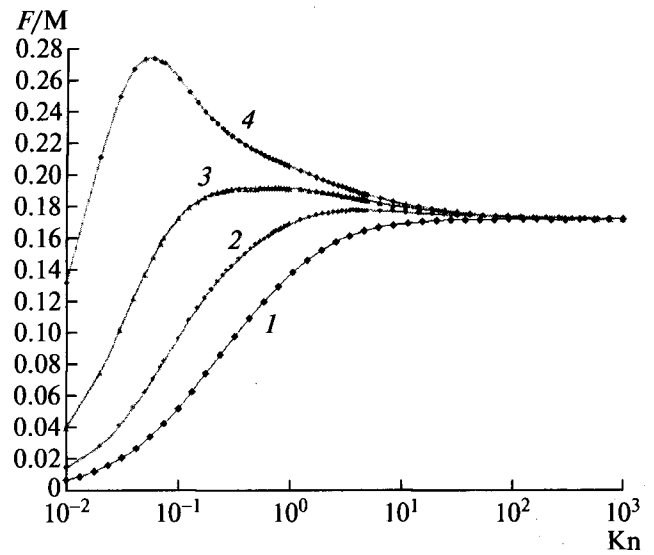


Рис. 4. Зависимости сопротивления нижней пластины от числа Кнудсена для псевдомаквелловских молекул, параметры и обозначения см. рис. 3.

и различных значениях числа Маха верхней пластины  $M$ . Здесь и далее

$$Q = \frac{E}{kT_2 c n_{cp}}, \quad E = - \int \xi_x \frac{m \xi^2}{2} f(\xi) d\xi, \quad c = \sqrt{\frac{2kT_2}{m}},$$

$$M = \frac{U_2}{\sqrt{\kappa RT_2}}, \quad F = \frac{|P_{xy}|}{2kT_2 n_{cp}},$$

$$P = \frac{|P_{xx}|}{2kT_2 n_{cp}}, \quad P_{xy} = \int m \xi_x \xi_y f(\xi) d\xi,$$

$$P_{xx} = \int m \xi_x \xi_x f(\xi) d\xi.$$

Положительное направление потока энергии выбрано от верхней пластины к нижней.

Как видно из графиков, при гиперзвуковых числах Маха эти зависимости имеют локальные максимумы, исчезающие с уменьшением  $M$ . Рассмотрим это явление подробнее. Подобно тому, как это сделано в [8] при качественном анализе гиперзвукового обтекания пластины, будем различать два сорта молекул. Молекулы, идущие от нижней пластины будем считать молекулами сорта 1 (“медленными” молекулами), а молекулы, идущие от верхней пластины, — молекулами сорта 2 (“быстрыми” молекулами). При переходе от свободномолекулярного режима к непрерывному первоначально некоторое увеличение энергии, попадающей на нижнюю стенку, происходит из-за возврата “медленных” молекул в результате столкновений между собой. Обозначим  $\lambda_{ij}$  длину пробега молекул сорта  $i$  на молекулах сорта  $j$ . Столкновение молекул сорта 2 с молекулами сор-

та 1 приведет к тому, что число “быстрых” молекул увеличится, а медленных уменьшится. При этом  $\lambda_{12}, \lambda_{21}$  и  $\lambda_{11}$  также увеличатся и потоки энергии и импульса, попадающие на нижнюю стенку, возрастут. Это справедливо как для псевдомаквелловских молекул, так и для “твердых сфер”. Кроме того, при больших числах Кнудсена для псевдомаквелловских молекул (в отличие от молекул “твердых сфер”)  $\lambda_{22} \gg \lambda_{12} \cong \lambda_{21} \gg \lambda_{11}$  и по мере уменьшения числа Кнудсена возникает

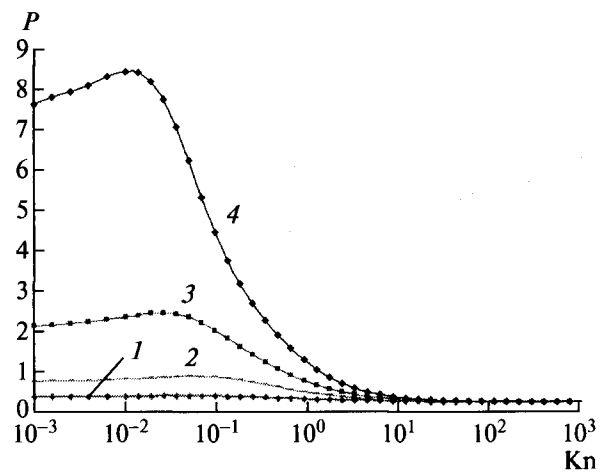


Рис. 5. Зависимости потока нормального импульса, передаваемого нижней пластине от числа Кнудсена для псевдомаквелловских молекул, параметры и обозначения см. рис. 3.

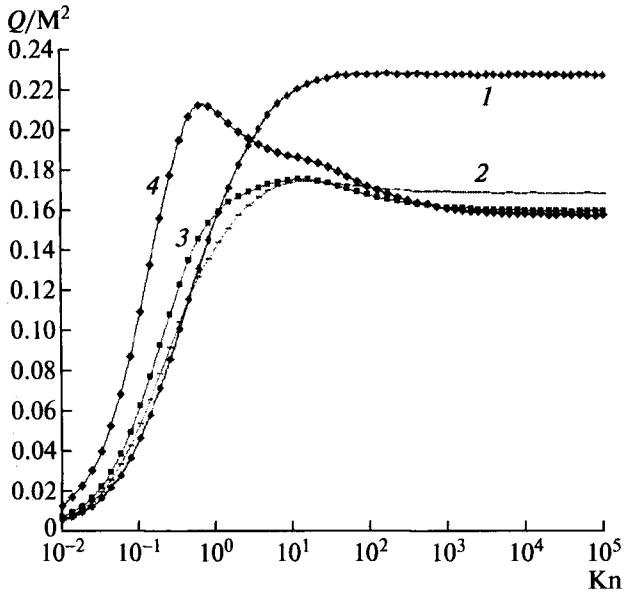


Рис. 6. Зависимости потока энергии на нижнюю пластину от числа Кнудсена для модели “твердых сфер”, параметры и обозначения см. рис. 3.

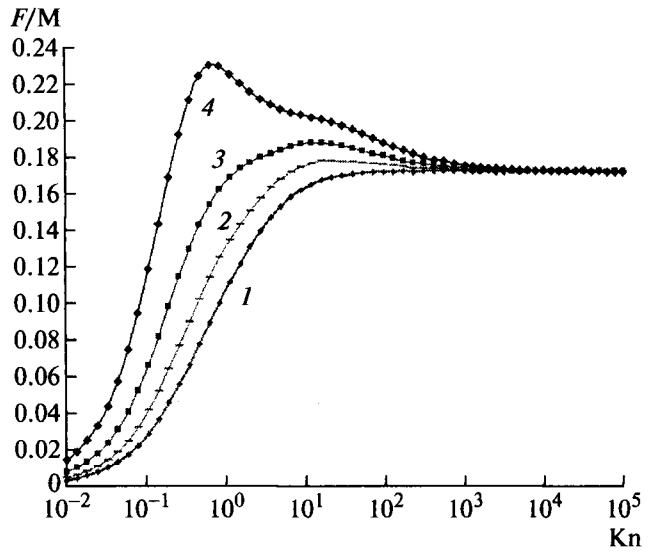


Рис. 7. Зависимости сопротивления нижней пластины от числа Кнудсена для модели “твердых сфер”, параметры и обозначения см. рис. 3.

ситуация, когда  $\lambda_{11}$  оказывается много меньше  $L$ , а  $\lambda_{12} \cong \lambda_{21}$  становится соизмеримой с  $L$ . Переход “медленных” молекул в разряд “быстрых” в результате столкновений будет приводить к увеличению “пробивной способности” бывших медленных молекул и, следовательно, к возрастанию потока энергии и импульса, попадающего на нижнюю стенку. С другой стороны, согласно элементарной кинетической теории [1] при  $Kn \ll 1$  поток энергии на нижнюю пластину и ее удельное сопротивление становятся пропорциональны  $Kn$  и, следовательно, начиная с некоторого значения числа Кнудсена, должны начать уменьшаться с уменьшением  $Kn$ .

Этими эффектами объясняется немонотонный характер зависимости  $Q(Kn)$  и  $F(Kn)$ . Для молекул “твердых сфер”  $\lambda_{22} \gg \lambda_{12} \cong \lambda_{21} \cong \lambda_{11}$ , и возрастание  $Q(Kn)$  связано только с уменьшением плотности “медленных” молекул в результате столкновений.

Отметим, что при достаточно больших числах Кнудсена удельное сопротивление выходит на свободномолекулярный предел

$$F = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \frac{M}{\sqrt{T_1/T_2 + 1}}$$

Результаты аналогичных расчетов для модели молекул “твердых сфер” представлены на рис. 6–8. Как видно из графиков, в случае молекул “твердых сфер” немонотонная зависимость  $Q(Kn)$  и  $F(Kn)$  также имеет место. При этом, как и следовало ожидать в свете вышеизложенного, она выражена менее резко, чем для “псевдомаксвелловских” молекул. Отметим, что, как видно из рис. 5

и 8, максимум имеет и зависимость нормального импульса от числа Кнудсена.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задаче Куэтта методом прямого статистического моделирования рассмотрены зависимости потока энергии на нижнюю пластину, напряжения трения и потока нормального импульса, передаваемого нижней пластине от числа Кнудсена. Показано, что при гиперзвуковых числах Маха все три зависимости немонотонны как в случае

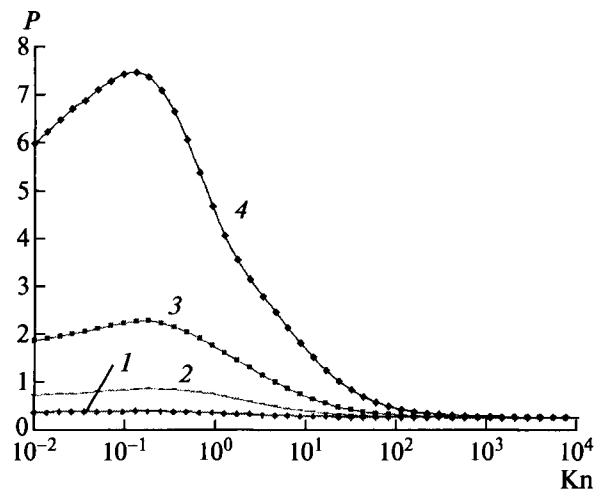


Рис. 8. Зависимости потока нормального импульса, передаваемого нижней пластине, от числа Кнудсена для модели “твердых сфер”, параметры и обозначения см. рис. 3.

“псевдомаксвелловских молекул”, так и в случае “твердых сфер”.

Авторы выражают благодарность М.Н. Когану за полезное обсуждение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Шахов Е.М.* Задача Куэтта для обобщенного уравнения Крука. Эффект максимума напряжения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 5. С. 16.
3. *Абрамов А.А., Бутковский А.В.* Влияние отношения температуры потока к температуре стенки на сильную конденсацию газа // ТВТ. 2008. Т. 46. № 2. С. 257.
4. *Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е.* Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15. № 5. С. 1195.
5. *Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е.* Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15. № 6. С. 1553.
6. *Абрамов А.А.* О вычислении макропараметров в методе прямого статистического моделирования Монте-Карло // ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 315.
7. *Шидловский В.П.* Введение в динамику разреженного газа. М.: Наука, 1965. 220 с.
8. *Коган М.Н.* Гиперзвуковые течения разреженного газа // Прикл. матем. и мех. 1962. Т. 26. № 3. С. 520.