И. С. Борисов, Некоторые предельные теоремы для сумм зависимых случайных процессов, *Сиб. матем. журн.*, 1979, том 20, номер 2, 237–247

https://www.mathnet.ru/smj3841

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XX, № 2 МАРТ — АПРЕЛЬ 1979

УДК 519.21

И. С. БОРИСОВ

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение и формулировка основных результатов. Многие задачи теории массового обслуживания, теории надежности и других приложений теории вероятностей приводят к необходимости изучения предельного поведения сумм зависимых случайных процессов. Некоторые результаты в этом направлении получены в [1,2]. Однако в ряде конкретных задач проверить сформулированные в этих работах условия, обеспечивающие сходимость в том или ином смысле сумм зависимых случайных процессов к предельному, либо весьма затруднительно, либо просто невозможно. В настоящей заметке получены новые достаточные условия для указанной сходимости, причем в отличие от [1,2] мы будем рассматривать суммируемые процессы более общей природы, получая при этом в качестве предельных произвольные «безгранично делимые» случайные процессы.

Пусть $\eta_{n1}(t), \eta_{n2}(t), \ldots, \eta_{nk_n}(t)$, $t \in B \subset R$, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательность серий случайных процессов, заданных в каждой серии на одном вероятностном пространстве. Мы будем предполагать, что процессы $\{\eta_{ni}(t)\}$ при каждом $t \in B$ удовлетворяют условию бесконечной малости

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\leqslant k_n} \mathbf{P}(|\eta_{ni}(t)| \geqslant \varepsilon) = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Обозначим $S_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \eta_{ni}(t)$. Нас будут интересовать, главным образом, условия сходимости конечномерных распределений процессов $S_n(t)$ к конечномерным распределениям соответствующего предельного процесса. Кроме того, в некоторых частных случаях мы получим условия сходимости непрерывных в той или иной топологии функционалов от указанных процессов.

Пусть сначала $\eta_{n1}(t), \ldots, \eta_{nk_n}(t)$ независимы. Тогда имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы при $n \to \infty$ распределения векторов $(S_n(t_1), \ldots, S_n(t_s))$ при выполнении условия бесконечной малости слабо сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы существовали вектор $\Gamma_T \in R^s$, неотрицательный симметричный линейный оператор A_T в R^s и мера $L_T(\cdot)$, определенная на борелевской σ-алгебре пространства R^s и конечная на множествах, отделенных от нуля на положительное расстояние, такие, что*

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}_{ni}^{(T)}(A \cap \{|X| \geqslant \varepsilon\}) = L_T(A \cap \{|X| \geqslant \varepsilon\}),$$

где A — произвольное борелевское множество в R^s, для которого

$A\cap\{|X|\geqslant\varepsilon\}$ является множеством непрерывности меры L_T, $\mathbf{P}_{ni}^{(T)}$ — распределение в R^s вектора $H_{ni}=(\eta_{ni}(t_1), \ldots, \eta_{ni}(t_s))$, $T=(t_1, \ldots, t_s)$, $\varepsilon>0$;

2) для любого $Z\in R^s$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{k_n}\left[\int\limits_{|X|\leqslant\varepsilon}\langle Z, X\rangle^2\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX)-\left(\int\limits_{|X|\leqslant\varepsilon}\langle Z, X\rangle\,\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX)\right)^2\right]=\langle A_TZ, Z\rangle,$$

где $\langle Z, X\rangle=\sum\limits_{i=1}^{s}z_ix_i$;

$$3)\ \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\left[\int\limits_{|X|\leqslant\varepsilon}x_m\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX)+\int\limits_{|X|>\varepsilon}\frac{x_m}{|X|}L_T(dX)\right]=\gamma_m^{(T)},$$

$m=1, 2, \ldots, s$, $\gamma_m^{(T)}$ — m-я координата вектора Γ_T.

При выполнении этих условий характеристическая функция $\Psi_T(Z)$ предельного закона имеет вид

$$\Psi_T(Z)=\exp\left\{i\langle\Gamma_T, Z\rangle-{}^1/_2\langle A_TZ, Z\rangle+\right.$$
$$\left.+\int\left[e^{i\langle Z,X\rangle}-1-\frac{i\langle Z, X\rangle}{1+|X|^2}\right]L_T(dX)\right\}. \qquad (1)$$

Сформулированное утверждение легко можно получить, используя, например, результаты, изложенные в ([3]) (см. § 34).

Отметим, что семейство характеристических функций $\{\Psi_T\}$ (или соответствующих распределений) согласовано. Следовательно, в теореме 1 мы можем говорить о слабой сходимости[1]) процессов $S_n(t)$ к некоторому случайному процессу (в широком смысле), определяемому семейством характеристических функций $\{\Psi_T\}$ вида (1). В дальнейшем такие процессы мы будем называть безгранично делимыми в широком смысле или просто безгранично делимыми (см. ([4])).

Во втором пункте мы докажем несколько полезных следствий теоремы 1, в частности, теорему Б. Григелиониса о слабой сходимости сумм независимых редеющих потоков к пуассоновскому (см. ([5])).

Переходя к изучению предельного поведения процесса $S_n(t)$ в случае зависимых слагаемых, условимся, что фраза «свертка случайных процессов $\eta_{n1}(t), \ldots, \eta_{nk_n}(t)$» будет обозначать случайный процесс в широком смысле, определяемый семейством согласованных характеристических функций $\left\{\prod\limits_{k=1}^{k_n}f_k^{(T)}\right\}$, где $f_k^{(T)}$ — характеристическая функция совместного распределения процесса $\eta_{nk}(t)$ в точках $t_1, \ldots, t_s$.

Введем следующие обозначения:

$$G_n^{(T)}(u, Z, M, \{B_i\})=\sum_{i=M+1}^{k_n}\mathbf{E}\{|\,\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(i-M)}(\langle Z, H_{ni}\rangle<u)-$$
$$-\mathbf{P}(\langle Z, H_{ni}\rangle<u)\,|;\ B_i\},$$

где $B_i\subset\Omega$ (Ω — пространство элементарных исходов), $M<k_n$, $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(i-M)}$ — условное распределение относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}^{(i-M)}$, порожденной векторами $H_{n1}, H_{n2}, \ldots, H_{ni-M}$, $i>M$;

[1]) На протяжении всей статьи под слабой сходимостью процессов понимается слабая сходимость соответствующих конечномерных распределений.

$$G_n^{(T)}(u, Z, M) = G_n^{(T)}(u, Z, M, \{\Omega_i\}), \text{ где } \Omega_i = \Omega.$$

Основная цель заметки состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть случайные процессы $\eta_{n1}(t), \ldots, \eta_{nk_n}(t)$ удовлетворяют условию бесконечной малости и их свертка слабо сходится к некоторому безгранично делимому процессу $S(t)$ с параметрами $\{\Gamma_T, A_T, L_T\}$. Предположим, что, кроме того, существует подпоследовательность натуральных чисел $M = M(n)$ такая, что $M = o(k_n)$ при $n \to \infty$ и выполнено:*

1) *для любых $l > 0$, $Z \in R^s$, $T \in B^s$ и s при $n \to \infty$*

$$G_n^{(T)}(\cdot, Z, M) \to 0 \text{ в } L_1(-l, l), \qquad \prod_{i=1}^{M} f_i^{(T)}(Z) \to 1,$$

где $L_1(-l, l)$ — пространство функций, интегрируемых по Лебегу на $[-l, l]$;

2) *последовательность $\{G_n^{(T)}(\cdot, Z, 1)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена в $L_1(-l, l)$;*

3) *для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$*

$$G_n^{(T)}(\cdot, Z, 1, \{A_i^{\varepsilon}\}) \to 0 \text{ в } L_1(-l, l), \qquad \mathbf{P}(A_M^{\varepsilon}) \to 0,$$

где $A_i^{\varepsilon} = \left\{ \left| \sum_{m=i+1-M}^{i-1} H_{nm} \right| > \varepsilon \right\}, \ i \geqslant M.$

Тогда $S_n(t)$ слабо сходится к процессу $S(t)$.

Заметим, что необходимые и достаточные условия сходимости свертки случайных процессов $\eta_{n1}(t), \ldots, \eta_{nk_n}(t)$ дает нам теорема 1.

Условие 1) теоремы 2 есть не что иное, как своеобразное условие равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) процессов $\{\eta_{ni}(t)\}_{i=1}^{k_n}$. По-видимому, стоит отметить, что в некоторых задачах условие р. с. п., фигурирующее в теореме 2, в отличие от традиционных условий р. с. п., проверяется достаточно просто.

Отметим далее, что условия 2), 3) означают в известном смысле не очень сильную зависимость процессов $\{\eta_{ni}(t)\}_{i=1}^{k_n}$ с близкими номерами. Эти условия существенны, поскольку мы доказываем, что свертка процессов $\{\eta_{ni}(t)\}_{i=1}^{k_n}$ и процесс $S_n(t)$ при $n \to \infty$ слабо сходятся к одному и тому же безгранично делимому процессу.

В важном частном случае, когда процессы $\eta_{ni}(t)$ ступенчатые, т. е. имеют неотрицательные целочисленные приращения и $\eta_{ni}(0) = 0$, в качестве следствия теоремы 2 можно получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть ступенчатые процессы $\{\eta_{ni}(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ удовлетворяют условию бесконечной малости и, кроме того, при $n \to \infty$*

1) $\sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}(\eta_{ni}(t) > 1) \to 0,$

2) $\sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}(\eta_{ni}(t) = 1) \to \Lambda(t)$

для любого $t > 0$.

Допустим, что существует подпоследовательность натуральных чисел $\{M(n)\}$ такая, что

a) *$M(n) = o(k_n)$ при $n \to \infty$,*

b) *для любых положительных $t, t_1, \ldots, t_s$*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=M+1}^{k_n}\mathbf{E}\left|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(i-M)}(\eta_{ni}(t)=1)-\mathbf{P}(\eta_{ni}(t)=1)\right|=0,$$

$$\text{c)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=M}^{k_n}\mathbf{P}\left(\eta_{ni}(t)=1,\quad \bigcup_{j=i+1-M}^{i-1}\{\eta_{ni}(t)=1\}\right)=0,$$

где $\bigcup\limits_{j=i+1-M}^{i-1}=\varnothing$ *при* $M(n)=1$, d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{M<i\leqslant k_n}\sum\limits_{j=i-M}^{i}\mathbf{P}(\eta_{nj}(t)=1)=0.$

Тогда при $n\to\infty$ *процессы* $S_n(t)$ *слабо сходятся к пуассоновскому процессу* $\Pi(t)$ *с ведущей функцией* $\Lambda(t)$.

Теорема 2 допускает очевидное обобщение. Рассмотрим последовательность бесконечных серий случайных процессов $\{\eta_{ni}(t)\}_{i=1}^{\infty}$ и последовательность целозначных с. в. $\{\nu_n\}$, заданных на одном вероятностном пространстве с процессами $\{\eta_{ni}(t)\}$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Предположим, что существует монотонная подпоследовательность натуральных чисел* $\{k_n\}$, *для которой схема серий* $\{\eta_{ni}(t)\}_{i=1}^{k_n}$ *удовлетворяет условиям теоремы 2 и при* $n\to\infty$ $\nu_n/k_n\to 1$ *по вероятности.*

Если, кроме того, при $n\to\infty$ $\sum\limits_{i=\max(1,\,k_n-|\nu_n-k_n|)}^{k_n+|\nu_n-k_n|}\eta_{ni}(t)\to 0$ *по вероятности для любого* $t>0$, *то случайный процесс* $S_n(t)=\sum\limits_{i=1}^{\nu_n}\eta_{ni}(t)$ *при* $n\to\infty$ *слабо сходится к безгранично делимому процессу, определенному в теореме 2.*

Значительный интерес представляют условия сходимости распределений различных функционалов от рассмотренных процессов. Мы ограничимся случаем ступенчатых процессов $\eta_{ni}(t)$, причем будем считать, что с вероятностью 1 траектории $\eta_{ni}(t)$ принадлежат функциональному пространству $D(B)$, где B — либо конечный отрезок прямой, либо промежуток $[0,\infty)$. В случае ограниченного B (для определенности $B=[0,b]$) введем в $D(B)$ топологию Скорохода $\mathcal{J}_1$ (см. ([6])). Если же $B=[0,\infty)$, то пространство $D(B)$ наделим топологией Стоуна $\mathcal{S}$ (см. ([7,8])). Для случая независимых $\eta_{n1}(t),\ldots,\eta_{nk_n}(t)$ условия сходимости распределений функционалов, непрерывных в указанных топологиях, были получены в ([8]). Для зависимых процессов справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Если, кроме того,*

$$\text{a)}\quad \lim_{c\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^b[\Lambda_n(\min(b,t+c))-\Lambda_n(\max(0,t-c))]\,d\Lambda_n(t)=0,$$

где $\Lambda_n(t)=\sum\limits_{i=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{ni}(t)=1)$ (*для любого* $b>0$ *в случае топологии* $\mathbf{S}$).

$$\text{b)}\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in B}\sup_{\substack{N\geqslant M,\\ i\leqslant k_n-N}}\sup_{\substack{A\in\mathfrak{A}(i),\\ \mathbf{P}(A)\neq 0}}k_n\left|\mathbf{P}(\eta_{ni+N}(t)=1\mid A)-\mathbf{P}(\eta_{ni+N}(t)=1)\right|=0,$$

где $\mathfrak{A}^{(i)}$ — *σ-алгебра событий, порожденная процессом* $\{\eta_{ni}(t),\ t\in B\}$, *то распределение любого непрерывного в топологии* $\mathcal{J}_1$ *или* $\mathcal{S}$ *функционала от процесса* $S_n(t)$ *слабо сходится при* $n\to\infty$ *к распределению того же функционала от соответствующего безгранично делимого процесса.*

Отметим, что сформулированный результат допускает обобщение, аналогичное теореме 4.

2. Доказательство теорем. Прежде чем перейти к доказательству основного результата (теорема 2), мы остановимся на некоторых следствиях теоремы 1.

Пусть предельный процесс, фигурирующий в теореме 1, имеет конечномерные распределения, определяемые семейством характеристических функций

$$\Psi_T(Z) = \mathbf{E}e^{i\langle Z,\, S_T\rangle} = \exp\{\Lambda(t_1)(e^{i\langle Z,\, \mathbf{e}_1\rangle}-1) + (\Lambda(t_2)-\Lambda(t_1))(e^{i\langle Z,\, \mathbf{e}_2\rangle}-1) + \ldots$$
$$\ldots + (\Lambda(t_s)-\Lambda(t_{s-1}))(e^{i\langle Z,\, \mathbf{e}_s\rangle}-1)\},$$

где $S_T = (S(t_1), \ldots, S(t_s))$, $\mathbf{e}_m = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-1 \text{ раз}}, 1, \ldots, 1) \in R^s$, $\Lambda(t)$ — монотонно возрастающая функция, $\Lambda(0)=0$, $Z \in R^s$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_s$.

Иными словами, это есть характеристическая функция совместного распределения (в точках $t_1, \ldots, t_s$) пуассоновского процесса $\Pi(t)$ с ведущей функцией $\Lambda(t)$. Легко видеть, что $\Pi(t)$ есть безгранично делимый

случайный процесс с параметрами $\Gamma_T = \sum_{m=1}^{s} \frac{\Lambda(t_m)-\Lambda(t_{m-1})}{s-m+2} \cdot \mathbf{e}_m$, $A_T \equiv 0$,

$$L_T(A) = \begin{cases} \Lambda(t_m) - \Lambda(t_{m-1}), & \text{если } \mathbf{e}_m \in A,\ \mathbf{e}_j \notin A,\ j \neq m, \quad \text{где } t_0 = 0,\\ 0, & \text{если } \mathbf{e}_j \notin A,\ j = 1, 2, \ldots, s. \end{cases}$$

Теперь в качестве следствия теоремы 1 нетрудно получить следующий результат.

Теорема 1.1. *Для слабой сходимости последовательности сумм независимых случайных процессов к пуассоновскому процессу с ведущей функцией* $\Lambda(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $Z \in R^s$, $s = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $T \in [0, \infty)^s$ *и некоторого* $\tau \in (0, 1)$

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \int_{|X|\leqslant\tau} x_m \mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX) = 0,\ m = 1, 2, \ldots, s,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \left\{ \int_{|X|\leqslant\tau} \langle Z, X\rangle^2 \mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX) - \left(\int_{|X|\leqslant\tau} \langle Z, X\rangle \mathbf{P}_{ni}(dX) \right)^2 \right\} = 0,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}_{ni}^{(T)} \left(\bigcup_{m=1}^{s} V_m(\varepsilon) \cap \{|X| > \varepsilon\} \right) = 0,$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}_{ni}^{(T)}(|X - \mathbf{e}_m| \leqslant \varepsilon) = \Lambda(t_m) - \Lambda(t_{m-1}), \quad m = 1, 2, \ldots, s,$$

где $V_m(\varepsilon)$ *— внешность шара радиуса* ε *с центром в точке* $\mathbf{e}_m$.

Следствие (*теорема Б. Григелиониса*, см. ([5])). *Если в условиях теоремы 1.1 процессы* $\eta_{ni}(t)$ *ступенчатые, то необходимые и достаточные условия слабой сходимости* $S_n(t)$ *к пуассоновскому процессу с ведущей функцией* $\Lambda(t)$ *будут таковы:*

$$1^*)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}(\eta_{ni}(t) = 1) = \Lambda(t),$$

$$2^*)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}(\eta_{ni}(t) > 1) = 0$$

для любого $t > 0$.

Доказательство. Покажем, что условия 1*, 2* эквивалентны условиям 1—4 теоремы 1.1. В одну сторону это очевидно, поскольку из условия 4 при $m=1$ немедленно следует 1* и, кроме того, в силу включения $\{\eta_{ni}(t)>1\}\subseteq\{\eta_{ni}\in V_1(\varepsilon)\cap\{|X|>\varepsilon\}\}$ условие 3 влечет за собой 2*.

Покажем теперь, что из 1*, 2* следуют условия 1—4. Выполнение 1, 2 очевидно ввиду того, что $\eta_{ni}(t)$ — ступенчатые процессы. Условие 3 будет выполнено потому, что событие $\left\{H_{ni}\in\bigcup_{m=1}^{s}V_m(\varepsilon)\cap\{|X|>\varepsilon\}\right\}$ влечет за собой событие $\bigcup_{m=1}^{s}\{\eta_{ni}(t_m)>1\}$. Остается лишь воспользоваться условием 2*.

Покажем, наконец, что из 1*, 2* следует 4. В самом деле, с учетом монотонности траекторий $\eta_{ni}(t)$ получаем, что для любого $\varepsilon\in(0, 1)$

$$\sum_{i=1}^{k_n}\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(|X-e_m|\leqslant\varepsilon)=\sum_{i=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_{m-1})=0,\quad\eta_{ni}(t_m)=1,\quad\eta_{ni}(t_s)=1).$$

Доказательство нашего утверждения следует из равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_{m-1})=0,\quad\eta_{ni}(t_m)=1,\quad\eta_{ni}(t_s)=1)=\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_m)=1)-\\-\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_m)=1,\quad\eta_{ni}(t_s)>1)-\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_{m-1})=1,\quad\eta_{ni}(t_m)=1)=\\=\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_m)=1)-\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_{m-1})=1)-\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_m)=1,\ \eta_{ni}(t_s)>1)+\\+\mathbf{P}(\eta_{ni}(t_{m-1})=1,\quad\eta_{ni}(t_s)>1).\end{aligned}$$

Таким образом, эквивалентность условий 1—4 и 1*, 2* доказана.

Приведем еще одно следствие теоремы 1.

Теорема 1.2. *Пусть безгранично делимый процесс $S(t)$ имеет параметры $\{\Gamma_T,\ A_T,\ L_T\equiv 0\}$ (т. е. $S(t)$ — гауссовский процесс). Тогда для слабой сходимости $S_n(t)$ к $S(t)$ необходимо и достаточно, чтобы для любых $\varepsilon>0$, $T\in B^s$, $Z\in R^s$ и s*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k_n}\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(|X|>\varepsilon)=0,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k_n}\int\limits_{|X|\leqslant\varepsilon}x_m\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX)=\gamma_m^{(T)},\ m=\overline{1,\ s},$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{|X|\leqslant\varepsilon}\langle Z,\ X\rangle^2\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX)-\left(\int\limits_{|X|\leqslant\varepsilon}\langle Z,\ X\rangle\mathbf{P}_{ni}^{(T)}(dX)\right)^2\right\}=$
$=\langle A_TZ,\ Z\rangle.$

В случае, когда $\eta_{ni}(t)$ при любом фиксированном $t\in B$ имеют конечные дисперсии, в качестве следствия предыдущей теоремы мы можем получить хорошо известный результат (см. [9]):

Теорема 1.3. *Предположим, что $\mathbf{E}\eta_{ni}(t)=0$, $\mathbf{E}\eta_{ni}^2(t)<\infty$, $i=1, 2, \ldots, k_n$, для любого $t\in B$.*

Тогда для слабой сходимости $S_n(t)$ к гауссовскому процессу с нулевым средним и корреляционной функцией $R(u,\ v)$ достаточно потребовать, чтобы при любом фиксированном $t\in B$ с. в. $\{\eta_{ni}(t)\}_{i=1}^{k_n}$ удовлетворяли условию Линдеберга и для любых $u,\ v\in B$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}\eta_{ni}(u)\,\eta_{ni}(v)=R(u,\,v).$$

Доказательство теоремы 2. Введем обозначения

$$f_m^{(T)}(Z)=\mathrm{E}\exp\{i\langle Z,\,H_{nm}\rangle\},$$

$$F_m^{(T)}(Z)=\mathrm{E}\exp\left\{i\left\langle Z,\,\sum_{j=1}^{m}H_{nj}\right\rangle\right\},\quad m\leqslant k_n,\quad Z\in R^s.$$

Представим характеристическую функцию $F_m^{(T)}(Z)$ следующим образом:

$$F_m^{(T)}(Z)=\mathrm{E}\left\{\exp\left\{i\left\langle Z,\,\sum_{j=1}^{m-1}H_{nj}\right\rangle\right\}\mathrm{E}_{\mathfrak{B}^{(m-1)}}e^{i\langle Z,H_{nm}\rangle}\right\},\tag{2}$$

где $\mathfrak{B}^{(m-1)}$ — σ-алгебра, порожденная случайными векторами $\{H_{nj}\}_{j=1}^{m-1}$. Далее, условную характеристическую функцию в записи (2) тождественно преобразуем как

$$\mathrm{E}_{\mathfrak{B}^{(m-1)}}e^{i\langle Z,\,H_{nm}\rangle}=f_m^{(T)}(Z)+\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu}dQ_m(u),$$

где $Q_m(u)=\mathbf{P}_{\mathfrak{B}^{(m-1)}}(\langle Z,\,H_{nm}\rangle<u)-\mathbf{P}(\langle Z,\,H_{nm}\rangle<u)$.

Теперь подставим это выражение в (2). Тогда

$$F_m^{(T)}(Z)=f_m^{(T)}(Z)\,F_{m-1}^{(T)}(Z)+\mathrm{E}\left\{\exp\left\{i\left\langle Z,\,\sum_{j=1}^{m-1}H_{nj}\right\rangle\right\}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu}dQ_m(u)\right\}.\tag{3}$$

Используя данное рекуррентное соотношение, получаем

$$\begin{aligned}F_{k_n}^{(T)}(Z)&=\mathrm{E}\left\{\exp\left\{i\left\langle Z,\,\sum_{j=1}^{k_n-1}H_{nj}\right\rangle\right\}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu}dQ_{k_n}(u)\right\}+\\&+f_{k_n}^{(T)}(Z)\,E\left\{\exp\left\{i\left\langle Z,\,\sum_{j=1}^{k_n-2}H_{nj}\right\rangle\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu}dQ_{k_n-1}(u)\right\}+\right.\\&+f_{k_n}^{T}(Z)f_{k_n-1}^{(T)}\,\mathrm{E}\left\{\exp\left\{i\left\langle Z,\,\sum_{j=1}^{k_n-3}H_{nj}\right\rangle\right\}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu}dQ_{k_n-2}(u)\right\}+\ldots+\\&+\prod_{i=M+1}^{k_n}f_i^{(T)}(Z)\cdot F_M^{(T)}(Z).\end{aligned}\tag{4}$$

В силу условий теоремы $\prod_{i=M+1}^{k_n}f_i^{(T)}(Z)\cdot F_M^{(T)}(Z)$ сходится к некоторой безгранично делимой характеристической функции. Нам остается проверить, что условия теоремы обеспечивают малость оставшихся слагаемых в (4).

Рассмотрим отдельно второе слагаемое правой части (3). Обозначим его через I_m. Имеем $(m>M(n))$.

$$I_m=\mathrm{E}\left\{\exp\left\{i\left\langle Z,\,\sum_{j=1}^{m-M}H_{nj}\right\rangle\right\}\left[\mathrm{E}_{\mathfrak{B}^{(m-M)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu}dQ_m(u)+\right.\right.$$

$$+\mathbf{E}_{\mathfrak{B}(m-M)}\left\{\left[\exp\left\{i\left\langle Z, \sum_{j=m-M+1}^{m-1} H_{nj}\right\rangle\right\}-1\right]\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu}dQ_m(u);\ A_m^{\varepsilon}\right\}+$$

$$+\mathbf{E}_{\mathfrak{B}(m-M)}\left\{\left[\exp\left\{i\left\langle Z, \sum_{j=m-M+1}^{m-1} H_{nj}\right\rangle\right\}-1\right]\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu}dQ_m(u);\ \overline{A}_m^{\varepsilon}\right\}\Bigg]\Bigg\}, \qquad (5)$$

где $M=M(n)$, A_m^{ε} введены в п. 1, $\overline{A}_m^{\varepsilon}$ — дополнение к A_m^{ε}.

Далее, очевидно, что для любого $l>0$

$$\mathbf{E}_{\mathfrak{B}(m-M)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu}dQ_m(u)=\mathbf{E}_{\mathfrak{B}(m-M)}\int_{|u|>l} e^{iu}dQ_m(u)+$$

$$+\int_{-l}^{l} e^{iu}d\left(\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)-\mathbf{P}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)\right)=$$

$$=\mathbf{E}_{\mathfrak{B}(m-M)}\int_{|u|>l} e^{iu}dQ_m(u)-e^{il}\left[\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\langle Z, H_{nm}\rangle>l)-\right.$$

$$\left.-\mathbf{P}(\langle Z, H_{nm}\rangle>l)\right]-e^{-il}\left[P_{\mathfrak{B}(m-M)}(\langle Z, H_{nm}\rangle<-l)-\right.$$

$$\left.-\mathbf{P}(\langle Z, H_{nm}\rangle<-l)\right]-i\int_{-l}^{l}\left[\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)-\right.$$

$$\left.-\mathbf{P}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)\right]e^{iu}du. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что

$$|I_m|\leqslant C\mathbf{P}(|\langle Z, H_{nm}\rangle|>l)+\int_{-l}^{l}\mathbf{E}\left|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)-\right.$$

$$\left.-\mathbf{P}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)\right|du+\varepsilon\cdot C(Z)\int_{-l}^{l}\mathbf{E}\left|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-1)}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)-\right.$$

$$\left.-\mathbf{P}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)\right|du+\int_{-l}^{l}\mathbf{E}\left\{\left|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-1)}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathbf{P}(\langle Z, H_{nm}\rangle<u)\right|;\ A_m^{\varepsilon}\right\}du.$$

С учетом этого неравенства из (4) получаем

$$\left|F_{k_n}^{(T)}(Z)-\Psi_T(Z)\right|\leqslant C\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(|\langle Z, H_{nm}\rangle|>l)+\|G_n^{(T)}(\cdot, Z, M)\|_{L_1}+\varepsilon C(Z)\cdot$$

$$\cdot\|G_n^{(T)}(\cdot, Z, 1)\|_{L_1}+\|G_n^{(T)}(\cdot, Z, 1, \{A_m^{\varepsilon}\})\|_{L_1}+\left|F_M^{(T)}(Z)\prod_{i=M+1}^{k_n} f_i^{(T)}(Z)-\Psi_T(Z)\right|, \qquad (7)$$

где $\|g(\cdot)\|_{L_1}=\int_{-l}^{l}|g(u)|\,du.$

Мы можем считать, что $|Z|\neq 0$. Тогда, очевидно,

$$\mathbf{P}(|\langle Z, H_{nm}\rangle|>l)\leqslant\mathbf{P}(|H_{nm}|>l/|Z|).$$

Следовательно, первое слагаемое правой части (7) оценивается сверху величиной

$$C\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(|H_{nm}|>l/|Z|),$$

которую выбором достаточно большого l можно сделать сколь угодно малой (см. условие 1 теоремы 1).

В силу произвольности ε и условий теоремы наше утверждение доказано.

Замечание. Теорему 2 можно обобщить, если воспользоваться хорошо известным методом С. Н. Бернштейна, состоящим в «прореживании» исходной последовательности $\{\eta_{ni}(t)\}_{i=1}^{k_n}$ и построении новой последовательности «укрупненных» слагаемых $\{\tilde{\eta}_{ni}(t)\}_{i=1}^{\tilde{k}_n}$, между которыми зависимость будет уже не такой сильной, как в исходной последовательности, и, кроме того, $\sum_{i=1}^{k_n}\eta_{ni}(t)$ и $\sum_{i=1}^{\tilde{k}_n}\tilde{\eta}_{ni}(t)$ имеют один и тот же слабый предел (подробнее см. ([2]), ([10])). Суть обобщения состоит в том, что сформулированные в теореме 2 условия могут выполняться для последовательности $\{\tilde{\eta}_{ni}(t)\}$, несмотря на то, что они не выполняются для $\{\eta_{ni}(t)\}$.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что условия теоремы 3 влекут за собой условия теоремы 2 в случае ступенчатых процессов.

Сначала убедимся, что из 1), **b**), **d**) следует условие 1) теоремы 2. Имеем для любых $l>0$, $Z\in R^s$, $T\in[0,\infty)^s$, $s=1,2,\ldots$,

$$\sup_{|u|\leqslant l}G_n^{(T)}(u,Z,M)\leqslant\sum_{m=M+1}^{k_n}\mathbf{E}\left|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\eta_{nm}(t_s)=1)-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=1)\right|+$$
$$+\sum_{m=M+1}^{k_n}\mathbf{E}\left|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\eta_{nm}(t_s)=0)-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=0)\right|+$$
$$+2\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)>1). \tag{8}$$

Легко видеть, что

$$|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\eta_{nm}(t_s)=0)-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=0)|=|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\eta_{nm}(t_s)=1)-$$
$$-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=1)+\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-M)}(\eta_{nm}(t_s)>1)-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)>1)|. \tag{9}$$

Подставляя это выражение в (8), получаем требуемое.

Далее, из 1), 2) и тождества (9) элементарно устанавливается справедливость условия 2) теоремы 2:

$$\sup_{|u|\leqslant l}G_n^{(T)}(u,Z,1)\leqslant\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{E}\left|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-1)}(\eta_{nm}(t_s)=0)-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=0)\right|+$$
$$+2\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)\geqslant 1)\leqslant 4\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)\geqslant 1)\leqslant C.$$

Теперь покажем, что из 1), 2), **c**), **d**) следует 3). Для любых $l>0$, $Z\in R^s$, $s=1,2,\ldots$, имеем

$$\sup_{|u|\leqslant l} G_n^{(T)}(u, Z, 1, \{A_m^\varepsilon\}) \leqslant \sum_{m=M+1}^{k_n} \mathbf{E}\{|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-1)}(\eta_{nm}(t_s)=0) -$$

$$-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=0)|;\ A_m^\varepsilon\} + \sum_{m=M+1}^{k_n} \mathbf{E}\{\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-1)}(\eta_{nm}(t_s)\geqslant 1);\ A_m^\varepsilon\} +$$

$$+\max_m \mathbf{P}(A_m^\varepsilon)\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)\geqslant 1) \leqslant \sum_{m=M+1}^{k_n}\mathbf{E}\{|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}(m-1)}(\eta_{nm}(t_s)\geqslant 1) -$$

$$-\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)\geqslant 1)|;\ A_m^\varepsilon\} + \sum_{m=M+1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=1;\ A_m^\varepsilon) + \max_m \mathbf{P}(A_m^\varepsilon)\Lambda_n(t_s) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)>1) \leqslant 2\sum_{m=M+1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)=1;\ A_m^\varepsilon) +$$

$$+2\max_m \mathbf{P}(A_m^\varepsilon)\Lambda_n(t_s) + 4\sum_{m=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nm}(t_s)>1).$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 5. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_c(X) = \sup_{t-c<t_1<t<t_2<t+c} \min(|X(t_2)-X(t)|,\ |X(t)-X(t_1)|),$$

где $X\in D(B)$, $c>0$,

$$\nu_{ni}^{(m)} = \inf(t: \eta_{ni}(t)=m), \quad m=1, 2, \ldots.$$

Для определенности мы рассмотрим случай $B=[0, b]$. Доказательство для $B=[0,\infty)$ отличается лишь тем, что мы должны проводить наши рассуждения для любого $b>0$ (подробнее см. ([7])).

Так как условия теоремы 3 обеспечивают слабую сходимость процессов $S_n(t)$, то нам остается лишь убедиться в справедливости соотношения (см. ([6]))

$$\lim_{c\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathbf{P}(\Delta_c(S_n)\geqslant\varepsilon)=0 \text{ для любого } \varepsilon>0. \tag{10}$$

Прежде всего заметим, что событие $\{\Delta_c(S_n)\geqslant\varepsilon\}$ влечет за собой событие {*существует точка* $t\in[0, b]$ *такая, что на отрезке* $[t-c, t+c]$ *процесс* $S_n(t)$ *имеет по крайней мере два скачка*}. Тогда

$$\mathbf{P}(\Delta_c(S_n)\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=M+1}^{k_n}\left\{\nu_{ni}^{(1)}<b;\ \bigcup_{j=1}^{i-1}\{\nu_{nj}^{(1)}<b,\ |\nu_{ni}^{(1)}-\nu_{nj}^{(1)}|\leqslant 2c\}\right\}\right)+$$

$$+\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{M}\{\eta_{nj}(b)=1\}\right)+\sum_{i=1}^{k_n}\mathbf{P}(\eta_{nj}(b)>1). \tag{11}$$

Первое слагаемое правой части (11) оценим следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=M+1}^{k_n}\left\{\nu_{ni}^{(1)}<b;\ \bigcup_{j=1}^{i-1}\{\nu_{nj}^{(1)}<b;\ |\nu_{ni}^{(1)}-\nu_{nj}^{(1)}|\leqslant 2c\}\right\}\right)\leqslant\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=M+1}^{k_n}\left\{\eta_{ni}(b)=1;\right.\right.$$

$$\left.\left.\bigcup_{j=i-M+1}^{i-1}\{\eta_{nj}(b)=1\}\right\}\right)+\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=M+1}^{k_n}\bigcup_{j=1}^{i-M}\{\nu_{nj}^{(1)}<b;\ |\nu_{nj}^{(1)}-\nu_{nj}^{(1)}|\leqslant 2c\}\right). \tag{12}$$

Далее,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=M+1}^{k_n}\left\{\eta_{ni}(b)=1;\ \bigcup_{j=i-M+1}^{i-1}\{\eta_{nj}(b)=1\}\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=M+1}^{k_n}\mathbf{P}\times\left(\eta_{ni}(b)=1;\ \bigcup_{j=i-M+1}^{i-1}\{\eta_{nj}(b)=1\}\right).$$

Оценка для второго слагаемого правой части (12) такова:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=M+1}^{k_n}\ \bigcup_{j=1}^{i-M}{}^{*}\{\nu_{nj}^{(1)}<b;\ |\nu_{ni}^{(1)}-\nu_{nj}^{(1)}|\leqslant 2c\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=M+1}^{k_n}\ \sum_{j=1}^{i-M}\int_0^{e}\mathbf{P}\left(\nu_{nj}^{(1)}\in dx;\ |\nu_{ni}^{(1)}-x|\leqslant 2c\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=M+1}^{k_n}\ \sum_{j=1}^{i-M}\int_0^{b}P\times\left(\nu_{nj}^{(1)}\in dx\right)\mathbf{P}\left(|\nu_{ni}^{(1)}-x|\leqslant 2c\right)+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{k_n}\psi_{ni}\Lambda_n(b)=\int_0^{b}d\Lambda_n(x)\left[\Lambda_n(\min(b,x+2c))-\Lambda_n(\max(0,x-2c))\right]+o(1),$$

где $\psi_{ni}=o\left(k_n^{-1}\right)$ равномерно по $i\leqslant k_n$.

Таким образом, в силу полученных оценок и условий теоремы соотношение (10), а вместе с ним и теорема 5 доказаны.

Замечание 1. В условиях теоремы 3 имеет место слабая сходимость распределений с. в. $\Phi(S_n(t))$ к распределению с. в. $\Phi(S(t))$ для любого функционала Φ, непрерывного в топологии $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$ (определения см. в ([6])). Это утверждение является следствием того факта, что «модули непрерывности» монотонных функций в указанных топологических пространствах равны нулю (см. ([6])).

Замечание 2. Можно получить результаты, в той или иной степени аналогичные теоремам 3—5, и для немонотонных ступенчатых процессов (т. е. имеющих целочисленные приращения разных знаков). При этом в качестве предельного будет уже фигурировать обобщенный пуассоновский процесс. Отметим, что подобные результаты получены в ([1, 2]).

Поступила в редакцию
1 ноября 1977 г.

Новосибирск,
Институт математики СО АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1 *Банис Р.* О сходимости сумм зависимых точечных процессов к пуассоновским.— Литов. мат. сб., 1975, 15, № 3, 11—23.
2 *Банис Р.* Предельные пуассоновские процессы в схеме суммирования зависимых целозначных процессов.— Литов. мат. сб., 1975, 15, № 4, 4—15.
3 *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.
4 *Maruyama G.* Infinitely divisible processes.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 1, 3—23.
5 *Григелионис Б.* К вопросу о сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому.— Литов. мат. сб., 1966, 6, № 2, 241—244.
6 *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 3, 289—319.
7 *Stone C.* Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals.— Proc. Amer. Math. Sos., 1963, 14, № 5, 694—696.
8 *Банис Р.* О слабой сходимости ступенчатых случайных процессов.— Литов. мат. сб., 1972, 12, № 1, 47—53.
9 *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
10 *Бернштейн С. Н.* Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин.— Успехи мат. наук, 1944, 10, 65—114.