Yu. K. Dem'yanovich, On the evaluation of truncation error of the projection methods in the problem of best approximation, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1980, Volume 102, 5–18

Ю.К.Демьянович

К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Ниже рассматриваются проекционные методы решения задачи о кратчайшем расстоянии от точки до замкнутого выпуклого множества M в гильбертовом пространстве H. Такая задача сводится к определенным вариационным неравенствам, приближенные методы решения которых рассматривались в ряде работ (см., например, [I]-[2]). В этой задаче С.Г.Михлин [3] получил оценки скорости сходимости проекционных методов при определенных предположениях относительно множества M.

Цель настоящей работы - изучение устойчивости и скорости сходимости указанных методов в данной задаче для более широкого класса множеств M и аппроксимирующих подпространств $\tilde{X}$. Тут вводится понятие равностепенной выпуклости, даются оценки погрешности метода через наилучшее приближение. Все рассматриваемые характеристики определяются метрикой гильбертова пространства и потому инвариантны относительно параллельного переноса системы координат в H; это позволяет использовать линейные многообразия $\tilde{X}$, которые не проходят через начало координат (такие многообразия называются плоскостями в H).

В первом параграфе рассматриваются некоторые вопросы устойчивости вариационных неравенств, второй параграф посвящен оценке погрешности проекционных методов через наилучшее приближение элементами пересечения $\tilde{X} \cap M$. Во втором параграфе приводится пример, показывающий точность полученной оценки.

§ I. Об устойчивости решения вариационных неравенств

В первых двух пунктах этого параграфа рассматривается некоторая вспомогательная задача, необходимая для оценки устойчивости вариационных неравенств; третий пункт содержит основные результаты этого параграфа.

I^0. В вещественном гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу об определении решений u системы неравенств

$$(u_0 - u,\ u_0^* - u) \leq \alpha, \tag{I.I}$$

$$\| u - u_0 \|^2 \geq \| u_0^* - u_0 \|^2 - \beta, \tag{I.2}$$

где α и β - вещественные числа, а u_0 и u_0^* - заданные элементы пространства H. Через $V_{\alpha,\beta}$ обозначим множество решений этой задачи, а через ζ – величину $\|u_0^* - u_0\|^2$.

ЛЕММА I. Справедливы следующие утверждения:

I) если $4\alpha+\zeta<0$, то множество $V_{\alpha,\beta}$ пусто;

2) если $4\alpha+\zeta\geqslant 0$, и выполнено одно из условий а) $\zeta\leqslant\beta$, б) $\zeta>\beta$, $\zeta\leqslant 2(\alpha+\beta)$, в) $\zeta>\beta$, $\zeta>2(\alpha+\beta)$, $\zeta(2\alpha+\beta)\geqslant(\alpha+\beta)^2$,

то множество $V_{\alpha,\beta}$ не пусто;

3) если выполнены условия

$$4\alpha+\zeta\geqslant 0,\quad \zeta>\beta;\ \zeta>2(\alpha+\beta),\ \zeta(2\alpha+\beta)<(\alpha+\beta)^2,$$

то множество $V_{\alpha,\beta}$ пусто;

4) если или $4\alpha+\zeta=0$ и выполнено одно из условий а), б), в) или $4\alpha+\zeta>0$ и выполнено условие в) со знаком равенства в последнем неравенстве, то $V_{\alpha,\beta}$ содержит только одну точку;

5) если существует решение u системы неравенств (I.I), (I.2), то $2\alpha+\beta\geqslant 0$ и справедлива оценка

$$\|u-u_0^*\|\leqslant(2\alpha+\beta)^{1/2};$$

6) если $\zeta>0$, то из условия $|\alpha|+|\beta|<\zeta/4$ вытекают неравенства $4\alpha+\zeta>0$, $\zeta>\beta$, $\zeta>2(\alpha+\beta)$, и в этом случае множество $V_{\alpha,\beta}$ пусто или нет в зависимости от того, выполнено ли неравенство $\zeta(2\alpha+\beta)<(\alpha+\beta)^2$ или нет; если $\zeta(2\alpha+\beta)=$ $=(\alpha+\beta)^2$, то множество $V_{\alpha,\beta}$ состоит из одной точки.

ЛЕММА 2. Если $a \underset{def}{=} (u_0-u_0^*,e)<0$, $\|e\|=1$, то при достаточно малых α и β, удовлетворяющих условию $2\alpha+\beta>0$ существуют решения u системы (I.I), (I.2), имеющие вид $u=u_0^*+te$, где $|t|\leqslant t_e$, $t_e=|a|^{-1}\max\{|\alpha|,\frac{|\beta|}{2}\}+0(\alpha^2+\beta^2)$, причем асимптотика в последней формуле равномерна при $\alpha^2+\beta^2\to 0$ относительно параметра a из любой фиксированной области вида $a\leqslant -a_0$, $a_0=const>0$. В случае, когда $(u_0-u_0^*,e)=0$, необходимым и достаточным условием существования решений u вида $u=u_0^*+te$ у системы неравенств (I.I), (I.2) являются соотношения $\alpha\geqslant 0$, $\alpha+\beta\geqslant 0$; в этом случае $|t|\leqslant t_e$, $t_e=\sqrt{\alpha}$.

ЛЕММА 3. Если выполнено условие $a \underset{def}{=} (u_0-u_0^*,e)\leqslant 0$, $\|e\|=1$, и существует решение u системы неравенств (I.I), (I.2) вида $u=u_0^*+t_e$, $t\geqslant 0$, то необходимо $\alpha\geqslant 0$ и $t\leqslant\sqrt{\alpha}$.

2^0. Пусть в гильбертовом пространстве H дано замкнутое множество M ; через ∂M обозначим его границу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Говорят, что множество M в точке $v \in \partial M$ удовлетворяет условию шара с вектором ℓ, если оно не содержит шара $\|u-v-\ell\| < \|\ell\|, u \in H$.

Рассмотрим задачу об определении решения $u \in M$ неравенства

$$(u_0-u,\ u_0^*-u) \leq \alpha\ , \qquad (I.3)$$

где $u_0 \overline{\in} M$, $u_0^* \in \partial M$, α – некоторое вещественное число. Через W_α обозначим множество решений задачи (I.3).

ЛЕММА 4. Если множество M в точке u_0^* удовлетворяет условию шара с вектором $u_0-u_0^*$, то при $\alpha < 0$ задача (I.3) не имеет решений, а при $\alpha \geqslant 0$ решения задачи (I.3) существуют и для любого ее решения u_α^* справедлива оценка

$$\|u_\alpha^* - u_0^*\| \leq \sqrt{2\alpha}\ .$$

Пусть через заданную точку v, $v \in H$, проведена гиперплоскость с нормалью ℓ; она делит пространство на два полупространства. То из них, в которое направлена нормаль ℓ, назовем положительным и обозначим через $H_\ell^+(v)$, а другое назовем отрицательным и будем обозначать $H_\ell^-(v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что множество M выпукло в точке $v \in \partial M$ по вектору ℓ, если оно лежит в полупространстве $H_\ell^-(v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Выпуклое множество M выпукло в каждой точке v своей границы по вектору ℓ, если последний служит внешней нормалью опорной гиперплоскости к M в точке v (напомним, что гиперплоскость называется опорной для выпуклого замкнутого множества, если это множество имеет с гиперплоскостью непустое пересечение и лежит от нее по одну сторону). Выпуклое множество M удовлетворяет условию шара в каждой точке $v \in \partial M$ с упомянутым выше вектором ℓ. Если множество M выпукло в точке $v \in \partial M$ по вектору ℓ, то оно удовлетворяет условию шара с вектором ℓ.

ЛЕММА 5. Если множество M выпукло в точке u_0^* по вектору $u_0-u_0^*$, то при $\alpha<0$ задача (I.3) не имеет решения, а при $\alpha \geqslant 0$ для любого решения u_α^* задачи (I.3) справедлива оценка

$$\|u_\alpha^* - u_0^*\| \leq \sqrt{\alpha}\ .$$

3^0. Пусть M – замкнутое выпуклое множество гильбертова пространства H, а u_0 – точка в H, не содержащаяся в множестве M. Задача об отыскании наилучшего приближения точки u среди точек множества M имеет единственное решение (см., например, [2], стр.49); этой задаче эквивалентна задача об отыскании решения вариационного неравенства

$$(u_0 - u,\ w - u) \leq 0, \quad w \in M. \tag{I.4}$$

Как известно, под решением задачи (I.4) подразумевается элемент u_0^*, который будучи подставлен в (I.4) вместо u, дает верное неравенство, каков бы ни был элемент w из множества M. Поэтому задачу (I.4) можно рассматривать как задачу о решении системы неравенств, получающихся при всевозможных элементах w из M (конечно, как правило, такая система состоит из бесконечного и даже несчетного множества неравенств). Хотя задачу (I.4), следуя [I], можно было бы по-прежнему называть вариационным неравенством, однако, поскольку нам придется также рассматривать близкие задачи, не связанные с вариацией, то мы предпочтем, как правило, говорить о решении системы неравенств (каждое неравенство системы в таких случаях, как и в (I.4), определяется некоторым элементом w, $w \in M$, и все неравенства системы получаются, когда w пробегает все множество M).

Наряду с задачей (I.4) рассмотрим задачу об отыскании элемента $v \in M$, который удовлетворяет системе неравенств

$$(u_0 - v,\ w - v) \leq \alpha, \qquad w \in M; \tag{I.5}$$

здесь α - фиксированное вещественное число.

Множество решений v_α задачи (I.5) обозначим через V_α. Очевидно, для $v_\alpha \in V$ справедлива оценка

$$(u_\alpha - v_\alpha,\ u_0^* - v_\alpha) \leq \alpha,$$

так что $V_\alpha \subset W_\alpha$, где W_α - множество решений задачи (I.3). Благодаря этому, из леммы 4 и замечания I получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА I. При $\alpha < 0$ множество V_α решений задачи (I.5) пусто, при $\alpha = 0$ это множество состоит из одного элемента $v = u_0^*$, а при $\alpha > 0$ множество V_α не пусто и для любого v_α, $v_\alpha \in V_\alpha$ справедлива оценка

$$\| v_\alpha - u_0^* \| \leq \sqrt{\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с замечанием I выпуклое множество M выпукло в каждой точке v своей границы по вектору ℓ, который служит внешней нормалью к опорной гиперплоскости множества M в точке v. В частности, можно положить $\ell = u_0 - u_0^*$. Поскольку множество V_α представляет собой разве лишь часть множества W_α, а по лемме 5 последнее пусто при $\alpha < 0$, то V_α в этом случае тоже пусто. Далее, если $\alpha = 0$, то из леммы 5 видно, что W_α состоит лишь из элемента u_0^*, который, очевидно, удовлетворяет неравенству (I.5). Наконец, при $\alpha \geqslant 0$ имеем $u_0^* \in V_\alpha$, так что множество V_α не пусто и в соответствии с включением $V_\alpha \subset W_\alpha$ и леммой 5 получим $\| v_\alpha - u_0^* \| \leqslant \sqrt{\alpha}$. Теорема доказана.

§ 2. Аппроксимация решения вариационных неравенств

I°. Рассмотрим замкнутую плоскость $\widetilde{X} \subset H$ такую, что пересечение $\widetilde{M} \underset{def}{=} M \cap \widetilde{X}$ не пусто. Будем считать, что M – выпуклое замкнутое множество; тогда $\widetilde{M}$ также выпукло и замкнуто.

Для приближенного решения задачи (I.4) рассмотрим задачу об определении $\widetilde{u}$ из системы неравенств

$$(u_0 - \widetilde{u},\ \widetilde{w} - \widetilde{u}) \leqslant 0, \quad \widetilde{w} \in \widetilde{M}. \tag{2.I}$$

Решение последней задачи (оно, очевидно, существует и единственно) обозначим через $\widetilde{u}_0^*$. Сдвинув, если нужно, начало координат в H в плоскость $\widetilde{X}$, будем далее считать $\widetilde{X}$ подпространством в H. Пусть p – ортопроектор в H на подпространство $\widetilde{X}$.

В соотношение (I.4) подставим $w = \widetilde{w} \in \widetilde{M}$ и $u = u_0^*$. Тогда получим систему верных неравенств

$$(u_0 - u_0^*,\ \widetilde{w} - u_0^*) \leqslant 0, \quad \widetilde{w} \in \widetilde{M}. \tag{2.2}$$

Тождественно преобразуя левую часть в (2.2), найдем

$$(u_0 - u_0^*,\ \widetilde{w} - u_0^*) = (u_0 - u_0^*, \widetilde{w}) - (u_0 - u_0^*, u_0^*) =$$

$$= (pu_0 - pu_0^*, \widetilde{w}) - (u_0 - pu_0, u_0^*) + (u_0^* - pu_0^*, u_0^*) -$$

$$-(pu_0 - pu_0^*,\ u_0^*),$$

откуда теперь имеем

$$(u_0 - u_0^*, \widetilde{w} - u_0^*) = (pu_0 - pu_0^*,\ \widetilde{w} - pu_0^*) -$$

$$-(u_0 - pu_0,\ u_0^* - pu_0^*) - \| u_0^* - pu_0^* \|^2.$$

Итак, систему неравенств (2.2) можно переписать в виде

$$(u_0 - pu_0^*,\ \widetilde{w} - pu_0^*) \leqslant \alpha, \quad \widetilde{w} \in \widetilde{M},$$

где

$$\alpha = (u_0 - pu_0, u_0^* - pu_0^*) - \| u_0^* - pu_0^* \|^2. \qquad (2.3)$$

Это означает, что элемент $\tilde{v}_\alpha^* = pu_0^*$ является решением системы неравенств

$$(u_0 - \tilde{v}, \ \tilde{w} - \tilde{v}) \le \alpha, \quad \tilde{w} \in \tilde{M}.$$

Предположим, что $pu_0^* \in \tilde{M}$; тогда по теореме I (заменяя в ней v_α^* на $\tilde{v}_\alpha^*$, u_0^* на $\tilde{u}_0^*$, w на $\tilde{w}$ и M на $\tilde{M}$) необходимо $\alpha \geqslant 0$, и, кроме того,

$$\| \tilde{v}_\alpha^* - \tilde{u}_0^* \| \le \sqrt{\alpha}. \qquad (2.4)$$

Используя неравенство треугольника при оценке нормы $\| u_0^* - \tilde{u}_0^* \|$ и применяя формулы (2.3) и (2.4) видим, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если M – выпуклое замкнутое множество, $\tilde{X}$ – подпространство в H такое, что $\tilde{M} = \tilde{X} \cap M$ не пусто, а u_0^* и $\tilde{u}_0^*$ – решения задач (I.4) и (2.I) соответственно, то при условии, что $pu_0^* \in \tilde{M}$, справедлива оценка

$$\| u_0^* - \tilde{u}_0^* \| \le q_{\tilde{X}}(u_0^*) + (q_{\tilde{X}}^2(u_0^*) + q_{\tilde{X}}(u_0^*) \ q_{\tilde{X}}(u_0))^{1/2},$$

где p – ортопроектор в H на подпространство $\tilde{X}$, а $q_{\tilde{X}}(u)$ – наилучшее приближение элемента u с помощью элементов пространства $\tilde{X}$, $q_{\tilde{X}}(u) = \| u - pu \|$.

2^0. Из теоремы 2 следует, что если наилучшее приближение элементов u_0 и u_0^* пространствами $\tilde{X}(h)$ имеет одинаковый порядок, то тот же порядок имеет и скорость сходимости приближенного решения $\tilde{u}_0^*(h)$ к точному решению u_0^* . Однако, это утверждение получено при трудно проверяемом предположении, что $pu_0^* \in \tilde{M}$. Приводимые ниже примеры показывают, что без этого предположения для сохранения прежней скорости сходимости необходимы дополнительные ограничения на множество M и на структуру семейства пространств $\{ \tilde{X}(h) \}$.

Рассмотрим решение $\tilde{u}_1^*$ семейства неравенств

$$(u_0^* - \tilde{u}_1^*, \ \tilde{w} - \tilde{u}_1^*) \le 0, \quad \tilde{w} \in \tilde{M}. \qquad (2.5)$$

Из тождества

$$\| u_0^* - u_0 \|^2 = \| \tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^* \|^2 + \| u_0^* - \tilde{u}_1^* \|^2 + \| u_0 - \tilde{u}_0^* \|^2 -$$

$$-2(u_0^*-\tilde{u}_1^*,\ \tilde{u}_0^*-\tilde{u}_1^*)-2(u_0-\tilde{u}_0^*,\ \tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*)-$$

$$-2(u_0^*-\tilde{u}_1^*,\ u_0-\tilde{u}_0^*),$$

ввиду неравенств (2.5) и (2.I) найдем

$$\|u_0^*-u_0\|^2\geqslant\|\tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*\|^2+\|u_0^*-\tilde{u}_1^*\|^2+\|u_0-u_0^*\|^2-$$

$$-2(u_0^*-\tilde{u}_1^*,\ u_0-\tilde{u}_0^*), \tag{2.6}$$

откуда

$$\|u_0^*-u_0\|^2\geqslant\|\tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*\|^2+(\|u_0-\tilde{u}_0\|-\|u_0^*-\tilde{u}_1^*\|)^2. \tag{2.7}$$

Очевидно $\|u_0-u_0^*\|\leqslant\|u_0-\tilde{u}_0^*\|$, так что из (2.7) при предположении $\|u_0-u_0^*\|\geqslant\|\tilde{u}_1^*-u_0^*\|$ вытекает неравенство

$$\|\tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*\|^2\leqslant\|u_0^*-u_0\|^2-(\|u_0-u_0^*\|-\|u_0^*-\tilde{u}_1^*\|)^2.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 3. Если M – замкнутое выпуклое множество в H, а $\tilde{X}$ – подпространство в H, имеющее непустое пересечение с M, то при условии $\|u_0-u_0^*\|\geqslant\|\tilde{u}_1^*-u_0\|$ справедлива оценка

$$\|\tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*\|^2\leqslant 2\|u_0-u_0^*\|\cdot\|u_0^*-\tilde{u}_1\|-\|u_0^*-\tilde{u}_1^*\|^2,$$

где u_0^*, $\tilde{u}_0^*$ и $\tilde{u}_1^*$ – решения задач (I.4), (2.I) и (2.5) соответственно.

Обратимся теперь снова к неравенству (2.6); оно легко преобразуется к виду

$$\|u_0^*-u_0\|^2\geqslant\|\tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*\|^2+\|(u_0^*-\tilde{u}_1^*)-(u_0-\tilde{u}_0^*)\|^2,$$

откуда найдем

$$\|\tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*\|^2\leqslant(\tilde{u}_1^*-\tilde{u}_0^*,\ u_0^*-u_0). \tag{2.8}$$

Предположим, что наилучшее приближение элемента u_0^* элементами подпространства $\tilde{X}$ не лежит в $\tilde{M}$. Тогда $\tilde{u}_1^*\in\partial\tilde{M}$ (граница множества $\tilde{M}$ берется относительно подпространства $\tilde{X}$).

Найдем неотрицательные числа t_0^*, t_1^*, α и единичные векторы ℓ_0^*, ℓ_1^*, e так, чтобы

$$\tilde{u}_i^*=u_0^*+t_i^*\ell_i^*,\quad i=0,1,\qquad u_0=u_0^*-\alpha e.$$

В виду соотношения (2.8) числа t_i^* и векторы ℓ_i^*, $i=0,1$ удовлетворяют неравенству

$$\| t_1\ell_1 - t_0\ell_0\|^2 \leqslant a(t_1\ell_1 - t_0\ell_0, e), \tag{2.9}$$

если в нем взять $t_i = t_i^*$, $\ell_i = \ell_i^*$, $i=0,1$.

ЛЕММА 7. Справедливы такие утверждения:

I) если $(\ell_0, e) > 0$, то все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области

$$t_1 \geqslant \frac{(\ell_0, e)}{(\ell_1, e)}\, t_0, \quad t_0 > 0;$$

2) если $(\ell_0, e) = 0$, $(\ell_1, e) \geqslant 0$, $-1 \leqslant (\ell_1, \ell_0) < 1$, то все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области

$$t_1 \geqslant \delta t_0^2, \quad t_0 > 0, \qquad \delta \in (0, \delta_0),$$

где а) $\delta_0 = a^{-1}(1-|(\ell_1,\ell_0)|^2)/(\ell_1, e)$ при $|(\ell_1,\ell_0)| < 1$;
б) $\delta_0 = [a(\ell_1, e)]^{-1}$ при $(\ell_1, \ell_0) = -1$,

3) если $(\ell_0, e) = 0$, $(\ell_1, e) \geqslant 0$, $(\ell_1, \ell_0) = 1$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $\delta \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 \underset{\mathrm{def}}{=} \min\{1, \varepsilon(1+a(\ell_1, e))^{-1}\}$, положительные решения (t_0, t_1) неравенства (2.9) из полосы $t_0 \in (0, \varepsilon]$ лежат в области $t_1 \geqslant \delta t_0^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\mathcal{D}$ обозначим множество положительных решений неравенства (2.9); эти решения, очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$\psi(t_0, t_1) \leqslant 0, \quad t_0 > 0, \quad t_1 > 0,$$

где

$$\psi(t_0, t_1) \equiv t_0^2 + t_1^2 - 2t_0t_1(\ell_1, \ell_0) - at_1(\ell_1, e) + at_0(\ell_0, e).$$

Пусть L - кривая, задаваемая уравнением $\psi(t_0, t_1) = 0$. Легко видеть, что при $|(\ell_0, \ell_1)| < 1$ кривая L является эллипсом, а при $(\ell_0, \ell_1) = \pm 1$ - параболой. Далее, очевидно следующее:

I) кривая L проходит через начало координат,

2) при $(\ell_0, e) \geqslant 0$ полуось $t_0 > 0$ лежит во внешности области $\mathcal{D}$,

3) при $(\ell_1, e) \geqslant 0$ полуось $t_1 > 0$ пересекает кривую L один раз.

Рассмотрим вопрос о том, пересекают ли кривую L лучи вида $t_1 = \delta t_0$, $t_0 > 0$, $\delta > 0$. Абсцисса t_0 точки пересечения должна удовлетворять уравнению $\psi(t_0, \delta t_0) = 0$, решением которого в области положительных чисел может быть разве лишь число

$$t_0 = a \frac{(\delta \ell_1 - \ell_0, e)}{\| \delta \ell_1 - \ell_0 \|^2} .$$

Отсюда следует, что при $\delta(\ell_1, e) < (\ell_0, e)$ луч $t_1 = \delta t_0$ не пересекает кривую L; в частности, при $(\ell_0, e) > 0$ все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области $t_1 \geqslant \frac{(\ell_0, e)}{(\ell_1, e)} t_0$, $t_0 > 0$; этим доказан первый пункт леммы.

Продифференцируем тождество $\psi(t_0, t_1) \equiv 0$ по t_0; получим

$$2t_0 + 2t_1 t_1' - 2(t_1 + t_0 t_1')(\ell_1, \ell_0) - a t_1'(\ell_1, e) + a(\ell_0, e) \equiv 0 ,$$

откуда при $t_0 = 0$ (с учетом того, что $t_1(0) = 0$) найдем $t_1'(0) = (\ell_0, e)/(\ell_1, e)$. Теперь видно, что при $(\ell_0, e) = 0$ кривая L_1, проходящая через начало координат и не пересекающая область $\mathcal{D}$, в окрестности точки $t_0 = 0$ должна иметь вид $t_1 = o(t_0)$. Будем искать эту кривую в виде $t_1 = \delta t_0^2$, $t_0 > 0$, $\delta > 0$. Уравнение положительной абсциссы t_0 точки пересечения кривых L и L_1 (если эта точка существует), очевидно, имеет вид

$$\delta^2 t_0^3 + t_0 - 2\delta t_0^2 (\ell_1, \ell_0) - a \delta t_0 (\ell_1, e) = 0 ,$$

откуда после подстановки $z = \delta t_0$, найдем

$$|z - (\ell_1, \ell_0)|^2 + (1 - |(\ell_1, \ell_0)|^2) - a(\ell_1, e)\delta = 0 .$$

При $|(\ell_1, \ell_0)| < 1$ для чисел δ, удовлетворяющих условию $a\delta(\ell_1, e) < 1 - |(\ell_1, \ell_0)|^2$, последнее уравнение не имеет решения, и потому при $|(\ell_1, \ell_0)| < 1$ и $(\ell_1, e) \geqslant 0$ все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области $t_1 \geqslant \delta t_0^2$, где $0 < \delta < (1 - |(\ell_1, \ell_0)|^2)\, |a(\ell_1, e)|^{-1}$; утверждение 2), а) доказано.

Если $(\ell_1, \ell_0) = -1$, $(\ell_1, e) \geqslant 0$, то легко найдем два решения рассматриваемого уравнения

$$(t_0)_{1,2} = \delta^{-1}(-1 \pm |a\delta(\ell_1, e)|^{1/2}),$$

откуда видно, что при $\delta \in (0, [a(\ell_1,e)]^{-1})$ положительные решения неравенства (2.9) лежат в области $t_1 \geq \delta t_0^2$, $t_0 > 0$; этим доказано утверждение 2), б). Наконец, при $(\ell_1, \ell_0) = 1$, $(\ell_1, e) \geq 0$ из упомянутого уравнения найдем $(t_0)_{1,2} = \delta^{-1}(1 \pm |a\delta(\ell_1, e)|^{1/2})$. Отсюда легко следует утверждение 3) нашей леммы. Лемма полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что выпуклое замкнутое множество M равностепенно выпукло в точке u_0^* относительно вектора e , если при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = const > 0$,

$$\gamma_\varepsilon(u_0^*, e) = \inf_{\substack{u \in \partial M \setminus U_\varepsilon(u_0^*) \\ v \in U_\varepsilon(u_0^*) \cap \partial M}} \frac{(u - u_0^*, e)\,\|v - u_0^*\|}{(v - u_0^*, e)\,\|u - u_0^*\|} \geq c > 0,$$

где $U_\varepsilon(u_0^*)$ - ε -окрестность точки u_0^* ; константа c от ε не зависит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Число

$$\gamma(u_0^*, e) \underset{def}{=} \inf_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \gamma_\varepsilon(u_0^*, e)$$

назовем степенью выпуклости множества M в точке $u_0^* \in \partial M$ относительно вектора e . Очевидно $\gamma(u_0^*, e) \geq 0$.

Пусть $\mathcal{T}_e = \mathcal{T}_e(u_0^*)$ - множество единичных векторов, исходящих из u_0^* и ортогональных вектору e . Возьмем $n \in \mathcal{T}_e$ и проведем через n и e двумерную плоскость. Рассмотрим в ней декартову систему координат (x, y) , направив ось x вдоль вектора n , а ось y - вдоль e . Предположим, что сечение этой плоскостью поверхности ∂M имеет вид (для $x > 0$)

$$y = f_n(x),$$

где $f_n(0) = 0$, $f_n(x) > 0$, $x > 0$.

Очевидно, $u_0^* = (0,0)$; положим $u = (x, f_n(x))$, тогда $(u - u_0^*, e) = f_n(x)$, $\|u - u_0^*\| = (x^2 + |f_n(x)|^2)^{1/2}$. В плоскости, проходящей через векторы e и $m \in \mathcal{T}_e$, аналогично предыдущему положим $v=(x', f_m(x'))$; тогда $(v-u_0^*, e)=f_m(x')$, $\|v-u_0^*\|=$ $=(x'^2+|f_m(x')|^2)^{1/2}$. Будем считать, что $(x, f(x))\in \mathcal{U}_\varepsilon(u_0^*)$, $(x', f(x'))\in \mathcal{U}_\varepsilon(u_0^*)$. Тогда

$$\frac{(u-u_0^*, e)\,\|v-u_0^*\|}{(v-u_0^*, e)\,\|u-u_0^*\|} \geqslant \frac{f_n(x_\varepsilon, n)}{f_m(x_\varepsilon, m)},$$

где $x_{\varepsilon,n}$ и $x_{\varepsilon,m}$ определяются из уравнений

$$|f_n(x_{\varepsilon,n})|^2+x_{\varepsilon,n}^2=\varepsilon^2, \qquad |f_m(x_{\varepsilon,m})|^2+x_{\varepsilon,m}^2=\varepsilon^2$$

соответственно.

Если $f_n(x)=o(x)$, то $x_{\varepsilon,n}=\varepsilon+o(\varepsilon)$, если же $f_n(x)=$ $=O(x)$, то $x_{\varepsilon,n}=c\varepsilon+O(\varepsilon)$, а при $f_n^{-1}(x)=0(x)$ получим $x_{\varepsilon,n}=f_n^{-1}(\varepsilon)+0(f_n^{-1}(\varepsilon))$.

Отсюда легко вытекает

ТЕОРЕМА 6. Если в сечении двумерной плоскостью $\mathcal{P}$, проходящей через векторы e и $n\in \mathcal{T}_e(u_0^*)$, уравнение кривой $\partial M\cap\mathcal{P}$ имеет вид $y=f_n(x)$, где $f_n(x)>0$ при $x>0$, $f_n(x)=o(1)$, и с независящими от $m, n\in \mathcal{T}_e(u_0^*)$ положительными константами c_0 и c_1 выполнены соотношения

$$c_0 f_m(x)\leqslant f_n(x)\leqslant c_1 f_m(x), \quad x\in(0, \varepsilon_0),$$

то M равностепенно выпукло в точке u_0^* относительно e.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $f_n\in C^{k+1}[0, \varepsilon_0]$, причем $f_n^{(i)}(+0)=0$, $i=0,1,\dots,k-1$, $k\geqslant 1$ и $c_0 f_m^{(k)}(+0)\leqslant f_n^{(k)}(+0)\leqslant c_1 f_m^{(k)}(+0)$ $|f_n^{k+1}(x)|\leqslant C$ с положительными константами c_0, c_1, C и ε_0, не зависящими от $m, n\in\mathcal{T}_e(u_0^*)$ и $x\in[0,\varepsilon_0]$, то M равностепенно выпукло в точке u_0^* относительно внутренней нормали к поверхности ∂M в точке u_0^*.

ТЕОРЕМА 7. Если множество M равностепенно выпукло в точке u_0^* относительно $u_0^*-u_0$, то справедлива оценка

$$\|\tilde{u}_0^*-u_0^*\|\leqslant c\,\|\tilde{u}_1^*-u_0^*\|,$$

где

$$c=\max\{1, [\gamma(u_0^*, u_0^*-u_0)]^{-1}\},$$

а $\gamma(u_0^*, u_0^*-u_0)$ – степень выпуклости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем неотрицательные числа t_i^* и единичные векторы ℓ_i^* так, чтобы $\tilde{u}_i^* - u_0^* = t_i^* \ell_i^*$, $i = 0,1$. Очевидно, пара чисел (t_0^*, t_1^*) лежит в объединении множеств решений неравенств (2.9), в которых $ae = u_0^* - u_0$, $a > 0$, $\|e\| = 1$, а ℓ_0, ℓ_1 всевозможные единичные векторы со свойством: существуют числа $t_i \geqslant 0$, $i = 0,1$, такие, что

$$u_i \underset{def}{=\!=} u_0^* + t_i \ell_i \in \partial M . \tag{2.10}$$

Множество пар (ℓ_0, ℓ_1) со свойством (2.10) обозначим через $\mathcal{M}$. Из множества $\mathcal{M}$ исключим те пары (ℓ_0, ℓ_1), для которых

$$\| u_1 - u_0^* \| \geqslant \| u_0 - u_0^* \| , \tag{2.11}$$

и обозначим множество оставшихся пар через $\mathcal{L}$. Очевидно, для каждой пары $(\ell_0, \ell_1) \in \mathcal{L}$ найдется $\varepsilon > 0$ так, что $t_1 = \| u_1 - u_0^* \| < \varepsilon < \| u_0 - u_0^* \| = t_0$, и значит, $u_1 \in \partial M \cap U_\varepsilon(u_0^*)$, $u_0 \in \partial M \setminus U_\varepsilon(u_0^*)$.

В виду предположения о равностепенной выпуклости имеем для любых $(\ell_0, \ell_1) \in \mathcal{L}$

$$\frac{(\ell_0, e)}{(\ell_1, e)} = \frac{(u_0 - u_0^*, e) \| u_1 - u_0^* \|}{(u_1 - u_0^*, e) \| u_0 - u_0^* \|} \geqslant \gamma(u_0^*, e) > 0 ,$$

так что по лемме 7 для тех пар чисел (t_0', t_1'), которые служат решением какого-либо из неравенств (2.9) при $(\ell_0, \ell_1) \in \mathcal{L}$ получим $t_1' \geqslant \gamma(u_0^*, e)\, t_0'$. Отсюда и из неравенства (2.11) найдем, в частности,

$$\| \tilde{u}_1^* - u_0^* \| \geqslant \min \{ 1, \gamma(u_0^*, e) \} \, \| \tilde{u}_0^* - u_0^* \| .$$

Теорема доказана.

Покажем, что равностепенная выпуклость существенна для справедливости заключения теоремы 7 даже в конечномерном случае.

Пусть $H = R^3$, $u_0 = (0, 0, a)$, $a > 0$, а M – двумерная выпуклая область, расположенная в полуплоскости

$$-\infty < x_1 < +\infty , \quad x_2 = 0 , \quad -\infty < x_3 \leqslant 0 ,$$

причем M содержит полукруг

$$K = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_3^2 \leqslant b^2 , \; x_3 \leqslant 0 , \; x_2 = 0 \} .$$

В дальнейшем a и b – фиксированные положительные числа, $a > b$.

Очевидно, $u_0^* = (0,0,0)$, и не существует вектора e, относительно которого множество M является равностепенно выпуклым в точке u_0^*.

Будем рассматривать такие плоскости $\widetilde{X}$ в R^3, что пересечение $\widetilde{M} = M \cap \widetilde{X}$ не пусто, а ближайшая к u_0 точка $\tilde{u}_0^*$ на $\widetilde{M}$ лежит на отрезке $|x_1| \leq b$, $x_2 = x_3 = 0$. Множество $\widetilde{M}$ представляет собой отрезок, имеющий лишь одну общую точку $\tilde{u}_0^*$ с кругом $x_1^2 + (x_3 - a)^2 \leq \widetilde{R}^2$, $x_2 = 0$, где $\widetilde{R}^2 = \| u_0 - \tilde{u}_0^* \|^2$. Проведем к нему касательную в точке $\tilde{u}_0^*$ и обозначим через α острый угол, образованный ею с осью x_1. Очевидно, $tg\,\alpha = \| u_0^* - \tilde{u}_0^* \| / a$. Пусть плоскость $\widetilde{X}$ построена так, что отрезок $\widetilde{M} = M \cap \widetilde{X}$ образует с осью x_1 угол 2α. Обозначая через $\tilde{u}_1^*$ наилучшее приближение элемента u_0^* точками отрезка $\widetilde{M}$, легко найдем $\| u_0^* - \tilde{u}_1^* \| = \| u_0^* - \tilde{u}_0^* \| \cdot \sin 2\alpha$, откуда вытекает оценка

$$\| u_0^* - \tilde{u}_1^* \| \leq \| u_0^* - \tilde{u}_0^* \|^2 \, a^{-1} . \qquad (2.12)$$

Таким образом, в классе всех плоскостей $\widetilde{X}$, для которых пересечение $\widetilde{M} = M \cap \widetilde{X}$ не пусто, заключение теоремы 7 не может быть верно. Можно сузить этот класс с сохранением последнего свойства, например, можно проводить эти плоскости через одну точку пространства.

Заметим, что легко построить телесное множество M со свойством

$$\| u_0^* - \tilde{u}_1^* \| \leq c \, \| u_0^* - \tilde{u}_0^* \|^2 , \qquad (2.13)$$

где константа c одна и та же для всех подпространств нашего семейства. Действительно, малый поворот рассмотренного ранее плоского множества вокруг оси x_1 лишь мало изменяет константу в неравенстве (2.12), так что зачерчиваемое этим множеством клинообразное тело обладает свойством (2.13).

Литература

1. Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М., "Мир", 1979, 574 с.
2. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., "Мир", 1975, 496 с.

3. М и х л и н С.Г. О приближенном решении односторонних вариационных задач. "Изв.вузов. Мат.", 1980, № 2, с.1-14.
4. Г л а з м а н И.М., Л ю б и ч Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М., "Наука", 1969, 475 с.