Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

M. S. Verbitsky, Vanishing Theorems for Locally Conformal Hyperkähler Manifolds, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 2004, Volume 246, 64–91

https://www.mathnet.ru/eng/tm146

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
December 11, 2025, 09:48:07

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 246, с. 64–91

УДК 514.764.226+515.179.22+515.165.4

Теоремы о занулении когомологий для локально конформно гиперкэлеровых многообразий[1]

©2004 г. М. С. Вербицкий[2]

Поступило в феврале 2004 г.

Пусть M — компактное локально конформно гиперкэлерово многообразие. Мы доказываем версию теоремы Кодаиры–Накано о занулении когомологий M. Из этой теоремы выводится, что на M нет глобальных голоморфных дифференциальных форм и когомологии структурного пучка $H^i(\mathcal{O}_M)$ зануляются для $i > 1$. Также мы доказываем, что первое число Бетти M равно 1. Из этого вытекает структурная теорема для локально конформных гиперкэлеровых многообразий, описывающая их в терминах 3-сасакиевой геометрии. Аналогичные результаты доказаны для компактных локально конформно кэлеровых многообразий Эйнштейна–Вейля.

1. ВВЕДЕНИЕ (65): 1.1. Локально конформно гиперкэлеровы многообразия (65). 1.2. Теоремы о занулении когомологий для ЛКГК-многообразий (66). 1.3. Геометрия ЛКГК-многообразий (66). 1.4. 3-Сасакиева геометрия и структурная теорема для ЛКГК-многообразий (67). 1.5. Подмногообразия вайсмановых многообразий (68).
2. ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО ГИПЕРКЭЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ (68): 2.1. Структуры Вейля (68). 2.2. ЛКГК-многообразия: определение (69).
3. ВАЙСМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ (70).
4. КЭЛЕРОВ ПОТЕНЦИАЛ НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ (71).
5. ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО КЭЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ (72).
6. ФОРМА ω_0 НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ (73): 6.1. Форма ω_0: определение и собственные значения (73). 6.2. Форма ω_0 и каноническое слоение (75). 6.3. Кривизна весового расслоения (76).
7. КЭЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ ФОРМЫ ω_0 (76): 7.1. $SL(2)$-тройка L_0, Λ_0, H_0 (77). 7.2. Тождества Кодаиры для дифференциала ∂_0 (77). 7.3. Операторы Лапласа с коэффициентами в расслоении (79). 7.4. Двойственность Серра для $\overline{\partial}_0$-когомологий (80).
8. ТЕОРЕМЫ О ЗАНУЛЕНИИ КОГОМОЛОГИЙ НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ (81): 8.1. Теорема о занулении когомологий для дифференциала ∂_0 (81). 8.2. Базовые когомологии (81). 8.3. Когомологии структурного пучка (82).
9. ГОЛОМОРФНЫЕ ФОРМЫ НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ (82): 9.1. ω_0-Янг–миллсовы расслоения (82). 9.2. Теоремы о занулении когомологий для отрицательных расслоений (84). 9.3. Зануление голоморфных форм (84).
10. ВВЕДЕНИЕ В САСАКИЕВУ ГЕОМЕТРИЮ (85).
11. ВАЙСМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С $h^1(M) = 1$ И САСАКИЕВА ГЕОМЕТРИЯ (86): 11.1. Вайсмановы многообразия с точной формой Ли (86). 11.2. Структурная теорема для вайсмановых многообразий с первым числом Бетти 1 (86). 11.3. Структурные теоремы для локально конформно гиперкэлеровых многообразий и вайсмановых многообразий Эйнштейна–Вейля (88). 11.4. Квазирегулярные локально конформно гиперкэлеровы многообразия (88).
Приложение А. $h^1(M) = 1$ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО КЭЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ (89).
Приложение Б. КОНТРПРИМЕРЫ (89).

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке CRDF (проект RM1-2354-MO02) и EPSRC (проект GR/R77773/01).

[2]Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow, Scotland; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: verbit@maths.gla.ac.uk; verbit@mccme.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Локально конформно кэлеровы и гиперкэлеровы многообразия были предметом интенсивного изучения многих геометров на протяжении последних 20 лет. Локально конформно кэлеровым многообразиям посвящена монография [12], локально конформно гиперкэлеровым — обзор [24]; обе работы снабжены подробной библиографией и обзором известных результатов. Ключевым понятием в этой области является понятие вайсманова многообразия, также известного как обобщенное многообразие Хопфа (определение 3.7). Эти многообразия были обнаружены И. Вайсманом, посвятившим им серию статей в начале 1980-х гг. (см. [34, 35] и библиографию в монографии [12]).

В настоящей работе мы доказываем теоремы о занулении когомологий для локально конформно гиперкэлеровых многообразий и локально конформно кэлеровых многообразий Эйнштейна–Вейля и используем эти результаты для получения структурных теорем. Похожие теоремы о занулении когомологий были доказаны в [1] с помощью оценок на кривизну Риччи.

В физике теоремы о занулении когомологий для локально конформно кэлеровых многообразий интерпретируются как условия для существования определенных струнных компактификаций [28, 18, 19].

1.1. Локально конформно гиперкэлеровы многообразия. Пусть M — гладкое многообразие, снабженное операторами

$$I, J, K \in \operatorname{End}(TM),$$

удовлетворяющими кватернионным соотношениям

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \qquad I \circ J = -J \circ I = K.$$

Предположим, что операторы I, J, K индуцируют интегрируемые комплексные структуры на M. Тогда M называется *гиперкомплексным многообразием*. По теореме Обаты [23] гиперкомплексное многообразие допускает связность без кручения, сохраняющую I, J, K, и эта связность единственна. Если связность Обаты сохраняет метрику g, многообразие (M, g, I, J, K) называется *гиперкэлеровым*. Гиперкэлеровы многообразия были впервые определены Э. Калаби [10], а гиперкомплексные многообразия много позже Ч.П. Бойером [4].

Гиперкомплексное многообразие M называется локально конформно гиперкэлеровым (ЛКГК), если накрытие M гиперкэлерово и преобразование монодромии сохраняет конформный класс гиперкэлеровой метрики.

Простейший пример ЛКГК-многообразия — многообразие Хопфа, которое определяется следующим образом. Зафиксируем кватернион $q \in \mathbb{H}$, $|q| > 1$. Рассмотрим многообразие $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n \backslash 0$, и пусть $M := \widetilde{M}/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ действует на $\widetilde{M}$ правыми кватернионными растяжениями,

$$(i, z) \to z \cdot q^i, \qquad z \in \mathbb{H}^n, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку действие кватернионов справа совместимо с гиперкомплексной структурой на $\mathbb{H}^n$, многообразие M локально конформно гиперкэлерово.

Другие примеры ЛКГК-многообразий возникают из кватернионно кэлеровой геометрии (определение и основные свойства кватернионно кэлеровых многообразий см. в [3]). Мы не будем использовать эти примеры; читатель, не интересующийся кватернионно кэлеровой геометрией, может пропустить следующий абзац.

Пусть дано кватернионно кэлерово многообразие Q с положительной скалярной кривизной (к примеру, кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$). Рассмотрим соответствующее расслоение Суона $\mathcal{U}(Q)$, расслоенное над Q со слоем $\mathbb{C}^2 \backslash 0$ в случае, если Q — спин-многообразие, и $\mathbb{C}^2 \backslash 0/\{\pm 1\}$, если Q не спин-многообразие [29]. Тотальное пространство $\mathcal{U}(Q)$

гиперкэлерово, и естественная гомотетия ρ_t действует на $\mathcal{U}(Q)$, сохраняя гиперкомплексную структуру, и умножает гиперкэлерову метрику на число. Рассмотрим фактор $M := \mathcal{U}(Q)/\rho_{q^i}$, $i \in \mathbb{Z}$, где $q > 1$ — фиксированное вещественное число. Если Q компактно, M тоже компактно. По построению M локально конформно гиперкэлерово. Если $Q = \mathbb{H}P^n$, то $\mathcal{U}(Q) = \mathbb{C}^{2n} \setminus 0$ и $M = \mathbb{C}^{2n} \setminus 0/\{q^n\}$ — многообразие Хопфа.

1.2. Теоремы о занулении когомологий для ЛКГК-многообразий. В этой работе мы получаем различные результаты о занулении когомологий для ЛКГК (локально конформно гиперкэлеровых) многообразий. Мы пользуемся комплексно аналитическими аргументами того же типа, какие используются при доказательстве теоремы Кодаиры–Накано о занулении. Среди прочего мы получаем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть M — компактное ЛКГК-многообразие, не гиперкэлерово. Рассмотрим M как комплексное многообразие с комплексной структурой I, индуцированной гиперкэлеровой структурой. Тогда*

(i) *M не допускает нетривиальных голоморфных форм*;

(ii) *когомологии структурного пучка M удовлетворяют $H^i(\mathcal{O}_M) = 0$ для $i > 1$ и $\dim H^1(\mathcal{O}_M) = 1$*;

(iii) *первое число Бетти M равно* 1.

Доказательство. Это теоремы 9.7, 8.4 и 9.8. □

Используя спектральную последовательность Дольбо, нетрудно вывести теорему 1.1(iii) из (i) и (ii). Также теорему 1.1(iii) можно вывести из простых геометрических аргументов (см. приложение A).

Аналогичные результаты получены для компактных локально конформно кэлеровых многообразий Эйнштейна–Вейля.

1.3. Геометрия ЛКГК-многообразий. Рассмотрим компактное ЛКГК-многообразие M. Тогда M допускает специальную метрику, впервые обнаруженную П. Годушоном (определение 3.4). Метрика Годушона определяется следующим образом.

Пусть $\widetilde{M}$ — гиперкэлерово накрытие M. Поскольку монодромия действует на накрытии, сохраняя конформный класс метрики, многообразие M снабжено канонической конформной структурой $[g]$. Связность Обаты ∇ на гиперкэлеровом многообразии совпадает со связностью Леви-Чивиты. Следовательно, ∇ сохраняет конформный класс и параллельный перенос вдоль ∇ умножает метрику $g \in [g]$ на число. Мы получаем $\nabla(g) = g \otimes \theta$, где θ — 1-форма, которая называется *формой Ли многообразия* (M, g).

Метрика $g \in [g]$ называется *метрикой Годушона*, если θ козамкнута: $d^*\theta = 0$. Годушон доказал, что такая метрика существует и единственна с точностью до гомотетии (лемма 3.3).

Пусть дано ЛКГК-многообразие с метрикой Годушона. Тогда форма Ли параллельна по отношению к связности Леви-Чивиты, ассоциированной с этой метрикой (теорема 3.6).

Двойственное θ векторное поле $\theta^\sharp$ тоже параллельно, а следовательно, киллингово. Более того, поток диффеоморфизмов, связанный с $\theta^\sharp$, совместим с гиперкомплексной структурой на M (предложение 4.1). Если мы поднимем $\theta^\sharp$ на гиперкэлерово накрытие $\widetilde{M}$, соответствующий поток диффеоморфизмов умножает гиперкэлерову метрику на число. Это позволяет выписать кэлеров потенциал на $\widetilde{M}$ явно через форму Ли (предложение 4.4).

Применяя предложение 4.4 к разным комплексным структурам, индуцированным гиперкэлеровой структурой, мы обнаруживаем, что $\widetilde{M}$ снабжено *гиперкэлеровым потенциалом*, т.е. функцией, являющейся кэлеровым потенциалом для всех индуцированных комплексных структур.

Гиперкэлеровы многообразия, допускающие гиперкэлеров потенциал, были изучены А. Суонном [29]. Такие многообразия тесно связаны с кватернионно кэлеровой геометрией. Рассмотрим 4-мерное слоение Φ, порожденное градиентом $\theta^\sharp$ гиперкэлерова потенциала и полями

$$I(\theta^\sharp),\ J(\theta^\sharp),\ K(\theta^\sharp).$$

Это слоение интегрируемое, плоское и вполне геодезическое. Пространство слоев Φ кватернионно кэлерово. Это влечет интересные структурные теоремы для гиперкэлеровых многообразий, допускающих гиперкэлеров потенциал (см. [29]).

ЛКГК-геометрия гораздо тоньше в силу того, что слоение Φ не обязательно глобально интегрируемо на M.

Пусть M — ЛКГК-многообразие, снабженное метрикой Годушона, θ — его форма Ли и Φ — 4-мерное слоение, порожденное $\theta^\sharp$, $I(\theta^\sharp)$, $J(\theta^\sharp)$, $K(\theta^\sharp)$. Можно говорить о пространстве листов Φ, если каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $U \subset M$ такую, что пересечение каждого листа Φ и U имеет конечное число компонент связности (иначе пространство листов будет нехаусдорфово). В этом случае слоение Φ и ЛКГК-многообразие M называются *квазирегулярными*. Пространство листов Y квазирегулярного слоения — всегда орбиобразие.

Теорема 1.1(iii) (равенство $h^1(M) = 1$) доказана для квазирегулярных ЛКГК-многообразий [25]. Если M — квазирегулярное ЛКГК-многообразие, пространство листов Q — кватернионно кэлерово орбиобразие и M расслоено над Q со слоями, которые изоморфны поверхностям Хопфа [24, 25].

В этой работе мы доказываем аналогичную структурную теорему для ЛКГК-многообразий, но без предположения квазирегулярности.

1.4. 3-Сасакиева геометрия и структурная теорема для ЛКГК-многообразий. Вместо того чтобы говорить о кватернионно кэлеровых орбиобразиях, удобнее пользоваться языком 3-сасакиевой геометрии. 3-Сасакиево многообразие локально представляет собой расслоение над кватернионно кэлеровым орбиобразием со слоем, изоморфным $SU(2)/\Gamma$, где $\Gamma \subset SU(2)$ — конечная подгруппа в $SU(2)$.

3-Сасакиевы многообразия определяются следующим образом.

Пусть дано риманово многообразие (X, g). *Конус* $C(X)$ над X — это риманово многообразие $X \times \mathbb{R}^{>0}$ с метрикой $t^2 g + dt^2$, где t — параметр на $\mathbb{R}^{>0}$. 3-*Сасакиева структура* на римановом многообразии X — это гиперкэлерова структура на $C(X)$, определенная таким образом, что отображение $(x, t) \to (x, qt)$ голоморфно для всех $q \in \mathbb{R}^{>0}$ и всех индуцированных комплексных структур на $C(X)$. 3-Сасакиевы многообразия были открыты в конце 1960-х гг. (см. [33] и [21]) и интенсивно изучались японскими дифференциальными геометрами, но после середины 1970-х гг. эти исследования были прекращены и забыты. В конце 1980-х гг. оказалось, что 3-сасакиева геометрия играет важную роль в струнной физике. Бойер, Галицкий и Манн возобновили исследования 3-сасакиевых многообразий в начале 1990-х гг. [7]; историю вопроса и великолепный обзор основных результатов можно найти в [5].

3-Сасакиевы многообразия (и более общо, многообразия Эйнштейна–Сасаки) могут быть получены как тотальные пространства расслоений со слоем окружность над орбиобразиями Эйнштейна–Фано. Это дает возможность строить многообразия Эйнштейна–Сасаки (а гипотетически и 3-сасакиевы многообразия) исходя из алгебраической геометрии (см. [6, 8, 9]).

Пусть дано ЛКГК-многообразие M. Его универсальное накрытие $\widetilde{M}$ по определению гиперкэлерово. Используя явное описание гиперкэлеровой метрики на $\widetilde{M}$ в терминах метрики Годушона (предложение 4.4), можно доказать, что $\widetilde{M}$ есть конус риманова многообразия: $\widetilde{M} = C(X)$, где X 3-сасакиево (предложение 11.1).

Зафиксируем $q \in \mathbb{R}^{>1}$. Рассмотрим отношение эквивалентности на $C(X)$, порожденное $(x, t) \sim (x, qt)$. Фактор-пространство $C(X)/{\sim_q}$, очевидно, является ЛКГК-многообразием.

Структурная теорема (теорема 11.6) описывает любое компактное ЛКГК-многообразие в терминах 3-сасакиевой геометрии следующим образом. Мы доказываем, что $M \cong C(X)/{\sim_{\varphi,q}}$, где $q \in \mathbb{R}^{>1}$, $\varphi\colon X \to X$ — 3-сасакиева изометрия, а $\sim_{\varphi,q}$ — отношение эквивалентности на $C(X)$, порожденное $(x,t) \sim (\varphi(x), qt)$.

1.5. Подмногообразия вайсмановых многообразий. Мы также получаем следующее

Предложение 1.2. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие и $X \subset M$ — замкнутое комплексное подмногообразие. Тогда X касательно к каноническому голоморфному слоению Ξ, порожденному векторным полем, двойственным форме Ли. В частности, если X гладко, то X — также вайсманово многообразие.*

Доказательство. См. предложение 6.5. $\square$

Предложение 1.2 было доказано в случае гладких многообразий К. Цукадой [32].

2. ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО ГИПЕРКЭЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

В этом разделе мы даем определения и приводим некоторые результаты из геометрии многообразий Вейля и локально конформных гиперкэлеровых многообразий. Мы следуем [24].

2.1. Структуры Вейля. Введение в геометрию Вейля и дальнейшие ссылки по этой теме см., например, в [11].

Определение 2.1. Пусть (M,g) — риманово многообразие, а ∇ — связность без кручения на M. Предположим, что ∇ сохраняет конформный класс g, иначе говоря,

$$\nabla g = g \otimes \theta \in S^2T^*M \otimes T^*M, \tag{2.1}$$

где θ — 1-форма. Тогда (M,g,∇,θ) называется *многообразием Вейля.* Если $d\theta = 0$, M называется *замкнутым многообразием Вейля.* Форма θ называется *формой Ли* или же *полем Хиггса многообразия M.* Связность, удовлетворяющая (2.1), называется *связностью Вейля.*

Замечание 2.2. Пусть M — риманово многообразие, снабженное связностью Леви-Чивиты. Тогда M — многообразие Вейля с тривиальной формой θ.

Легко видеть, что для каждого многообразия Вейля (M,g,∇,θ) и функции $\zeta\colon M \to \mathbb{R}$

$$(M, e^{\zeta}g, \nabla, \theta + d\zeta)$$

— тоже многообразие Вейля. В самом деле,

$$\nabla(e^{\zeta}g) = e^{\zeta}\nabla(g) + e^{\zeta}g \otimes d\zeta = e^{\zeta}g \otimes (\theta + d\zeta).$$

Определение 2.3. В этих предположениях

$$(M,g,\nabla,\theta) \qquad \text{и} \qquad (M, e^{\zeta}g, \nabla, \theta + d\zeta)$$

называются *глобально конформно эквивалентными.*

Пусть (M,g,∇,θ) — многообразие Вейля, а $L_{\mathbb{R}}$ — тривиальное вещественное одномерное расслоение на M. Обозначим тривиальную связность на L через ∇_{tr}. Рассмотрим связность ${}^L\nabla := \nabla_{\mathrm{tr}} - \frac{\theta}{2}$ на L. Если (M,g,∇,θ) замкнуто, расслоение $(L, {}^L\nabla)$ плоско, поскольку $({}^L\nabla)^2 = d\theta = 0$. Обозначим через L комплексификацию $L_{\mathbb{R}}$ с индуцированной связностью.

Определение 2.4. Расслоение $(L, {}^L\nabla)$ называется *весовым расслоением многообразия Вейля M.* Весовое расслоение снабжено канонической тривиализацией λ.

Утверждение 2.5. *Пусть (M,g,∇,θ) и (M,g',∇,θ') — конформно эквивалентные многообразия Вейля, а L, L' — соответствующие весовые расслоения. Тогда L, L' изоморфны как плоские расслоения.*

Доказательство. Напишем $g' = e^{\zeta} g$, $\theta' = \theta + d\zeta$. Пусть λ, λ' — сечения L, L', индуцирующие стандартную тривиализацию. Тогда $e^{\zeta}\lambda$ удовлетворяет

$$^{L}\nabla(e^{\zeta}\lambda) = \theta + d\zeta(e^{\zeta}\lambda) = \theta' + {}^{L}\nabla(e^{\zeta}\lambda). \qquad \square$$

Замечание 2.6. Используя тривиализацию L, мы можем рассмотреть g как 2-форму на M со значениями в $L^{\otimes 2}$. Тогда g — параллельное сечение $S^2T^*M \otimes L^{\otimes 2}$.

Замечание 2.7. Обозначим через $\mathcal{P}$ главное $GL(n)$-расслоение, ассоциированное с TM ($n = \dim_{\mathbb{R}} M$). Очевидно, L — присоединенное к $\mathcal{P}$ линейное расслоение, связанное с представлением $(\det T^*M)^{-1/n}$.

Пусть (M, g, ∇, θ) — замкнутое расслоение Вейля, а L — его весовое расслоение, снабженное естественной плоской связностью $^{L}\nabla$. Рассмотрим накрытие M

$$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{\theta})$$

такое, что поднятие $\widetilde{L}$ расслоения L на $\widetilde{M}$ имеет тривиальную монодромию. Пусть ζ_0 — ненулевое сечение $\widetilde{L}$, параллельное относительно $^{L}\nabla$, а $\lambda \in L$ — тривиализация, определенная на L как на весовом расслоении. Отношение $\zeta := \frac{\zeta_0}{\lambda} \in C^{\infty}(M)$ удовлетворяет

$$d\zeta = \frac{\nabla_{\mathrm{tr}}(\zeta_0)}{\lambda} = \frac{\theta}{2},$$

поскольку $\nabla_{\mathrm{tr}} - {}^{L}\nabla = \frac{\theta}{2}$. Следовательно, расслоения

$$(M, g, \nabla, \theta) \qquad \text{и} \qquad (M, e^{2\zeta} g, \nabla, 0)$$

конформно эквивалентны. Мы получили следующее

Утверждение 2.8. *Пусть (M, g, ∇, θ) — замкнутое многообразие Вейля, а $(L, {}^{L}\nabla)$ — его весовое расслоение. Предположим, что монодромия L тривиальна. Тогда (M, g, ∇, θ) конформно эквивалентно риманову многообразию, снабженному связностью Леви-Чивиты. Обратно, если (M, g, ∇, θ) конформно эквивалентно риманову многообразию, то весовое расслоение имеет тривиальную монодромию.* $\square$

2.2. ЛКГК-многообразия: определение.

Определение 2.9. Пусть M — гиперкомплексное многообразие, а ∇ — связность Обаты на M (см. п. 1.1). Предположим, что M снабжено кватернионной эрмитовой метрикой g и замкнутой формой θ, а (M, g, ∇, θ) — многообразие Вейля. Тогда M называется *локально конформно гиперкэлеровым многообразием* или *ЛКГК-многообразием.*

Пусть M — ЛКГК-многообразие, L — его весовое расслоение, а $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \widetilde{\nabla})$ — накрытие, ассоциированное с группой монодромии L. Утверждение 2.8 дает риманову метрику $g' = e^{2\zeta}\widetilde{g}$, которая сохраняется связностью $\widetilde{\nabla}$. Значит, $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты для $(\widetilde{M}, g')$. С другой стороны, $\widetilde{\nabla}$ сохраняет действие кватернионов. Как мы отмечали во введении (п. 1.1), это значит, что $(\widetilde{M}, g')$ гиперкэлерово. Мы получили

Утверждение 2.10. *Пусть M — ЛКГК-многообразие, L — его весовое расслоение, а $\widetilde{M}$ — накрытие M, ассоциированное с группой монодромии L. Тогда $\widetilde{M}$ снабжено гиперкэлеровой метрикой, которая определена однозначно с точностью до постоянного множителя.* $\square$

Обратное утверждение также верно.

Предложение 2.11. *Пусть M — гиперкомплексное многообразие, а $\widetilde{M}$ — его универсальное накрытие. Предположим, что $\widetilde{M}$ снабжено гиперкэлеровой метрикой g' таким образом, что для любого $\gamma \in \pi_1(M)$ соответствующее преобразование монодромии $k_\gamma \colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ умножает g' на число $c(\gamma) \in \mathbb{R}$. Тогда M локально конформно гиперкэлерово.*

Доказательство. Отображение $\gamma \to c(\gamma)$ определяет одномерное представление c: $\pi_1(M) \to \mathbb{R}^{>0}$. Пусть L — соответствующее плоское расслоение на M. Поскольку $\mathbb{R}^{>0}$ стягиваемо, L топологически тривиально. Выберем нигде не зануляющееся сечение $\lambda \in L$. Гиперкэлерова метрика $\widetilde{g}$ на $\widetilde{M}$ может быть рассмотрена как отображение $S^2T^*M \to L^{\otimes 2}$. Используя λ^2 как тривиализацию $L^{\otimes 2}$, мы получим кватернионно эрмитову метрику g_λ на M. Очевидно,

$$\nabla g_\lambda = \nabla(\lambda^2 \widetilde{g}) = \lambda^2 \widetilde{g} \otimes \nabla(\lambda^2) = g_\lambda \otimes (-2\theta_L),$$

где θ_L — форма связности на L, ассоциированная с тривиализацией λ. Следовательно, $(M, g_\lambda, \nabla, -2\theta_L)$ — ЛКГК-многообразие. $\square$

Замечание 2.12. Предложение 2.11 удобно использовать в качестве определения ЛКГК-многообразия.

3. ВАЙСМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

В этом разделе даются предварительные материалы по локально конформно кэлеровой геометрии. Детали и подробную библиографию можно найти, например, в монографии [12].

Определение 3.1. Пусть M — комплексное многообразие, снабженное эрмитовой метрикой ω и связностью Вейля ∇ таким образом, что

$$\nabla(\omega) = \omega \otimes \theta, \qquad \theta \in \Lambda^1(M),$$

а θ замкнута. Предположим, что ∇ сохраняет оператор комплексной структуры: $\nabla(I) = 0$. Тогда M называется *локально конформно кэлеровым* (ЛКК) *многообразием*, а θ называется *формой Ли* многообразия M.

Замечание 3.2. Если дано локально конформно гиперкэлерово многообразие M, мы получаем ЛКК-структуру (M, J) для каждого кватерниона J, $J^2 = -1$.

В основе работы с локально конформно кэлеровыми многообразиями лежит следующая лемма Годушона.

Лемма 3.3 [13]. *Пусть M — компактное ориентированное конформное многообразие, $\dim_{\mathbb{R}} M > 2$. Для любой связности Вейля, сохраняющей конформную структуру, существует метрика g_0 в этом конформном классе такая, что соответствующая форма Ли θ коточна по отношению к g_0: $d^*\theta = 0$. Более того, g_0 единственна с точностью до постоянного множителя.* $\square$

Определение 3.4. Пусть M — конформное многообразие, снабженное связностью Вейля, сохраняющей конформный класс, а g_0 — метрика в этом конформном классе такая, что соответствующая форма Ли θ коточна. Тогда g_0 называется *метрикой Годушона.*

Замечание 3.5. Если (M, g, ∇, θ) — замкнутое многообразие Вейля, а g — метрика Годушона, то θ гармонична.

Для компактных ЛКГК-многообразий форма Ли для метрики Годушона параллельна по отношению к связности Леви-Чивиты.

Теорема 3.6 [26]. *Пусть M — ЛКГК-многообразие, снабженное метрикой Годушона g, а θ — ее форма Ли. Тогда $\nabla_g(\theta) = 0$, где ∇_g — связность Леви-Чивиты, ассоциированная с g.* $\square$

Определение 3.7. Пусть (M, g, ∇, θ) — локально конформно кэлерово многообразие, а ∇_g — его связность Леви-Чивиты. Мы говорим, что M — *вайсманово многообразие*, если $\nabla_g(\theta) = 0$. Если $\theta \neq 0$, то после домножения метрики на постоянный коэффициент мы всегда можем предположить, что $|\theta| = 1$. В дальнейшем мы будем работать с вайсмановыми многообразиями в предположении $|\theta| = 1$, если не оговорено противное.

Вайсмановы многообразия были определены И. Вайсманом под названием “обобщенные многообразия Хопфа” в большой серии работ (см., например, [34, 35]).

Замечание 3.8. Если $\nabla_g\theta = 0$, то θ гармонична по отношению к g. Следовательно, метрика g — автоматически метрика Годушона.

Пример 3.9. Зафиксируем кватернион $q \in \mathbb{H}$, $|q| > 1$. Пусть $M := \mathbb{H}^n \setminus 0/\sim_q$, где $\sim_q$ — отношение эквивалентности, порожденное $z \sim_q qz$. Это многообразие называется *многообразием Хопфа*. Поскольку умножение на q сохраняет плоскую связность ∇_{fl} на $\mathbb{H}^n$, эта связность может быть получена как обратный образ связности ∇ на M. Поскольку ∇_{fl} сохраняет конформный класс плоской метрики, (M, ∇) — многообразие Вейля. С другой стороны, M — по построению гиперкомплексное многообразие, а его накрытие гиперкэлерово. По предложению 2.11 из этого следует, что M — ЛКГК-многообразие. Топологически мы имеем $M = S^{4n-1} \times S^1$. Метрика Годушона — стандартная метрика на $S^{4n-1} \times S^1$, а форма θ есть координатная форма, поднятая с S^1. Следовательно, θ параллельна.

Другие примеры многообразий Вайсмана см. в [15, 2, 20].

4. КЭЛЕРОВ ПОТЕНЦИАЛ НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Мы строим кэлеров потенциал на вайсмановом многообразии с точной формой Ли (см. [35]).

Предложение 4.1. *Пусть M — вайсманово многообразие с формой Ли θ, а $\theta^\sharp$ — двойственное к θ векторное поле. Рассмотрим поток диффеоморфизмов ψ_t, связанный с $\theta^\sharp$. Тогда ψ_t действует на M, сохраняя локально конформно кэлерову структуру.*

Доказательство. Более подробное доказательство этого предложения см. в [12]. Поскольку θ параллельна, $\theta^\sharp$ — параллельное векторное поле. Следовательно, $\theta^\sharp$ киллингово и ψ_t действует на M изометриями. С другой стороны, ψ_t — геодезический поток вдоль $\theta^\sharp$, следовательно, его дифференциал $d\psi_t \colon T_xX \to T_{\psi_t(x)}X$ равен параллельному переносу вдоль геодезической $\theta^\sharp$. Поскольку голономия ∇_g содержится в $U(n) \cdot \mathbb{R} \subset GL(n, \mathbb{C})$, мы получаем, что $d\psi_t$ $\mathbb{C}$-линейно. Следовательно, ψ_t голоморфно. Мы получаем, что ψ_t сохраняет комплексную и эрмитову структуры на M. Связность Вейля ∇ может быть записана явно в терминах связности Леви-Чивиты и формы Ли (см., например, [24, Definition 1.1]):

$$\nabla = \nabla_g - \frac{1}{2}\big(\theta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \theta - g \otimes \theta^\sharp\big), \tag{4.1}$$

где ∇_g — связность Леви-Чивиты на M. Поскольку ψ_t сохраняет θ, g и ∇_g, мы получаем, что ψ_t сохраняет ∇. Предложение 4.1 доказано. $\square$

Форма Ли θ по определению замкнута. Переходя к накрытию, если необходимо, мы можем предположить, что она точна: $\theta = dt$. Пусть $r = e^{-t}$. В примере 3.9 r — это радиус. В этом случае r есть, очевидно, кэлеров потенциал на M.

Определение 4.2. Пусть M — вайсманово многообразие с точной формой Ли $\theta = dt$. Функция $r := e^{-t}$ называется *потенциалом* M. Очевидно, r определена канонически с точностью до постоянного множителя.

Утверждение 4.3. *Пусть (M, g, ∇) — вайсманово многообразие с точной формой Ли θ, r — его потенциал и $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ — эрмитова форма (M, g). Тогда $r\omega$ — кэлерова форма.*

Доказательство. Ясно, что

$$d(r\omega) = -\theta \wedge r\omega + r \cdot d\omega = -\theta \wedge r\omega + r\theta \wedge \omega = 0.$$

С другой стороны, $r\omega$ положительно определена, поскольку $r > 0$. Замкнутая положительно определенная $(1,1)$-форма обязательно кэлерова. $\square$

Предложение 4.4. *Пусть M — вайсманово многообразие с точной формой Ли θ, а r — его потенциал. Тогда r — кэлеров потенциал для кэлеровой формы $r\omega$.*

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp}$ оператор производной Ли вдоль векторного поля $\theta^\sharp$, двойственного θ. Тогда $\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp}\omega = 0$ в силу предложения 4.1. Аналогично

$$\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp} r = dr \lrcorner \theta^\sharp = -r\theta \lrcorner \theta^\sharp = -r.$$

Следовательно, $\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp}(r\omega) = -r\omega$. С другой стороны, $r\omega$ замкнута: $d(r\omega) = 0$. Мы получаем

$$r\omega = -\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp}(r\omega) = d(r\omega \lrcorner \theta^\sharp).$$

Пусть $d^c = -I \circ d \circ I$. Функция r называется кэлеровым потенциалом для кэлеровой формы $r\omega$, если $r\omega = dd^c r$. Как было доказано выше, $r\omega = d(r\omega \lrcorner \theta^\sharp)$. Следовательно, $r\omega = dd^c r$ вытекает из

$$r\omega \lrcorner \theta^\sharp = d^c r. \tag{4.2}$$

Чтобы доказать (4.2), заметим, что $\omega \lrcorner \theta^\sharp = I(\theta)$ и $dr = r\theta$. Следовательно,

$$r\omega \lrcorner \theta^\sharp = rI(\theta) = I(dr) = d^c r. \tag{4.3}$$

Это доказывает (4.2). Предложение 4.4 доказано. □

5. ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО КЭЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ

В этом разделе мы напоминаем определения и базовые результаты геометрии локально конформно кэлеровых многообразий Эйнштейна–Вейля. Мы следуем [24].

Определение 5.1. Пусть (M, g, ∇) — многообразие Вейля, $[g]$ — его конформный класс, а R — кривизна Риччи ∇, $R = \operatorname{Tr}_{jl} \Theta^l_{ijk}$, где

$$\Theta \in \Lambda^2(M) \otimes \Lambda^1(M) \otimes TM$$

— кривизна ∇. Предположим, что симметрическая часть R пропорциональна $[g]$. Тогда M называется *многообразием Эйнштейна–Вейля.*

Следующий важный результат был доказан П. Годушоном.

Теорема 5.2 [14]. *Пусть M — компактное многообразие Эйнштейна–Вейля с замкнутой формой Ли θ, а g — метрика Годушона на M (определение 3.4). Предположим, что θ не точна. Тогда*

(i) *θ параллельна по отношению к связности Леви-Чивиты, ассоциированной с g;*

(ii) *кривизна Риччи связности Вейля ∇ зануляется.* □

Замечание 5.3. По теореме 5.2(i) любое компактное локально конформно кэлерово многообразие Эйнштейна–Вейля вайсманово.

Следующее утверждение немедленно вытекает из определений.

Утверждение 5.4. *Пусть M — локально конформно кэлерово многообразие, снабженное метрикой Годушона, а L — соответствующее весовое расслоение, снабженное стандартной плоской связностью. Предположим, что L имеет тривиальную монодромию, иначе говоря, форма связности θ точна: $\theta = d(\zeta)$. Пусть $e^{-\zeta}\omega$ — кэлерова форма, ассоциированная с ζ, как в утверждении 2.8. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *M — многообразие Эйнштейна–Вейля;*

(ii) *кэлерова метрика $e^{-\zeta}\omega$ есть метрика Калаби–Яу, иначе говоря, соответствующая связность Леви-Чивиты риччи-плоская.*

Доказательство. Пусть ∇ — связность Вейля на M. Поскольку ∇ не имеет кручения и сохраняет $e^{-\zeta}\omega$, ∇ — связность Леви-Чивиты, ассоциированная с метрикой $e^{-\zeta}\omega$. Многообразие $(M, e^{-\zeta}\omega)$ есть многообразие Калаби–Яу тогда и только тогда, когда связность ∇ риччи-плоская. $\square$

Следствие 5.5. *Пусть M — локально конформно гиперкэлерово многообразие. Тогда M — многообразие Эйнштейна–Вейля.*

Доказательство. В силу утверждения 2.10 универсальное накрытие $\widetilde{M}$ гиперкэлерово. Следовательно, $\widetilde{M}$ — многообразие Калаби–Яу. Мы получаем, что M — многообразие Эйнштейна–Вейля в силу утверждения 5.4. $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующее

Предложение 5.6. *Пусть M — локально конформно гиперкэлерово многообразие Эйнштейна–Вейля, а L — его весовое расслоение. Тогда $L^n = K^{-1}$, где K — каноническое расслоение M, а $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{M}$ — универсальное накрытие M. В силу утверждения 5.4 $\widetilde{M}$ снабжено риччи-плоской кэлеровой метрикой. Следовательно, голономия $\operatorname{Hol}(\widetilde{M})$ содержится в $SU(n)$. Аналогично голономия $\operatorname{Hol}(M)$ связности Вейля содержится в $\mathbb{R}\cdot SU(n)$. Мы получаем, что $\operatorname{Hol}(M)/\operatorname{Hol}(\widetilde{M})$ естественным образом вложено в $\mathbb{R}$. Каноническое расслоение M становится тривиальным после поднятия на $\widetilde{M}$, а следовательно, оно наделено плоской связностью, индуцированной действием голономии связности Вейля. Мы докажем, что L^n и K^{-1} изоморфны как плоские расслоения.

По определению весовое расслоение соответствует представлению

$$\det{}_{\mathbb{R}}(TM)^{\frac{1}{2n}}, \qquad n = \dim_{\mathbb{C}} M$$

(см. замечание 2.7). Пусть α — любой элемент группы монодромии L: $\alpha \in \operatorname{Aut}(L_{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{R}^{>0} \subset \subset \operatorname{Hol}(M)/\operatorname{Hol}(\widetilde{M})$. Тогда α действует на L так:

$$(\alpha, l) \to \alpha l, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^{>0}, \quad l \in L.$$

Действие $\operatorname{Hol}(M)$ на $K(M)$ факторизуется через

$$G = \operatorname{Hol}(M)/\operatorname{Hol}(\widetilde{M}),$$

поскольку $\operatorname{Hol}(\widetilde{M}) \subset SU(n)$. Фактор

$$\operatorname{Hol}(M)/\operatorname{Hol}(\widetilde{M}) \subset \mathbb{R}^{>0}$$

действует на $K(M) = \det(\Lambda^{1,0}(M))$ как

$$(\alpha, \eta) \to \alpha^{-n}\eta, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^{>0}, \quad \eta \in \det(\Lambda^{1,0}(M)).$$

Это позволяет соотнести монодромию $K(M)$ и действие голономии. Расслоения L^n, K^{-1} плоские с одной и той же монодромией. Значит, эти расслоения изоморфны. $\square$

6. ФОРМА ω_0 НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В этом разделе мы приводим элементарные результаты и вычисления, относящиеся к геометрии вайсмановых многообразий.

6.1. Форма ω_0: определение и собственные значения. Пусть M — локально конформно кэлерово многообразие. Рассмотрим форму

$$\omega_0 := d^c\theta$$

на M. Мы имеем $d^c = \frac{\partial - \overline{\partial}}{\sqrt{-1}}$. Следовательно,

$$\omega_0 = \frac{\partial - \overline{\partial}}{\sqrt{-1}}\theta.$$

Напишем разложение Ходжа для θ так: $\theta = \theta^{1,0} + \theta^{0,1}$. Поскольку θ замкнута, мы имеем

$$\partial\theta^{1,0} = \overline{\partial}\theta^{0,1} = 0, \qquad \partial\theta^{0,1} = -\overline{\partial}\theta^{1,0}.$$

Следовательно,

$$\omega_0 = -2\sqrt{-1}\,\partial\theta^{0,1}. \tag{6.1}$$

Предложение 6.1. *Пусть M — вайсманово многообразие с формой Ли θ. Рассмотрим 2-форму $\omega_0 := d^c\theta$. Выберем ортонормальный базис*

$$\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \sqrt{2}\,\theta^{1,0}$$

в $T^{1,0}M$, где $\theta^{1,0}$ — $(0,1)$-часть θ.[3] *Тогда*

$$\omega_0 = \sqrt{-1}\big(\xi_1 \wedge \overline{\xi}_1 + \xi_2 \wedge \overline{\xi}_2 + \ldots + \xi_{n-1} \wedge \overline{\xi}_{n-1}\big). \tag{6.2}$$

В частности, все собственные значения ω_0 положительны, кроме одного, соответствующего θ, который зануляется.

Доказательство. Перейдя к накрытию, если необходимо, мы всегда можем предположить, что θ точна. Обозначим, как всегда, через r потенциал M. В силу (4.3) мы имеем

$$d^c(r\theta) = r\omega. \tag{6.3}$$

С другой стороны,

$$d^c(r\theta) = rd^c\theta + d^c r \wedge \theta = rd^c\theta + rI(\theta) \wedge \theta. \tag{6.4}$$

Сравнивая (6.3) и (6.4), мы получаем $\omega = d^c\theta + \theta \wedge I(\theta)$, а также

$$\omega_0 = \omega - 2\sqrt{-1}\,\theta^{1,0} \wedge \theta^{0,1}. \tag{6.5}$$

Это доказывает предложение 6.1. $\square$

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 6.2. *Форма ω_0 точна.*

Доказательство. По определению мы имеем

$$\omega_0 = -Id(I(\theta)). \tag{6.6}$$

С другой стороны, ω_0 — $(1,1)$-форма, а значит, $I(\omega_0) = \omega_0$. Сравнивая это с (6.6), мы получаем

$$\omega_0 = -d(I(\theta)). \quad \square$$

[3] Поскольку $|\theta| = 1$, мы имеем $|\theta^{1,0}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эрмитова форма на M записывается в этом базисе так:

$$\omega = \sqrt{-1}(\xi_1 \wedge \overline{\xi}_1 + \xi_2 \wedge \overline{\xi}_2 + \ldots + \xi_{n-1} \wedge \overline{\xi}_{n-1} + 2\theta^{1,0} \wedge \theta^{0,1}).$$

6.2. Форма ω_0 и каноническое слоение. Пусть M — вайсманово многообразие с формой Ли θ. Рассмотрим 2-мерное поле плоскостей $\Xi \subset TM$, порожденное $\theta^\sharp$, $I(\theta^\sharp)$. Векторное поле $\theta^\sharp$ голоморфно (предложение 4.1). Следовательно, Ξ голоморфно и интегрируемо.

Определение 6.3. Слоение Ξ называется *каноническим слоением* вайсманова многообразия M.

Каноническое слоение связано с формой ω_0 следующим образом.

Предложение 6.4. *Пусть M — вайсманово многообразие, $\omega_0 = d^c\theta$ — стандартная $(1,1)$-форма и Ξ — каноническое слоение. Предположим, что его пространство листов Y хорошо определено, и пусть $f\colon M \to Y$ — стандартная проекция. Тогда Y снабжено естественной кэлеровой формой ω_Y таким образом, что $f^*\omega_Y = \omega_0$.*

Доказательство. Чтобы проверить, что $\omega_0 = f^*\omega_Y$ для некоторой 2-формы ω_Y, нужно доказать, что

$$\omega_0 \lrcorner\, \theta^\sharp = \omega_0 \lrcorner\, I(\theta^\sharp) = 0 \tag{6.7}$$

и

$$\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp} \omega_0 = \operatorname{Lie}_{I(\theta^\sharp)} \omega_0 = 0. \tag{6.8}$$

Уравнение (6.7) следует немедленно из предложения 6.1. Используя формулу Картана для производной Ли и (6.7), мы получаем

$$\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp} \omega_0 = (d\omega_0) \lrcorner\, \theta^\sharp = 0$$

и

$$\operatorname{Lie}_{I(\theta^\sharp)} \omega_0 = (d\omega_0) \lrcorner\, I(\theta^\sharp) = 0.$$

Следовательно, $\omega_0 = f^*\omega_Y$ для некоторой 2-формы ω_Y на Y. Поскольку ω_0 имеет $\dim_{\mathbb{C}} Y = n-1$ положительных собственных значений, форма ω_Y положительно определена. Следовательно, ω_Y — кэлерова форма на Y. $\square$

Форма ω_0 точна (утверждение 6.2). Следующее предложение вытекает из этого наблюдения немедленно.

Предложение 6.5. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие, а $X \subset M$ — замкнутое комплексное подмногообразие. Тогда X касательно к каноническому слоению Ξ во всех гладких точках. В частности, если X гладкое, то X — вайсманово многообразие.*

Доказательство. Форма ω_0 *положительна* в смысле теории распределений; иначе говоря, ω_0 — вещественная $(1,1)$-форма с неотрицательными собственными значениями. Хорошо известно, что

$$\int\limits_X \omega_0^k \geq 0 \tag{6.9}$$

для всех комплексных подмногообразий $X \subset M$, $\dim_{\mathbb{C}} X = k$, и всех положительных форм ω_0. Более того, интеграл (6.9) зануляется, только если X касательно к нуль-слоению ω_0.

Поскольку ω_0 точна, интеграл (6.9) зануляется. Следовательно, X касательно к нуль-слоению формы ω_0. Как мы видели выше, это нуль-слоение совпадает с Ξ. Следовательно, X касательно к Ξ.

Если X гладко, оно, очевидно, локально конформно кэлерово. Чтобы доказать, что X вайсманово, мы используем следующую теорему Камишимы и Орнеа [20].

Теорема 6.6 [20]. *Пусть X — компактное локально конформно кэлерово многообразие, снабженное потоком голоморфных конформных диффеоморфизмов, не эквивалентных конформно изометрии. Тогда X — вайсманово многообразие.* $\square$

Рассмотрим голоморфный поток ψ_t, ассоциированный с векторным полем $\theta^\sharp$ на M (предложение 4.1). Поскольку X касателен к Ξ, ψ_t сохраняет X. Легко проверить, что ψ_t не эквивалентен изометрии. Применяя теорему 6.6, мы обнаруживаем, что X вайсманово. Предложение 6.5 доказано. $\square$

Для гладких многообразий предложение 6.5 было доказано К. Цукадой (см. [32]).

6.3. Кривизна весового расслоения. Пусть M — локально конформно кэлерово многообразие, а L — его весовое расслоение. По построению L — линейное расслоение, снабженное плоской связностью ${}^L\nabla$ и нигде не вырожденным сечением λ таким, что

$$ {}^L\nabla(\lambda) = \lambda \otimes \left(-\frac{1}{2}\theta\right). $$

$(0,1)$-часть оператора ${}^L\nabla$ задает голоморфную структуру на L. На протяжении этого пункта мы будем рассматривать L как голоморфное расслоение. Рассмотрим эрмитову структуру g_L на L, определенную таким образом, что $|\lambda|_{g_L} = 1$.

Теорема 6.7. *Пусть M — локально конформно кэлерово многообразие, а L — его весовое расслоение, снабженное голоморфной и эрмитовой структурами, как описано выше. Обозначим через ${}^{\mathrm{C}}\nabla$ стандартную эрмитову связность на L (ее еще называют связностью Черна), и пусть C — ее кривизна. Тогда $C = -2\sqrt{-1}\,\omega_0$, где $\omega_0 = d^c\theta$ — стандартная 2-форма на M.*

Доказательство. По определению связности Черна

$$ {}^{\mathrm{C}}\nabla^{0,1}(\lambda) = {}^L\nabla^{0,1}(\lambda) = \lambda \otimes \left(-\frac{1}{2}\theta^{0,1}\right) \qquad \text{и} \qquad \big({}^{\mathrm{C}}\nabla^{1,0}(\lambda), \lambda\big)_H = -\big(\lambda, {}^{\mathrm{C}}\nabla^{0,1}(\lambda)\big)_H, \tag{6.10} $$

где $(\cdot,\cdot)_H$ — эрмитова форма на L. Из (6.10) мы получаем

$$ {}^{\mathrm{C}}\nabla = \nabla_{\mathrm{tr}} + \frac{\theta^{0,1} - \theta^{1,0}}{2}, \tag{6.11} $$

где ∇_{tr} — тривиальная связность на L. Из (6.11) мы получаем

$$ C = \frac{\partial\theta^{0,1} - \overline{\partial}\theta^{0,1}}{2}. \tag{6.12} $$

С другой стороны, θ замкнута, а значит, $\partial\theta^{0,1} = -\overline{\partial}\theta^{0,1}$. Сравнивая это с (6.12), мы получаем

$$ C = \partial\theta^{0,1} = -2\sqrt{-1}\,\omega_0 $$

(последнее равенство следует из (6.1)). Мы доказали теорему 6.7. $\square$

7. КЭЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ ФОРМЫ ω_0

Форма ω_0 во многих отношениях похожа на кэлерову форму. В этом разделе мы докажем ω_0-версию соотношений Кодаиры и применим ее, чтобы получить соотношения для операторов Лапласа с коэффициентами в расслоении. Это позволяет доказать теоремы о занулении когомологий, похожие на теорему Кодаиры–Накано.

7.1. $SL(2)$**-тройка** L_0, Λ_0, H_0**.** В этом пункте мы изучаем аналог теоремы Лефшеца об $SL(2)$-действии, связанный с формой ω_0. Пусть M — вайсманово многообразие, а ω_0 — стандартная 2-форма (разд. 6). Обозначим через L_0 оператор $\eta \to \eta \wedge \omega_0$ на дифференциальных формах, а через Λ_0 эрмитово сопряженный оператор. Используя координатную форму ω_0, данную предложением 6.1, мы обнаруживаем, что L_0, Λ_0, $H_0 := [L_0, \Lambda_0]$ образуют $SL(2)$-тройку (в точности те же самые аргументы используются при доказательстве теоремы Лефшеца через $SL(2)$-действие на когомологиях, см. [17]).

Локально оператор H_0 может быть записан следующим образом. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \sqrt{2}\theta^{1,0}, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \dots, \overline{\xi}_{n-1}, \sqrt{2}\theta^{0,1} \in \Lambda^1(M)$$

— ортогональный репер в расслоении 1-форм (предложение 6.1). Рассмотрим моном

$$\lambda = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \wedge \overline{\xi}_{i_{k+1}} \wedge \overline{\xi}_{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge \xi_p \wedge R, \tag{7.1}$$

где R — моном, порожденный $\theta^{0,1}$, $\theta^{1,0}$. Тогда

$$H_0(\lambda) = (p - n + 1)\lambda, \tag{7.2}$$

где p — число множителей ξ_{i_l}, $\overline{\xi}_{i_k}$ в λ и $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

Уравнение (7.2) выводится точно так же, как явная форма для оператора H в теории Ходжа [17].

7.2. Тождества Кодаиры для дифференциала ∂_0**.** Пусть M — вайсманово многообразие, L_0, Λ_0, H_0 — ω_0-лефшецева тройка, действующая на $\Lambda^*(M)$, как описано выше, а

$$\Lambda^*(M) = \bigoplus_i \Lambda_i^*(M)$$

— весовое разложение, связанное с H_0. Мы нормируем веса таким образом, что моном (7.1) имеет вес p. Очевидно,

$$\Lambda^p(M) = \Lambda^p_{p-2}(M) \oplus \Lambda^p_{p-1}(M) \oplus \Lambda^p_p(M). \tag{7.3}$$

Обозначим через d_0 компоненту веса 1 дифференциала де Рама:

$$d_0 \colon \Lambda_i^p(M) \to \Lambda_{i+1}^{p+1}(M). \tag{7.4}$$

Замечание 7.1. Из (6.5) следует $d(\omega_0) = \omega_0 \wedge \theta$. Поэтому $d_0(\omega_0) = 0$. Простое вычисление также доказывает $d_0\theta = 0$ и $d_0(I(\theta)) = 0$.

Замечание 7.2. Дифференциал d_0 удовлетворяет правилу Лейбница.

Рассмотрим компоненты дифференциала d_0 типа $(1,0)$ и $(0,1)$ при разложении Ходжа. Эти компоненты обозначаются ∂_0, $\overline{\partial}_0$.

Определение 7.3. Оператор d_0 называется *ω_0-дифференциалом де Рама*, операторы ∂_0, $\overline{\partial}_0$ — *ω_0-дифференциалами Дольбо.*

Теорема 7.4 (соотношения Кодаиры для ∂_0, $\overline{\partial}_0$)**.** *Пусть M — вайсманово многообразие, а ∂_0, $\overline{\partial}_0$, L_0, Λ_0 — операторы на дифференциальных формах, определенные выше. Тогда*

$$\begin{aligned} [\Lambda_0, \partial_0] &= \sqrt{-1}\ \overline{\partial}_0^*, & [L_0, \overline{\partial}_0] &= -\sqrt{-1}\,\partial_0^*, \\ [\Lambda_0, \overline{\partial}_0^*] &= -\sqrt{-1}\,\partial_0, & [L_0, \partial_0^*] &= \sqrt{-1}\ \overline{\partial}_0, \end{aligned} \tag{7.5}$$

где ∂_0^*, $\overline{\partial}_0^*$ — эрмитово сопряженные операторы к ∂_0, $\overline{\partial}_0$.

Доказательство. Чуть ниже мы докажем

$$[L_0, d_0^*] = -I \circ d_0 \circ I. \tag{7.6}$$

Взяв $(0,1)$- и $(1,0)$-компоненты (7.6), мы получим нижнюю строчку (7.5). Взяв эрмитово сопряженное, получим верхнюю строчку (7.5). Следовательно, (7.6) влечет соотношения Кодаиры для ∂_0.

Мы докажем (7.6) алгебраическим способом таким же образом, как доказываются соотношения Кодаиры в геометрии гиперкэлеровых многообразий с кручением [36]. Рассмотрим L_0, d_0 и т.д. как операторы на супералгебре дифференциальных форм. А. Гротендик дал рекурсивное определение дифференциального оператора на алгебре (см., например, [36]).[4] Оператор L_0 $\Lambda^*(M)$-линеен, т.е. имеет нулевой порядок, а d_0^* — оператор второго порядка на $\Lambda^*(M)$ (это следует непосредственно из определения; подробное обоснование см. в [36]). Следовательно, коммутатор $[L_0, d_0^*]$ — алгебраический дифференциальный оператор первого порядка. Поскольку $-I \circ d_0 \circ I$ удовлетворяет правилу Лейбница, это тоже оператор первого порядка. Любой алгебраический дифференциальный оператор первого порядка D удовлетворяет

$$D(ax) = (-1)^{\deg D \deg a} a D(x) + D(a)x - D(1)ax. \tag{7.7}$$

Это тоже следует непосредственно из определения (детали см. в [36]). Из (7.7) мы получаем, что дифференциальный оператор первого порядка определяется тем, какие он принимает значения на любом наборе образующих алгебры.

Поскольку обе стороны (7.6) — дифференциальные операторы первого порядка, достаточно проверить, что они равны на каком-то подпространстве $V \subset \Lambda^*(M)$, которое порождает алгебру $\Lambda^*(M)$.

На 0-формах (7.6) очевидно

$$d_0^*(f\omega_0) = \omega_0 \lrcorner (d_0 f)^\sharp = -I(d_0 f),$$

где $v^\sharp$, как всегда, обозначает векторное поле, ассоциированное с формой v.

Мы построим подпространство $V \subset \Lambda^1(M)$, порождающее $\Lambda^1(M)$ над $C^\infty(M)$, таким образом, что оба оператора (7.6) равны на V. Как мы уже отметили, этого достаточно для доказательства теоремы 7.4.

Утверждение теоремы 7.4 локально. Перейдя к открытой окрестности, если нужно, мы можем предположить, что пространство листов Y слоения Ξ хорошо определено. Пусть $f\colon M \to Y$ обозначает соответствующее фактор-отображение. По предложению 6.4 многообразие Y снабжено естественной кэлеровой формой ω_Y таким образом, что $f^*\omega_Y = \omega_0$. Пусть d_Y — оператор де Рама на Y, а d_Y^* — его эрмитово сопряженный оператор. Обозначим через L_Y оператор Ходжа на Y, $L_Y(\eta) = \eta \wedge \omega_Y$. Поскольку Y кэлерово, на нем верны обыкновенные соотношения Кодаиры

$$[L_Y, d_Y^*] = -I \circ d_Y \circ I. \tag{7.8}$$

Поднимая (7.8) на M, мы получим, что (7.6) верно для всех форм $\eta = f^*\eta_Y$, полученных как обратный образ с Y.

Проверим (7.6) на 2-мерном пространстве $\langle \theta, I(\theta)\rangle \subset \Lambda^1(M)$, порожденном θ и $I(\theta)$. Поскольку θ d_0-замкнуто, мы имеем $-I \circ d_0 \circ I(I\theta) = 0$ (замечание 7.1). То же самое рассуждение

[4] Дифференциальный оператор n-го порядка на супералгебре $\Lambda^*(M)$ может иметь любой порядок от первого до n-го как дифференциальный оператор в обычном смысле. Во избежание путаницы мы будем писать "алгебраический дифференциальный оператор", когда речь идет о дифференциальных операторах в смысле Гротендика.

доказывает

$$d_0^*(\omega^k \wedge I(\theta)) = *d_0(\omega^{n-k} \wedge \theta) = 0,$$

поскольку $d_0(\theta) = d_0(\omega) = 0$ (см. замечание 7.1). Следовательно, операторы $[L_0, d_0^*]$ и $-I \circ d_0 \circ I$ зануляются на $I(\theta)$. Аналогично $-I \circ d_0 \circ I(\theta) = \omega_0$ и $[L_0, d_0^*](\theta) = 0$.

Мы доказали, что операторы $[L_0, d_0^*]$ и $-I \circ d_0 \circ I$ равны на пространстве $V \subset \Lambda^1(M)$, порожденном θ, $I(\theta)$ и обратными образами дифференциальных форм с Y. Очевидно, $C^\infty(M) \cdot V = \Lambda^1(M)$. Следовательно, операторы $[L_0, d_0^*]$ и $-I \circ d_0 \circ I$ равны на пространстве V, порождающем $\Lambda^*(M)$. Как мы отмечали, это доказывает (7.6). Теорема 7.4 доказана. $\square$

Аналогичные аргументы доказывают следующее

Утверждение 7.5. *Пусть M — вайсманово многообразие, а d_0, ∂_0, $\overline{\partial}_0$ — операторы, определенные выше. Тогда*

$$d_0^2 = \partial_0^2 = \overline{\partial}_0^2 = 0.$$

Доказательство. Поскольку ∂_0^2 и $\overline{\partial}_0^2$ — это $(2,0)$- и $(0,2)$-компоненты d_0^2, достаточно доказать, что $d_0^2 = 0$. Мы используем то же рассуждение, что и в доказательстве теоремы 7.4. Антикоммутатор $d_0^2 = \{d_0, d_0\}$ — алгебраический дифференциальный оператор первого порядка, поскольку это суперкоммутатор нечетных операторов первого порядка. Следовательно, достаточно доказать, что $d_0^2 = 0$ на некотором наборе образующих $\Lambda^*(M)$.

Все 1-формы имеют вес ≤ 1 по отношению к разложению (7.3). Следовательно, ограничение $d|_{\Lambda^0(M)}$ имеет только компоненты веса 0 и 1 (и не имеет компоненты веса 2). Значит, компонента веса 2 в $d^2|_{\Lambda^0(M)}$ равна d_0^2. Поскольку $d^2 = 0$, мы имеем

$$d_0^2|_{\Lambda^0(M)} = 0.$$

Переходя к локальной окрестности, мы всегда можем предположить, что Y — пространство листов Ξ хорошо определено. По построению $d_0 = d$ на всех формах, поднятых с Y. Следовательно, $d_0^2 = d^2 = 0$ на всех таких формах.

Наконец, $d_0 = 0$ на пространстве, порожденном θ, $I(\theta)$. Следовательно, $d_0^2 = 0$ на этом пространстве. Мы получили, что $d_0^2 = 0$ на наборе образующих алгебры $\Lambda^*(M)$. Следовательно, $d_0^2 = 0$. Мы доказали утверждение 7.5. $\square$

7.3. Операторы Лапласа с коэффициентами в расслоении. Пусть M — вайсманово многообразие, B — голоморфное векторное расслоение, снабженное эрмитовой формой, а

$$\nabla\colon \Lambda^p(M) \otimes B \to \Lambda^{p+1}(M) \otimes B$$

— связность Черна на B. Обозначим через d_0 компоненту веса 1 в ∇, взятую по отношению к действию H_0 (см. (7.4)). Пусть ∂_0, $\overline{\partial}_0$ обозначают $(1,0)$- и $(0,1)$-компоненты d_0, а ∂_0^*, $\overline{\partial}_0^*$ — эрмитово сопряженные операторы.

Предложение 7.6 (соотношения Кодаиры для ∂_0, $\overline{\partial}_0$ с коэффициентами в эрмитовом расслоении)**.** *Пусть M — вайсманово многообразие, B — голоморфное эрмитово расслоение, а*

$$\partial_0, \overline{\partial}_0, L_0, \Lambda_0\colon \Lambda^*(M) \otimes B \to \Lambda^*(M) \otimes B$$

— операторы, определенные выше. Тогда

$$\begin{aligned} [\Lambda_0, \partial_0] &= \sqrt{-1}\ \overline{\partial}_0^*, & [L_0, \overline{\partial}_0] &= -\sqrt{-1}\,\partial_0^*, \\ [\Lambda_0, \overline{\partial}_0^*] &= -\sqrt{-1}\,\partial_0, & [L_0, \partial_0^*] &= \sqrt{-1}\ \overline{\partial}_0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Доказательство предложения 7.6 в точности такое же, как доказательство обычных соотношений Кодаиры с коэффициентами в расслоении на кэлеровом многообразии. Мы выводим предложение 7.6 из соотношений Кодаиры для d_0, доказанных в теореме 7.4.

Напишем связность Черна на B как

$$\nabla = \partial^{\mathrm{tr}} + \overline{\partial}^{\mathrm{tr}} + \eta + \overline{\eta}, \tag{7.10}$$

где $\partial^{\mathrm{tr}} + \overline{\partial}^{\mathrm{tr}}$ — тривиальная связность, сохраняющая эрмитову структуру, а $\eta \in \Lambda^{1,0}(M) \otimes \otimes \operatorname{End} B$ — $(1,0)$-форма. Пусть $\eta_0 := \Pi(\eta)$ — проекция η на $\Lambda^1_0(M) \otimes \operatorname{End} B \subset \Lambda^1(M) \otimes \operatorname{End} B$. Мы рассматриваем η, η_0 как операторы на дифференциальных формах. Обозначим через η^*, η_0^* эрмитово сопряженные операторы. Используя координатную запись ω_0, данную в предложении 6.1, мы получаем

$$\begin{aligned} [\Lambda_0, \eta_0] &= \sqrt{-1}\,\overline{\eta}_0^*, \qquad & [L_0, \overline{\eta}_0] &= -\sqrt{-1}\,\eta_0^*, \\ [\Lambda_0, \overline{\eta}_0^*] &= -\sqrt{-1}\,\eta_0, \qquad & [L_0, \eta_0^*] &= \sqrt{-1}\,\overline{\eta}_0. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Складывая почленно (7.11) и (7.5), выписанное для тривиальной связности $\nabla^{\mathrm{tr}} = \partial^{\mathrm{tr}} + \overline{\partial}^{\mathrm{tr}}$, мы получаем (7.9). Это доказывает предложение 7.6. $\square$

Теорема 7.7. *Пусть M — вайсманово многообразие, B — голоморфное эрмитово расслоение, а*

$$\partial_0, \overline{\partial}_0, L_0, \Lambda_0 \colon \Lambda^*(M) \otimes B \to \Lambda^*(M) \otimes B$$

— операторы, определенные выше. Рассмотрим лапласианы $\Delta_{\partial_0} = \partial_0\partial_0^* + \partial_0^*\partial_0$, $\Delta_{\overline{\partial}_0} = \overline{\partial}_0\overline{\partial}_0^* + + \overline{\partial}_0^*\overline{\partial}_0$. Тогда

$$\Delta_{\partial_0} - \Delta_{\overline{\partial}_0} = \sqrt{-1}\,[\Theta_B, \Lambda_0], \tag{7.12}$$

где $\Theta_B \colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+2}(M) \otimes B$ — оператор кривизны расслоения B.

Доказательство. Теорема 7.7 — формальное следствие соотношений Кодаиры (7.9) (см., например, [17]). $\square$

7.4. Двойственность Серра для $\overline{\partial}_0$-когомологий. Далее в этой работе нам понадобится версия двойственности Серра для $\overline{\partial}_0$-когомологий. Поскольку оператор $\overline{\partial}_0$ не эллиптический, $\overline{\partial}_0$-когомологии могут быть бесконечномерны. Поэтому более удобно сформулировать двойственность Серра как изоморфизм векторных пространств.

Теорема 7.8 (двойственность Серра для $\overline{\partial}_0$-когомологий)**.** *Пусть M — компактное вайсманово многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, B — голоморфное эрмитово расслоение, а K — каноническое расслоение M. Тогда существует изоморфизм пространств $\overline{\partial}_0$-гармонических форм с коэффициентами в B, $B^* \otimes K$*

$$\mathcal{H}^p_{\overline{\partial}_0}(B) \cong \overline{\mathcal{H}^{n-p}_{\overline{\partial}_0}(B^* \otimes K)},$$

где $\overline{V}$ обозначает комплексно сопряженное пространство к V, т.е. то же самое вещественное векторное пространство с сопряженной комплексной структурой.

Доказательство. Рассмотрим оператор Ходжа $*$, действующий на дифференциальных формах с коэффициентами в расслоении. Для каждой $\overline{\partial}_0$-гармонической формы $\eta \in \Lambda^{0,p}(M, B)$ форма $*\eta$ — ∂_0-гармоническая $(n-p, n)$-форма с коэффициентами в $\overline{B}^*$. Очевидно, это то же самое, что ∂_0-гармоническая $(n-p, 0)$-форма с коэффициентами в $\overline{K} \otimes \overline{B}^*$. Применяя комплексное сопряжение, мы получим, что $\overline{*\eta}$ можно рассматривать как $\overline{\partial}_0$-гармоническую форму с коэффициентами в $B^* \otimes K$. Это доказывает теорему 7.8. $\square$

8. ТЕОРЕМЫ О ЗАНУЛЕНИИ КОГОМОЛОГИЙ НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

8.1. Теорема о занулении когомологий для дифференциала ∂_0. Как обычно, соотношения типа Кодаиры–Накано ведут к теоремам о занулении когомологий. Мы используем соотношения между ω_0-лапласианами (7.12) для получения результатов о занулении $\overline{\partial}_0$-когомологий голоморфных векторных расслоений. Весь спектр результатов, которые можно таким образом получить, нам не понадобится. В первую очередь нам нужна следующая

Теорема 8.1. *Пусть M — вайсманово многообразие, а V — положительная тензорная степень весового расслоения (определение 2.4), снабженная эрмитовой структурой, как в п. 6.3. Рассмотрим ω_0-дифференциал $\overline{\partial}_0\colon \Lambda^{0,p}(M)\otimes V \to \Lambda^{0,p+1}(M)\otimes V$, ассоциированный со связностью Черна на V (см. п. 7.3), и пусть $\eta \in \Lambda^{0,p}(M)\otimes V$ — ненулевая $\overline{\partial}_0$-гармоническая форма. Тогда $p \geq \dim_{\mathbb{C}} M - 1$. Более того, если $p = \dim_{\mathbb{C}} M - 1$, то $\eta \lrcorner\, \theta^\sharp = 0$, где $\theta^\sharp$ — векторное поле, двойственное форме Ли θ.*

Замечание 8.2. Элементарные соображения линейной алгебры показывают, что все $(n-1,0)$-формы, удовлетворяющие $\eta \lrcorner\, \theta^\sharp = 0$, пропорциональны $\mathfrak{L} \lrcorner\, \theta^\sharp$, где $\mathfrak{L}$ — невырожденная $(n,0)$-форма на M.

Доказательство теоремы 8.1. По теореме 7.7

$$\Delta_{\partial_0} - \Delta_{\overline{\partial}_0} = \sqrt{-1}\,[\Theta_V, \Lambda_0],$$

где Θ_V — оператор кривизны V. По теореме 6.7 $\sqrt{-1}\,\Theta_V = c\omega_0$, $c > 0$. Следовательно,

$$\Delta_{\overline{\partial}_0} = \Delta_{\partial_0} + cH_0, \tag{8.1}$$

где $H_0 = [L_0, \Lambda_0]$. В силу (7.2) H_0 положительно определено на $(r,0)$-формах для $r < n-1$. По уравнению (8.1) лапласиан $\Delta_{\overline{\partial}_0}$ равен сумме положительно полуопределенного оператора Δ_{∂_0} и положительно определенного cH_0. Следовательно, все собственные значения $\Delta_{\overline{\partial}_0}$ строго положительны и не существует гармонических $(r,0)$-форм для $r < n-1$.

Точно так же H_0 положительно полуопределено на $(n-1,0)$-формах и его единственное нулевое собственное значение соответствует форме

$$\nu = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_{n-1}$$

(мы пользуемся обозначениями из предложения 6.1). Следовательно, если $\Delta_{\overline{\partial}_0}(\eta) = 0$, то $\Delta_{\partial_0}(\eta) = 0$, $H_0(\eta) = 0$ и η пропорциональна ν. Мы доказали теорему 8.1. $\square$

8.2. Базовые когомологии. Чтобы использовать теоремы о занулении когомологий для $\overline{\partial}_0$-дифференциала, нам нужно сравнить эти когомологии и когомологии Дольбо. Это делается с помощью результатов К. Цукады [31].

Пусть M — многообразие, снабженное слоением Ξ. Форма η называется *базовой*, если для всех векторных полей $v \in \Xi$ мы имеем $\eta \lrcorner\, v = 0$, $\mathrm{Lie}_v\, \eta = 0$. Локально такие формы поднимаются с пространства листов Ξ, если оно определено. Очевидно, форма $d\eta$ базовая, если η базовая. Когомологии де Рама базовых форм называются *базовыми когомологиями слоения* Ξ [30, 22].

Если Ξ — голоморфное слоение на комплексном многообразии, мы можем определить базовые когомологии Дольбо как когомологии дифференциала $\overline{\partial}$ на базовых формах. Очевидно, на базовых формах дифференциал $\overline{\partial}$ равен дифференциалу $\overline{\partial}_0$, определенному выше.

Теорема 8.3. *Пусть M — n-мерное компактное вайсманово многообразие, а η — (p,q)-форма с $p+q \leq n-1$. Обозначим через $\theta^{0,1}$ $(0,1)$-часть формы Ли, и пусть Λ_0 — оператор Ходжа, ассоциированный с формой ω_0 (п. 7.2). Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *форма* η $\overline{\partial}$*-гармонична*: $\overline{\partial}\overline{\partial}^*\eta + \overline{\partial}^*\overline{\partial}\eta = 0$;

(ii) η *допускает разложение* $\eta = \theta^{0,1} \wedge \alpha + \beta$, *где* α, β *— базовые формы для канонического слоения* Ξ. *В этом случае* α, β $\overline{\partial}_0$*-гармоничны и* $\Lambda_0\alpha = \Lambda_0\beta = 0$.

Доказательство. Это [31, Theorem 3.2]. □

8.3. Когомологии структурного пучка. Теорема о занулении когомологий из п. 8.1 может быть использована для доказательства следующей теоремы.

Теорема 8.4. *Пусть* M *— компактное вайсманово многообразие такое, что каноническое расслоение* $K(M)$ *изоморфно отрицательной тензорной степени весового расслоения*[5]. *Тогда голоморфные когомологии структурного пучка удовлетворяют* $H^i(\mathcal{O}_M) = 0$ *для* $i > 1$, $\dim H^1(\mathcal{O}_M) = 1$.

Доказательство. Теорема 8.4 следует из теоремы 8.1 и теоремы 8.3. Действительно, из теоремы 8.3 следует, что, чтобы доказать $H^i(\mathcal{O}_M) = 0$ для $i > 1$, $\dim H^1(\mathcal{O}_M) = 1$, достаточно доказать, что все базовые $\overline{\partial}$-гармонические $(0,p)$-формы зануляются для $p > 0$. Базовая форма $\overline{\partial}$-гармонична, если и только если она $\overline{\partial}_0$-гармонична. По двойственности Серра

$$\mathcal{H}^p_{\overline{\partial}_0}(\mathcal{O}_M) \cong \overline{\mathcal{H}^{n-p}_{\overline{\partial}_0}(K)}$$

(теорема 7.8). По теореме 8.1 $\mathcal{H}^{n-p}_{\overline{\partial}_0}(K) = 0$ для $p > 1$ и для $p = 1$ все нетривиальные гармонические формы $\eta \in \mathcal{H}^{n-p}_{\overline{\partial}_0}(K)$ удовлетворяют $\eta \lrcorner \theta^{0,1\sharp} = 0$. Применяя двойственность Серра снова, мы получаем, что каждая $\overline{\partial}$-гармоническая $(0,p)$-форма $\eta_1 \in \mathcal{H}^p_{\overline{\partial}_0}(\mathcal{O}_M)$ зануляется для $p > 1$, а для $p = 1$ η_1 пропорциональна $\theta^{0,1}$. Следовательно, для $p = 1$ η не может быть базовой и мы получаем, что нет нетривиальных базовых $\overline{\partial}$-гармонических $(0,p)$-форм. Это доказывает теорему 8.4. □

Похожая теорема была получена в [1] с использованием оценок кривизны Риччи.

9. ГОЛОМОРФНЫЕ ФОРМЫ НА ВАЙСМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ

В этом разделе мы доказываем, что все голоморфные $(p,0)$-формы на компактном локально конформно кэлеровом многообразии Эйнштейна–Вейля зануляются для $p > 0$.

9.1. ω_0-Янг–миллсовы расслоения. Пусть M — многообразие Вайсмана, θ — его форма Ли, а $\omega_0 = d^c(\theta)$ — стандартная 2-форма (разд. 6). Для наших целей ω_0 играет роль кэлеровой формы на M. Поэтому естественно изучать янг–миллсову геометрию, связанную с ω_0.

Определение 9.1. В этих предположениях пусть B — голоморфное эрмитово расслоение, снабженное стандартной связностью, Θ_B — его кривизна, а $\Lambda_0\colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-2}(M)$ — оператор Ходжа, ассоциированный с формой ω_0 (см. п. 7.2). Мы говорим, что B ω_0*-янг–миллсово*, если

$$\Lambda_0(\Theta_B) = -c\sqrt{-1}\,\mathrm{Id}_B, \tag{9.1}$$

где Id_B — тождественное сечение $\mathrm{End}(B)$, а c — константа. Мы называем *с константой Янга–Миллса расслоения* B.

ω_0-Янг–миллсовы расслоения удовлетворяют тем же самым элементарным свойствам, что и обыкновенные янг–миллсовы расслоения. В частности, любая тензорная степень ω_0-янг–миллсова расслоения опять ω_0-янг–миллсова. Следующее предложение дает пример ω_0-янг–миллсова расслоения.

[5] В силу предложения 5.6 это верно для всех многообразий Эйнштейна–Вейля. Следовательно, каждое локально конформно гиперкэлерово многообразие удовлетворяет этому условию.

Предложение 9.2. *Пусть M — вайсманово многообразие Эйнштейна–Вейля. Рассмотрим касательное расслоение TM как голоморфное эрмитово расслоение. Тогда TM ω_0-янг–миллсово с положительной константой Янга–Миллса.*

Доказательство. Пусть ∇_{W} — связность Вейля на TM, а ∇_{C} — связность Черна. По определению $\nabla_{\mathrm{W}}^{0,1} = \nabla_{\mathrm{C}}^{0,1}$. Рассмотрим весовое расслоение (L, ∇_L) на M. Поскольку TM снабжено метрикой со значениями в $L^{\otimes 2}$, естественная связность $\nabla_{\mathrm{W},L}$ на $TM \otimes (L^*)^{\otimes 2}$, индуцированная ∇_{W}, ∇_L, эрмитова. Следовательно, $\nabla_{\mathrm{W},L}$ — связность Черна на голоморфном эрмитовом расслоении $TM \otimes L^{\otimes 2}$.

Поскольку ∇_L плоская, мы имеем $\nabla_{\mathrm{W},L}^2 = \nabla_{\mathrm{W}}^2$. Связность Черна на $TM \otimes (L^*)^{\otimes 2}$ получена как тензорное произведение связности Черна на TM и на L. Мы получаем

$$\nabla_{\mathrm{W}}^2 = \nabla_{\mathrm{W},L}^2 = \nabla_{\mathrm{C}}^2 - 2C,$$

где $C = -2\sqrt{-1}\,\omega_0$ — кривизна связности Черна на L (см. теорему 6.7). Из этого следует

$$\nabla_{\mathrm{C}}^2 = 2C + \nabla_{\mathrm{W}}^2.$$

Поскольку $\Lambda_0(C)$ — константа, чтобы закончить доказательство предложения 9.2, осталось доказать, что

$$\Lambda_0(\Theta_{\mathrm{W}}) = 0, \tag{9.2}$$

где $\Theta_{\mathrm{W}} \in \Lambda^2(M) \otimes \mathrm{End}(TM)$ — кривизна связности Вейля.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 9.3. *Пусть M — вайсманово многообразие Эйнштейна–Вейля, а ω — эрмитова форма M. Обозначим через $\Lambda_\omega\colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-2}(M)$ эрмитово сопряженный оператор к $\eta \to \eta \wedge \omega$. Тогда $\Lambda_\omega(\Theta_{\mathrm{W}}) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{M}$ — универсальное накрытие M, а rg — метрика Калаби–Яу на $\widetilde{M}$. Форма Θ_{W} — кривизна связности Леви-Чивиты на $\widetilde{M}$. Следовательно, TM янг–миллсово по отношению к этой метрике и Θ_{W} ортогонально к кэлеровой форме $r\omega$. Это значит, что Θ_{W} ортогональна к ω. Мы получили, что $\Lambda_\omega(\Theta_{\mathrm{W}}) = 0$. $\square$

Вернемся к доказательству предложения 9.2. Согласно лемме 9.3

$$\Lambda_\omega(\Theta_{\mathrm{W}}) = 0.$$

Для доказательства предложения 9.2 нам нужно

$$\Lambda_0(\Theta_{\mathrm{W}}) = 0.$$

По предложению 6.1

$$\Lambda_\omega \Theta_{\mathrm{W}} - \Lambda_0 \Theta_{\mathrm{W}} = \Theta_{\mathrm{W}}(\theta^\sharp, I(\theta^\sharp)).$$

Следовательно, чтобы доказать $\Lambda_\omega \Theta_{\mathrm{W}} = \Lambda_0 \Theta_{\mathrm{W}} = 0$, нужно продемонстрировать, что кривизна Θ_{W}, ограниченная на каноническое слоение Ξ, зануляется. Следующая лемма заканчивает доказательство предложения 9.2.

Лемма 9.4. *Пусть M — вайсманово многообразие, $\Xi \subset TM$ — каноническое слоение, а ∇ — связность Вейля. Тогда ∇, ограниченная на листы Ξ, плоска.*

Доказательство. Используя (4.1) и $\nabla_g \theta^\sharp = 0$, мы получаем

$$\nabla_X \theta^\sharp = X \tag{9.3}$$

для всех векторных полей $X \in TM$. Следовательно,

$$\nabla_X \nabla_Y \theta^\sharp = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0.$$

Значит, $\Theta_{\mathrm{W}}(X, Y, \theta^\sharp) = 0$ для всех $X, Y \in TM$. Используя симметрии кривизны, мы получаем, что $\Theta_{\mathrm{W}}(X, \theta^\sharp, Y) = 0$ для всех $X, Y \in TM$. Это доказывает лемму 9.4. Предложение 9.2 доказано. $\square$

9.2. Теоремы о занулении когомологий для отрицательных расслоений. В этом пункте мы доказываем еще одну теорему о занулении когомологий, основанную на теореме 7.7. Можно доказать и более общие результаты в соответствии с общим формализмом теорем о занулении когомологий в алгебраической геометрии.

Теорема 9.5. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие, B — голоморфное эрмитово расслоение и $\Theta_B \in \Lambda^{1,1}(M) \otimes \mathrm{End}(B)$ — его кривизна. Рассмотрим ω_0-оператор Ходжа*

$$\Lambda_0 \colon \Lambda^{1,1}(M) \otimes \mathrm{End}(B) \to \mathrm{End}(B)$$

(*п.* 7.2). *Предположим, что самосопряженный оператор $\sqrt{-1}\,\Lambda_0(\Theta_B)$ строго отрицателен везде на M. Тогда B не имеет нетривиальных голоморфных сечений.*

Доказательство. Пусть $\beta \in B$ — голоморфное сечение B. Тогда $\nabla^{0,1}(\beta) = 0$. Из определения $\overline{\partial}_0$ мы получаем, что $\overline{\partial}_0\beta = 0$. Уравнение $\overline{\partial}_0^*\beta = 0$ очевидно по соображениям размерности. Следовательно, β $\overline{\partial}_0$-гармонично. Из равенства (7.12) мы получаем немедленно, что

$$\bigl(\sqrt{-1}\,\Lambda_0\Theta_B(\beta), \beta\bigr) > 0.$$

Это невозможно, поскольку оператор $\sqrt{-1}\,\Lambda_0(\Theta_B)$ строго отрицателен. $\square$

Следствие 9.6. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие, а B — ω_0-янг–миллсово расслоение с отрицательной константой Янга–Миллса. Тогда у B нет глобальных голоморфных сечений.*

Доказательство следует немедленно из теоремы 9.5. $\square$

9.3. Зануление голоморфных форм. Основной результат этого раздела — следующая

Теорема 9.7. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие Эйнштейна–Вейля. Предположим, что M некэлерово. Тогда на M нет глобальных голоморфных p-форм для всех $p > 0$.*

Доказательство вытекает из предложения 9.2 и следствия 9.6. $\square$

Этот результат имеет следующее топологическое следствие.

Теорема 9.8. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие Эйнштейна–Вейля. Предположим, что M некэлерово. Тогда первое число Бетти M равно* 1:

$$h^1(M) = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Дольбо $E_r^{p,q}$, ассоциированную с M. Тогда $E_2^{p,q} = H^q(\Omega^p(M))$. По теореме 9.7 мы имеем $H^0(\Omega^1(M)) = 0$, по теореме 8.4 имеем $H^1(\Omega^0(M)) = \mathbb{C}$. Поскольку спектральная последовательность Дольбо сходится к когомологиям де Рама, мы получаем

$$h^1(M) \le \dim H^0(\Omega^1(M)) + \dim H^1(\Omega^0(M)) = 1.$$

Осталось доказать, что $h^1(M) \neq 0$. Группа монодромии G весового расслоения лежит в $\mathbb{R}^{>0}$, следовательно, G абелева и без кручения. Если $h^1(M) = 0$, весовое расслоение имеет тривиальную монодромию. По утверждению 2.8 локально конформно кэлерово многообразие

с тривиальным весовым расслоением кэлерово. Значит, $h^1(M) > 0$. Это доказывает теорему 9.8. $\square$

Похожая теорема получена в [1] с использованием оценок на кривизну Риччи.

10. ВВЕДЕНИЕ В САСАКИЕВУ ГЕОМЕТРИЮ

Сасакиевы расслоения были определены С. Сасаки [27]. В этом разделе мы даем определение 1-сасакиевых и 3-сасакиевых многообразий и приводим некоторые элементарные факты сасакиевой геометрии. Дальнейшие результаты и ссылки по теме есть в замечательном обзоре [5].

Определение 10.1. Пусть (X, g) — риманово многообразие. *Конус* X — риманово многообразие $C(X) := (X \times \mathbb{R}^{>0}, dt^2 + t^2 g)$, где t — параметр на $\mathbb{R}^{>0}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ отображение

$$\tau_\lambda \colon C(X) \to C(X), \qquad (x, t) \to (x, \lambda t)$$

умножает метрику на λ^2.

Определение 10.2. Пусть X — риманово многообразие. 1-Сасакиева структура на X — это комплексная структура на конусе $C(X)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) метрика на $C(X)$ кэлерова;

(ii) отображение $\tau_\lambda \colon C(X) \to C(X)$ голоморфно для всех $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$.

3-Сасакиева структура на X — это гиперкомплексная структура на $C(X)$ такая, что

(i) метрика на $C(X)$ гиперкэлерова;

(ii) отображение $\tau_\lambda \colon C(X) \to C(X)$ совместимо с гиперкомплексной структурой для всех $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$.

Замечание 10.3. 3-Сасакиево многообразие снабжено индуцированной 1-сасакиевой структурой для любого кватерниона $L \in \mathbb{H}$, $L^2 = -1$.

Можно определить 1-сасакиевы и 3-сасакиевы многообразия в терминах векторных полей $I(dt^\sharp) \in TX$ и $I(dt^\sharp), J(dt^\sharp), K(dt^\sharp) \in TX$ и связанных с ними контактных структур (см. [5]). Исторически сасакиевы многообразия были определены именно так. 1-Сасакиевы многообразия играют по отношению к контактным ту же роль, что кэлеровы по отношению к симплектическим. Можно сказать так, что 1-сасакиево многообразие есть контактное многообразие, снабженное римановой метрикой, согласованной с контактной структурой.

Определение 10.4. Пусть X — 1-сасакиево многообразие такое, что риманова метрика на X удовлетворяет уравнению Эйнштейна. Тогда X называется *многообразием Эйнштейна–Сасаки.*

Многообразия Эйнштейна–Сасаки можно охарактеризовать в терминах их кэлеровых конусов следующим образом.

Предложение 10.5. *Пусть X — 1-сасакиево многообразие,* $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n+1$. *Тогда X — многообразие Эйнштейна–Сасаки, если и только если его конус риччи-плоский. В этом случае эйнштейнова константа X равна $2n$.*

Доказательство. См., например, [5, Proposition 1.1.9]. $\square$

Замечание 10.6. Конус 3-сасакиева многообразия гиперкэлеров, следовательно, он риччи-плоский. Поэтому 3-сасакиево многообразие всегда эйнштейново.

Замечание 10.7. По теореме Майерса полное эйнштейново многообразие с положительной константой Эйнштейна компактно и имеет конечную фундаментальную группу.

11. ВАЙСМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С $h^1(M) = 1$ И САСАКИЕВА ГЕОМЕТРИЯ

11.1. Вайсмановы многообразия с точной формой Ли. Вайсмановы многообразия тесно связны с сасакиевой геометрией, как видно из следующего предложения.

Предложение 11.1 [20, 16]**.** *Пусть M — вайсманово многообразие с формой Ли θ. Предположим, что $\theta \neq 0$ и θ точна: $\theta = d\zeta$. Предположим также, что метрика Годушона на M полна. Рассмотрим функцию ζ как отображение $\zeta\colon M \to \mathbb{R}$. Тогда M изометрично произведению $X \times \mathbb{R}$, где X — полное 1-сасакиево многообразие, а проекция $M = X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана функцией ζ. Более того, если M локально конформно гиперкэлерово, то X имеет естественную структуру 3-сасакиева многообразия.*

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $\theta^\sharp$, двойственное к θ. По определению $\theta^\sharp$ — параллельное векторное поле на M и $\theta^\sharp$ равно градиенту ζ. Следовательно, градиентный поток Φ_λ, связанный с ζ, — изометрия. Отображение Φ_λ хорошо определено, поскольку M полно. Градиентный поток Φ_λ, очевидно, коммутирует с ζ:

$$\zeta(\Phi_\lambda(x)) = \lambda + \zeta(x). \tag{11.1}$$

Следовательно, Φ_λ индуцирует изометрию на слоях $\zeta(x)$. Обозначим через X слой $\zeta^{-1}(0)$. Пусть $R\colon X \times \mathbb{R} \to M$ отображает (t, x) в $\Phi_t(x)$. По построению R — изометрия. Обозначим риманову метрику на M через g. По утверждению 4.3 метрика $e^{2t}g$ кэлерова. После репараметризации $t \to e^t$ мы получим, что метрика $(e^{2t}g, (de^t)^2)$ — это метрика конуса на $M = X \times \mathbb{R}^{>0}$. Следовательно, X 1-сасакиево. Если M локально конформно гиперкэлерово, то $C(X)$ гиперкэлерово (утверждение 2.10), следовательно, X 3-сасакиево. $\square$

Замечание 11.2. Накрытие компактного многообразия полно. Следовательно, предложение 11.1 верно для накрытия любого компактного вайсманова многообразия с точной формой Риччи.

11.2. Структурная теорема для вайсмановых многообразий с первым числом Бетти 1. Вайсмановы многообразия с первым числом Бетти 1 можно классифицировать в терминах 1-сасакиевой геометрии следующим образом.

Пусть X — 1-сасакиево многообразие, а $C(X)$ — его конус. Для числа $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$, рассмотрим отношение эквивалентности $\sim_q$ на $C(X) = X \times \mathbb{R}^{>0}$, порожденное $(x, t) \sim (x, qt)$. Поскольку отображение $(x, t) \to (x, qt)$ умножает метрику на q^2, фактор $M = C(X)/{\sim_q}$ локально конформно кэлеров. Более того, M — многообразие Вайсмана с метрикой Годушона, которая определяется изоморфизмом $M \cong X \times S^1$.

Эту конструкцию можно обобщить следующим образом. Пусть $\varphi\colon X \to X$ — автоморфизм 1-сасакиева многообразия. Отображение $(x, t) \xrightarrow{\varphi_q} (\varphi(x), qt)$ совместимо с комплексной структурой и умножает метрику на q^2. Следовательно, фактор $M_{\varphi,q}$ многообразия $C(X)$ по соответствующему соотношению эквивалентности $\sim_{\varphi,q}$ — локально конформно кэлерово многообразие. Следующая теорема довольно проста.

Теорема 11.3 (структурная теорема для вайсмановых многообразий с $h^1(M) = 1$)**.** *Пусть X — компактное 1-сасакиево многообразие, $\varphi\colon X \to X$ — 1-сасакиев автоморфизм, а $M_{\varphi,q}$ — локально конформно кэлерово многообразие, построенное выше. Тогда $M_{\varphi,q}$ — вайсманово многообразие, удовлетворяющее следующим условиям*:

(i) $h^1(M_{\varphi,q}) = 1 \;\Leftrightarrow\; h^1(X) = 0$;

(ii) *1-сасакиево многообразие X вместе с автоморфизмом φ и числом q единственным образом определяется локально конформно кэлеровой структурой на $M_{\varphi,q}$*;

(iii) *каждое компактное вайсманово многообразие с $h^1(M) = 1$ может быть построено таким образом.*

Замечание 11.4. В [16, Proposition 7.4] доказано, что $M_{\varphi,q}$ — вайсманово многообразие.

Доказательство теоремы 11.3. Чтобы показать, что $M_{\varphi,q}$ — вайсманово многообразие, рассмотрим отображение $\mathrm{Id}\times\ln\colon C(X)\to X\times\mathbb{R}$, $(x,t)\to(x,\ln t)$. Пусть $\widetilde{g}$ — метрика произведения $X\times\mathbb{R}$, поднятая на $C(X)$. Отображение φ_q индуцирует изометрию, следовательно, $\widetilde{g}$ соответствует метрике g на $M_{\varphi,q}$. По построению g принадлежит конформному классу локально конформно кэлеровой структуры на $M_{\varphi,q}$. Элементарный подсчет показывает, что $\nabla(\widetilde{g})=g\otimes dt$, где t — параметр на $X\times\mathbb{R}$, соответствующий второй компоненте. Следовательно, форма Ли метрики g параллельна.

Чтобы найти $H^1(M_{\varphi,q})$, рассмотрим естественную проекцию

$$r\colon C(X)\to\mathbb{R}^{>0}$$

и пусть $\zeta=\ln r$. Отображение ζ отправляет точку $(x,t)\sim_{\varphi,q}(x',t')$ в $(\ln t,\ln t+k\ln q)$, $k\in\mathbb{Z}$. Следовательно, ζ индуцирует отображение $\zeta_q\colon M_{\varphi,q}\to\mathbb{R}/(\ln q)\mathbb{Z}$ из $M_{\varphi,q}$ на окружность. По построению $d\zeta_q=\theta$, где θ — форма Ли. Следовательно,

$$\zeta_q\colon M_{\varphi,q}\to S^1 \tag{11.2}$$

— это гладкое слоение со слоем X.

Рассмотрим спектральную последовательность Серра $E_r^{p,q}$ для расслоения (11.2). Поскольку $H^i(S^1)=0$ для $i>0$, спектральная последовательность $E_r^{p,q}$ вырождается в члене E_2. Следовательно,

$$h^1(M_{\varphi,q})=h^1(S^1)+h^1(X)=h^1(X)+1. \tag{11.3}$$

Это доказывает теорему 11.3(i).

Чтобы восстановить (X,φ) из локально конформно кэлеровой структуры на $M=M_{\varphi,q}$, заметим, что метрика Годушона на M единственна с точностью до нормировки, следовательно, форма θ определяется канонически исходя из локально конформно кэлеровой геометрии. Применяя предложение 11.1 к $\widetilde{M}=C(X)$, мы восстанавливаем 1-сасакиеву структуру на X вместе с изоморфизмом $\widetilde{M}\cong C(X)$. Преобразование монодромии $\widetilde{M}$ обязательно имеет вид φ_q для некоторых φ, q. Это позволяет восстановить (X,φ).

Осталось доказать теорему 11.3(iii). Пусть M — компактное вайсманово многообразие, $h^1(M)=1$, L — его весовое расслоение и $\widetilde{M}$ — накрытие, ассоциированное с группой монодромии G расслоения L. Поскольку $h^1(M)=1$, M некэлерово, следовательно, L нетривиально. Группа монодромии G естественным образом реализуется как подгруппа в $\mathbb{R}^{>0}$. Значит, G абелева и без кручения. Поскольку $h^1(M)=1$, $G\cong\mathbb{Z}$.

Мы показали, что $M=\widetilde{M}/\mathbb{Z}$. Пусть $\zeta\colon\widetilde{M}\to\mathbb{R}$ — функция, соответствующая $d\zeta=\theta$. По предложению 11.1 $\widetilde{M}=X\times\mathbb{R}$, где X — полное 1-сасакиево многообразие, а проекция на вторую компоненту задана ζ. Фиксируем точку $x_0\in\widetilde{M}$. Для каждой точки $y\in\widetilde{M}$ и пути γ из x_0 в y мы имеем по формуле Стокса

$$\zeta(x_0)-\zeta(y)=\int\limits_\gamma\theta. \tag{11.4}$$

Пусть γ_0 — образующая группы монодромии L и w — интеграл $w:=\int_{\gamma_0}\theta$. Обозначим через $R\colon\widetilde{M}\to\widetilde{M}$ преобразование монодромии $\widetilde{M}$, ассоциированное с $\gamma_0\in G$. Используя изоморфизм $\widetilde{M}=X\times\mathbb{R}$ и (11.4), мы получим, что R отображает (x,t) в $(x_1,t+w)$. Это дает отображение $\varphi\colon X\to X$, $x\to x_1$. Очевидно, $M=C(X)/\sim_{\varphi,e^w}$. Мы доказали теорему 11.3(iii). $\square$

11.3. Структурные теоремы для локально конформно гиперкэлеровых многообразий и вайсмановых многообразий Эйнштейна–Вейля. Сравнивая теорему 9.8 и теорему 11.3, мы немедленно получаем следующие структурные теоремы.

Теорема 11.5. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие Эйнштейна–Вейля, не допускающее кэлеровой структуры. Тогда существуют многообразие Эйнштейна–Сасаки X и 1-сасакиев автоморфизм $\varphi\colon X \to X$ такие, что $M \cong C(X)/{\sim_{\varphi,q}}$ для некоторого $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$ (см. теорему 11.3). Более того, X, φ и q определяются канонически.*

Доказательство. По предложению 11.1 накрытие $\widetilde{M}$ изоморфно $C(X)$ для некоторого 1-сасакиева многообразия X. По утверждению 5.4 $C(X)$ риччи-плоско. По предложению 10.5 X — многообразие Эйнштейна–Сасаки. По теореме 9.8 $h^1(M) = 1$. По теореме 11.3 $M \cong C(X)/{\sim_{\varphi,q}}$ и X, φ определены канонически. $\square$

Теорема 11.6. *Пусть M — компактное локально конформно гиперкэлерово многообразие, не допускающее гиперкэлеровой структуры. Тогда существуют 3-сасакиево многообразие X и 3-сасакиев автоморфизм $\varphi\colon X \to X$ такие, что $M \cong C(X)/{\sim_{\varphi,q}}$ для некоторого $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$ (см. теорему 11.3). Более того, X и автоморфизм φ определяются канонически по локально конформно гиперкэлеровой структуре на M.*

Доказательство. Поскольку M локально конформно гиперкэлерово, это многообразие Эйнштейна–Вейля. По теореме 9.8 $h^1(M) = 1$. По теореме 11.3 $M \cong C(X)/{\sim_{\varphi,q}}$ и X, φ определяются канонически. Накрытие $\widetilde{M} \cong C(X)$ по определению гиперкэлерово, значит, X 3-сасакиево. $\square$

11.4. Квазирегулярные локально конформно гиперкэлеровы многообразия.

Определение 11.7. Пусть M — вайсманово многообразие, а $\theta^\sharp$ — векторное поле, двойственное форме Ли θ. Рассмотрим поток диффеоморфизмов Φ_t, ассоциированный с $\theta^\sharp$. Многообразие M называется *квазирегулярным*, если для всех компактных множеств $K \subset M$ и всех точек $x \in M$ пересечение орбиты $V_x = \{\Phi_t(x),\, t \in \mathbb{R}\}$ с K компактно. Другими словами, M квазирегулярно, если множество V_x не имеет точек сгущения для всех $x \in M$.

Если дано локально конформно гиперкэлерово многообразие M, можно построить несколько слоений на M, аналогичных каноническому слоению Ξ. Пространство слоев для этих слоений будет орбиобразием, если M квазирегулярно. Таким образом, можно редуцировать квазирегулярное локально конформно гиперкэлерово многообразие

(a) до 3-сасакиева орбиобразия, взяв пространство листов одномерного слоения, порожденного полем $\theta^\sharp$;

(b) до голоморфного контактного орбиобразия Кэлера–Эйнштейна (взяв пространство листов канонического голоморфного слоения Ξ);

(c) до кватернионно кэлерова орбиобразия (взяв пространство листов вещественного 4-мерного слоения, порожденного $\theta^\sharp$, $I(\theta^\sharp)$, $J(\theta^\sharp)$, $K(\theta^\sharp)$).

Все эти конструкции обратимы. Детали и дальнейшие результаты см. в [24, 25].

Используя структурную теорему (теорема 11.6), можно определить класс квазирегулярных локально конформно гиперкэлеровых многообразий в терминах 3-сасакиевых слоений над окружностью.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 11.8. *Пусть M — компактное локально конформно гиперкэлерово многообразие, полученное, как в теореме 11.6, из 3-сасакиева многообразия X и 3-сасакиева автоморфизма $\varphi\colon X \to X$. Тогда M квазирегулярно, если и только если φ — автоморфизм конечного порядка.* $\square$

Приложение А. $h^1(M) = 1$ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО КЭЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ

В этом приложении мы даем прямое геометрическое доказательство теоремы 9.8.

Пусть M — полное вайсманово многообразие, а $\widetilde{M}$ — его накрытие, отвечающее монодромии весового расслоения. Тогда $\widetilde{M} = C(X)$ для полного 1-сасакиева многообразия X (предложение 11.1). Если M — многообразие Эйнштейна–Вейля, то X — многообразие Эйнштейна–Сасаки (это следует немедленно из утверждения 5.4 и предложения 10.5). В силу теоремы Майерса (замечание 10.7) X компактно, а $\pi_1(X)$ конечно. Поэтому теорема 9.8 немедленно вытекает из следующего утверждения.

Теорема А.1. *Пусть M — компактное вайсманово многообразие, а $\widetilde{M}$ — его накрытие, ассоциированное с группой монодромии G весового расслоения. В силу предложения* 11.1 $\widetilde{M} \cong C(X)$ *для некоторого* 1*-сасакиева многообразия X. Предположим, что X компактно и $h^1(X) = 0$. Тогда $h^1(M) = 1$.*

Доказательство. По определению $M = \widetilde{M}/G$. Пусть $\zeta\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ — функция такая, что $d\zeta = \theta$. Обозначим через $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ гомоморфизм $\gamma \to \int_\gamma \theta$. Легко проверить, что это отображение равно логарифму отображения монодромии $G \to \mathbb{R}^{>0}$. В силу (11.4) монодромия действует таким образом, что для всех $\gamma \in G$ мы имеем

$$\zeta(\gamma x) = \chi(\gamma) + \zeta(x). \tag{А.1}$$

Поскольку G — это монодромия L, отображение χ — мономорфизм. Тогда либо $G = \mathbb{Z}$ и в этом случае M расслоено над окружностью со слоем X, значит, $h^1(M) = h^1(X) + 1 = 1$ (см. (11.3)), либо $\chi(G)$ плотно в $\mathbb{R}$. Чтобы доказать теорему А.1, нужно продемонстрировать, что $\chi(G)$ не может быть плотно. Пусть это не так.

Рассмотрим отрезок $[0,1] \subset \mathbb{R}$, и пусть $\widetilde{M}_0 := \zeta^{-1}([0,1])$ — соответствующее подмножество в $\widetilde{M}$. Очевидно, множество $\widetilde{M}_0 = X \times [0,1]$ компактно. Для каждой точки $x \in \widetilde{M}$, $\zeta(x) = 0$, пусть Gx обозначает ее орбиту, взятую по отношению к действию монодромии на $\widetilde{M}$. В силу (А.1) Gx пересекает $\widetilde{M}_0$ для всех $\gamma \in G$ таких, что $\chi(\gamma) \in [0,1]$. Если $\chi(G)$ плотно, это множество бесконечно. Мы получаем, что $Gx \cap \widetilde{M}_0$ бесконечно. Поскольку M_0 компактно, Gx имеет точки концентрации. Это невозможно, поскольку $\widetilde{M} \to \widetilde{M}/G$ — накрытие. Значит, $\chi(G)$ не может быть плотно. Мы доказали теорему А.1. $\square$

Приложение Б. КОНТРПРИМЕРЫ

Для общего вайсманова многообразия (не обязательно Эйнштейна–Вейля) теорема 9.7 и теорема 9.8 неверны, как видно из следующего примера.

Пусть S — эллиптическая кривая, а B — отрицательное голоморфное линейное расслоение. Предположим, что B снабжено эрмитовой метрикой и соответствующая связность Черна имеет кривизну

$$\Theta_B = c\sqrt{-1}\,\omega, \tag{Б.1}$$

где $c > 0$ — положительная константа, а ω — кэлерова форма S. Рассмотрим функцию $r\colon \operatorname{Tot} B \to \mathbb{R}$, $v \to |v|^2$. Из (Б.1) следует, что r — кэлеров потенциал на $\operatorname{Tot} B$ (см. [3, (15.19)]). Пусть

$$X := \{v \in \operatorname{Tot} B \mid |v|^2 = 1\}$$

— расслоение единичных окружностей на S, соответствующее B. Обозначим через $\operatorname{Tot}_0(B)$ пространство ненулевых векторов в B. Тогда $\operatorname{Tot}_0(B) \cong C(X)$. Поскольку $\operatorname{Tot}_0(B)$ кэлерово, X 1-сасакиево.

Рассматривая X как расслоение окружностей над S и используя спектральную последовательность Серра, мы находим, что $h^1(X) = 2$.

Зафиксируем $q \in \mathbb{R}^{>1}$. Пусть $M = \mathrm{Tot}_0(B)/{\sim_q}$, где $\sim_q$ — отношение эквивалентности, порожденное $v \sim qv$. Из построения ясно, что M — локально конформно кэлерово многообразие. Используя метрику произведения на $M \cong X \times S^1$, мы находим, что M вайсманово.

В силу (11.3) $h^1(M) = h^1(X) + 1 = 3$. Это дает контрпример к теореме 9.8 (без предположения об эйнштейн–вейлевости).

Многообразие M снабжено естественной голоморфной проекцией $\pi\colon M \to S$. Эллиптическая кривая S допускает нетривиальную голоморфную форму. Поднимая эту форму на M, мы получим нетривиальную голоморфную форму на вайсмановом многообразии. Следовательно, для теоремы 9.7 предположение об эйнштейн–вейлевости тоже необходимо.

Многообразие M построено другим способом в [34] под названием индуцированного расслоения Хопфа.

Благодарности. Я благодарен Р. Билавски, Д. Каледину и Л. Орнеа за интересные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alexandrov B., Ivanov S.* Weyl structures with positive Ricci tensor: E-print, 2003. math.DG/9902033, vers. 2.
2. *Belgun F.A.* On the metric structure of non-Kähler complex surfaces // Math. Ann. 2000. Bd. 317, N 1. S. 1–40.
3. *Besse A.* Einstein manifolds. New York: Springer, 1987. Рус. пер.: *Бессе А.* Эйнштейновы многообразия. М.: Мир, 1990.
4. *Boyer C.P.* A note on hyper-Hermitian four-manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 102, N 1. P. 157–164.
5. *Boyer C.P., Galicki K.* 3-Sasakian manifolds // Surv. Diff. Geom. 1999. V. 7. P. 123–184; hep-th/9810250.
6. *Boyer C.P., Galicki K.* New Einstein metrics in dimension five // J. Diff. Geom. 2001. V. 57. P. 443–463; math.DG/0003174.
7. *Boyer C.P., Galicki K., Mann B.M.* The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds // J. reine und angew. Math. 1994. Bd. 455. S. 183–220.
8. *Boyer C.P., Galicki K., Nakamaye M.* On the geometry of Sasakian–Einstein 5-manifolds // Math. Ann. 2003. Bd. 325. S. 485–524; math.DG/0012047.
9. *Boyer C.P., Galicki K., Nakamaye M.* Sasakian geometry, homotopy spheres and positive Ricci curvature: E-print, 2002. math.DG/0201147.
10. *Calabi E.* Metriques kähleriennes et fibrès holomorphes // Ann. sci. École Norm. Supér. 1979. V. 12. P. 269–294.
11. *Calderbank D., Pedersen H.* Einstein–Weyl geometry // Surveys in differential geometry: Essays on Einstein manifolds / Ed. by M. Wang, C. LeBrun. Boston: Intern. Press, 1999. P. 387–423.
12. *Dragomir S., Ornea L.* Locally conformal Kähler geometry. Boston: Birkhäuser, 1998. (Progr. Math.; V. 155).
13. *Gauduchon P.* La 1-forme de torsion d'une variete hermitienne compacte // Math. Ann. 1984. Bd. 267. S. 495–518.
14. *Gauduchon P.* Structures de Weyl–Einstein, espaces de twisteurs et varietes de type $S^1 \times S^3$ // J. reine und angew. Math. 1995. Bd. 469. S. 1–50.
15. *Gauduchon P., Ornea L.* Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1998. V. 48, N 4. P. 1107–1127.
16. *Gini R., Ornea L., Parton M.* Locally conformal Kaehler reduction: E-print, 2002. math.DG/0208208.
17. *Griffiths Ph., Harris J.* Principles of algebraic geometry. New York: Wiley-Intersci., 1978. Рус. пер.: *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Основы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
18. *Ivanov S., Papadopoulos G.* A no-go theorem for string warped compactifications // Phys. Lett. B. 2001. V. 497. P. 309–316; hep-th/0008232.
19. *Ivanov S., Papadopoulos G.* Vanishing theorems and string backgrounds // Class. and Quant. Grav. 2001. V. 18. P. 1089–1110; math.DG/0010038.
20. *Kamishima Y., Ornea L.* Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds: E-print, 2001. math.DG/0105040.
21. *Kuo Y.-Y.* On almost contact 3-structure // Tohoku Math. J. 1970. V. 22. P. 325–332.
22. *Nishikawa S., Tondeur Ph.* Transversal infinitesimal automorphisms for harmonic Kähler foliations // Tohoku Math. J. Ser. 2. 1988. V. 40, N 4. P. 599–611.

23. *Obata M.* Affine connections on manifolds with almost complex, quaternionic or Hermitian structure // Japan. J. Math. 1955. V. 26. P. 43–79.
24. *Ornea L.* Weyl structures on quaternionic manifolds. A state of the art: E-print, 2001. math.DG/0105041. См. также: Weyl structures // Selected topics in geometry and mathematical physics / Ed. by E. Barletta. Potenza: Univ. Basilicata, 2002. V. 1. P. 43–80.
25. *Ornea L., Piccinni P.* Locally conformal Kähler structures in quaternionic geometry // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. P. 641–655.
26. *Pedersen H., Poon Y.S., Swann A.* The Einstein–Weyl equations in complex and quaternionic geometry // Diff. Geom. and Appl. 1993. V. 3. P. 309–321.
27. *Sasaki S.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tohoku Math. J. 1960. V. 2. P. 459–476.
28. *Strominger A.* Superstrings with torsion // Nucl. Phys. B. 1986. V. 274. P. 253–284.
29. *Swann A.* Hyper-Kähler and quaternionic Kähler geometry // Math. Ann. 1991. Bd. 289, N 3. S. 421–450.
30. *Tondeur Ph.* Foliations on Riemannian manifolds. New York: Springer, 1988. 247 p. (Universitext).
31. *Tsukada K.* Holomorphic forms and holomorphic vector fields on compact generalized Hopf manifolds // Compos. Math. 1994. V. 93, N 1. P. 1–22.
32. *Tsukada K.* Holomorphic maps of compact generalized Hopf manifolds // Geom. Dedicata. 1997. V. 68, N 1. P. 61–71.
33. *Udrişte C.* Structures presque coquaternioniennes // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie. 1969. V. 13. P. 487–507.
34. *Vaisman I.* Generalized Hopf manifolds // Geom. Dedicata. 1982. V. 13, N 3. P. 231–255.
35. *Vaisman I.* A survey of generalized Hopf manifolds // Rend. Sem. Mat. Torino. 1983. Spec. Iss. P. 205–221.
36. *Verbitsky M.* Hyperkähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory // Asian J. Math. 2002. V. 6, N 4. P. 679–712; math.AG/0112215.