



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Шхагапсоев, Априорная оценка решения краевой задачи с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками,

*Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, номер 4, 208–212

<https://www.mathnet.ru/vkam323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

13 мая 2025 г., 14:18:27



УДК 517.954

**АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**А. М. Шхагапсоев**

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: sh2ps@yandex.ru

Рассматриваются краевые задачи для уравнения третьего порядка параболического типа с дробной производной Капуто. Методом энергетических неравенств доказано единственность и существование обобщенного решения краевой задачи с нелокальным условием Самарского для уравнения с кратными характеристиками со спектральным параметром.

*Ключевые слова: априорная оценка, краевая задача, условие Самарского, дробная производная, производная Капуто, уравнения с кратными характеристиками, метод интегралов энергии, единственность решения.*

© Шхагапсоев А. М., 2018

MSC 35M13

**A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM WITH THE CONDITION OF SAMARA FOR THE GENERALIZED THIRD-ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS**

**A. M. Shkhagapsoev**

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000, KBR, Nalchik, st. Shortanova 89a

E-mail: sh2ps@yandex.ru

The boundary value problems for the third-order equation of parabolic type with fractional derivative of Caputo are considered. The uniqueness and existence of a generalized solution of the boundary value problem with a non-local Samara condition for the equation with multiple characteristics with a spectral parameter is proved by the method of energy inequalities.

*Key words: a priori estimation, boundary value problem, Samara condition, fractional derivative, Caputo derivative, equations with multiple characteristics, energy integrals method, uniqueness of the solution.*

© Shkhagapsoev A. M., 2018

## Введение

В настоящее время теория краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений. Наблюдается существенный рост применения уравнений с частными производными дробного порядка при описании физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной структурой, а так же при моделировании биологических явлений [1]. Работа [2] посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования с целых порядков на дробные, а также приложениями теории дробного интегрирования и дифференцирования.

Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками содержащее производную первого порядка по времени

$$u_y = u_{xxx} + f(x, y),$$

впервые было рассмотрено в работах [3]–[5]. Полученные в них результаты были обобщены для уравнения  $(2n-1)$ -го порядка в работе [6]. В работе [7] построены фундаментальные решения с применением преобразования Лапласа, теории потенциалов и получены оценки этих решений.

Для уравнения

$$u_y = u_{xxx} + a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u + f(x, y),$$

в работе [8] доказано единственность решения и построена функция Грина краевой задачи Каттабрига.

В работах [9]–[10] получены априорные оценки решения различных краевых задач, в том числе задачи Каттабрига для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения краевой задачи для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

## Постановка задачи

**Задача.** В прямоугольнике  $\bar{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq h\}$  рассмотрим следующую краевую задачу

$$\partial_{0y}^\alpha u = \lambda_1 u_{xxx} + \lambda_2 u, \quad 0 < x < r, \quad 0 < y \leq h, \quad (1)$$

$$u(0, y) = u(r, y) = 0, \quad 0 < y < h, \quad (2)$$

$$\int_0^r u(x, y) dx = 0, \quad 0 < y < h, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < r, \quad (4)$$

где

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u_{\tau}(x, \tau)}{(y-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

– дробная производная Капуто порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  [11],  $\lambda_1, \lambda_2 - const$ . В дальнейшем будем предполагать существование решения  $u(x, y) \in C^{3,1}(\bar{D})$  задачи (1) – (4), где  $C^{3,1}(\bar{D})$  – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными третьего порядка по  $x$  и первого порядка по  $y$  на  $\bar{D}$ .

Введем следующие обозначения:

$$\|u\|_0^2 = \int_0^r u^2(x, y) dx, \quad D_{0y}^{-\alpha} u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, \tau)}{(y-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$  [1].

Нелокальное условие (3) принято называть условием Самарского.

Из уравнения (1) после почленного его интегрирования по  $x$  от  $\varepsilon > 0$  до  $r - \varepsilon > 0$  имеем

$$\partial_{0y}^{\alpha} \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} u(\xi, y) d\xi = \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} u_{xx}(x, y) dx = -u_{xx}(\varepsilon, y) + u_{xx}(r - \varepsilon, y).$$

Если  $u_{xx} \in C(\bar{D})$ , то отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находим

$$\partial_{0y}^{\alpha} \int_0^r u(\xi, y) d\xi = u_{xx}(r, y) - u_{xx}(0, y).$$

Справедлива следующая

**Теорема.** Для решения  $u = u(x, y)$  задачи справедлива априорная оценка

$$\|u\|_0^2 + D_{0y}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M \|\tau'\|_0^2, \text{ если } \lambda_2 < 0 \quad (5)$$

где  $M$  положительная константа, и априорная оценка

$$\|u\|_0^2 \leq \frac{l^2}{2} E_{\alpha}(2\lambda_2 y^{\alpha}) \|\tau'\|_0^2, \text{ если } \lambda_2 > 0 \quad (6)$$

где  $E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + 1)$  – функция Миттаг-Леффлера.

**Доказательство.** Умножим уравнение (1) на  $u_{xx}(x, y)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $r$ :

$$\int_0^r u_{xx} \partial_{0y}^{\alpha} u dx = \lambda_1 \int_0^r \left( \frac{u_{xx}^2}{2} \right)_x dx + \lambda_2 \int_0^r u_{xx} u dx. \quad (7)$$

После преобразований, тождество (7) примет вид

$$\int_0^r u_{xx}(x, y) \partial_{0y}^{\alpha} u(x, y) dx = \frac{\lambda_1}{2} (u_{xx}^2(r, y) - u_{xx}^2(0, y)) + \lambda_2 (u(r, y) u_x(r, y) - u(0, y) u_x(0, y)) - \lambda_2 \|u_x\|_0^2. \quad (8)$$

Учитывая однородные условия (2)-(3) равенство (8) переходит в следующее равенство

$$-\int_0^r u_{xx} \partial_{0y}^\alpha u dx = \lambda_2 \|u_x\|_0^2. \quad (9)$$

Преобразуем левую часть в равенстве (9) используя Лемму 1 из [12]

$$\begin{aligned} \int_0^r u_{xx} \partial_{0y}^\alpha u dx &= -u_x \partial_{0y}^\alpha u \Big|_0^r + \int_0^r u_x \partial_{0y}^\alpha u_x dx = \\ &= u_x(0, y) \partial_{0y}^\alpha u(0, y) - u_x(r, y) \partial_{0y}^\alpha u(r, y) + \int_0^r u_x \partial_{0y}^\alpha u_x dx = \int_0^r u_x \partial_{0y}^\alpha u_x dx \geq \frac{1}{2} \partial_{0y}^\alpha \|u_x\|_0^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученное неравенство в (9) будем иметь

$$\partial_{0y}^\alpha \|u_x\|_0^2 \leq 2\lambda_2 \|u_x\|_0^2. \quad (10)$$

Применив к обеим частям неравенства (10) оператор дробного интегрирования  $D_{0y}^{-\alpha}$ , с учетом условий теоремы приходим к следующему неравенству

$$\|u_x\|_0^2 - 2\lambda_2 D_{0y}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq \|\tau'\|_0^2. \quad (11)$$

Учитывая неравенство  $\|u_x\|_0^2 \geq \frac{2}{r^2} \|u\|_0^2$ , из (11) получим априорную оценку (5) с константой  $M = \frac{r^2}{2 \min\{-\lambda_2 r^2, 1\}}$ .

Если  $\lambda_2 > 0$ , то на основании Леммы 2 из [12] приходим к априорной оценке (6). Из (5) и (6) следует единственность и непрерывная зависимость решения исходной задачи от входных данных.  $\square$

## Список литературы

- [1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnое ischislenie i ego primeneniye*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]
- [2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 668 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya*, Nauka i tekhnika, Minsk, 1987, 668 pp.]
- [3] Block H., "Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples", *Ark. mat., astron., fys.*, **7**:13 (1912), 1–34.
- [4] Del Vecchio E., "Sulle equazioni  $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x, y) = 0$ ,  $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x, y) = 0$ ", *Mem. Real acad. cienc. Torino.*, **66** (1915), 1–41.
- [5] Del Vecchio E., "Sulle deux problems d'integration pour las equazioni paraboliques  $Z_{xxx} - Z_y = 0$ ,  $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$ ", *Ark. mat., astron., fys.*, **11** (1916), 32–34.
- [6] Cattabriga L., "Potenziali di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabili a caratteristiche multiple", *Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova.*, **3** (1961), 1–45.
- [7] Cattabriga L., "Un problema al kontorno per una equazione di ordine disparty", *Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat.*, **3**:2 (1959), 163–169.
- [8] Джураев Т. Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент, 1979, 236 с. [Dzhuraev T. D., *Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov*, FAN, Tashkent, 1979, 236 pp.]

- [9] Шхагапсоев А. М., “Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, № 1(12), 66–71. [Shkhagapsoev A. M., “Apriornaya ocenka zadachi Kattabriga dlya obobshchennogo uravneniya tret’ego poryadka s kratnymi harakteristikami”, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2016, № 1(12), 66–71].
- [10] Шхагапсоев А. М., “Априорные оценки решения краевых задач для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Известия КБНЦ РАН*, 2016, № 6(74), 96–101. [Shkhagapsoev A. M., “Apriornye ocenki resheniya kraevykh zadach dlya obobshchennogo uravneniya tret’ego poryadka s kratnymi harakteristikami”, *Izvestiya KBNC RAN*, 2016, № 6(74), 96–101].
- [11] Caputo M., *Elasticita e Dissipazione*, Bologna, 1969.
- [12] Алиханов А. А., “Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка”, *Дифференциальные уравнения*, 2010, № 5(46), 658–664. [Alihanov A. A., “Apriornye ocenki reshenij kraevykh zadach dlya uravnenij drobnogo poryadka”, *Differencial’nye uravneniya*, 2010, № 5(46), 658–664].

**Для цитирования:** Шхагапсоев А. М. Априорная оценка решения краевой задачи с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). С. 208-212. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-208-212

**For citation:** Shkhagapsoev A. M. A priori estimate of the solution of a boundary problem with the condition of samara for the generalized third-order equation with multiple characteristics, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 208-212. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-208-212

Поступила в редакцию / Original article submitted: 29.03.2018