Ю. Л. Ершов, Регулярно замкнутые поля, *Докл. АН СССР*, 1980, том 251, номер 4, 783–785

Поскольку доказательства теорем аналогичны, приведем только доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\xi(A)$ — функция выбора, определенная на множестве всех непустых подмножеств пространства X, и $\Psi(X) = \tau$. Обозначим через Bx псевдобазу в точке $x \in X$ мощности не выше τ. Построим по индукции последовательность $\{F_\alpha\colon \alpha < \omega_{\tau^+}\}$ бикомпактных подмножеств из X по следующему правилу:

a) $F_0 = \{x\}$, где x — произвольная точка из X.

b) Пусть $\alpha = \beta + 1$. Рассмотрим семейство множеств $\omega_\beta = \cup\{Bx\colon x \in F_\beta\}$. Для всякой конечной подсистемы множеств $K \subseteq \omega_\beta$, покрывающей F_β и такой, что $X \setminus \widetilde{K} \neq \phi$, возьмем точку $\xi(X \setminus \widetilde{K})$, где $\widetilde{K}$ — объединение элементов K. Обозначим

$$F'_\alpha = F_\beta \cup \{\xi(X \setminus \widetilde{K})\colon K \subseteq \omega_\beta\}.$$

Тогда b-замыкание bF'_α множества F'_α примем за F_α.

c) Пусть α — предельный ординал. Тогда назовем множеством F_α b-замыкание множества $\cup\{F_\beta\colon \beta < \alpha\}$. Рассмотрим множество $D = \cup\{F_\alpha\colon \alpha < \omega_{\tau^+}\}$. Из построения следует, что $|D| \leqslant 2^\tau$. Поскольку D инициально компактное вплоть до мощности τ, то по лемме 1 D бикомпактно. Предполагая, что существует точка $x \in X \setminus D$, можно построить конечную систему K множеств из $\cup\{Bx\colon x \in D\}$ такую, что $x \notin \widetilde{K}$ и $D \subseteq \widetilde{K}$. Но, с другой стороны, $K \subseteq \omega_{\beta_0}$ для некоторого $\beta_0 < \omega_{\tau^+}$, и, следовательно, $\xi(X \setminus \widetilde{K}) \in F_{\beta_0+1}$. Противоречие. Теорема доказана.

Удмуртский государственный университет
Ижевск

Поступило
30 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *П.С. Александров, П.С. Урысон*, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. [2] *А.В. Архангельский*, ДАН, т. 187, № 5, 967 (1969). [3] *Н.В. Величко*, Матем. сб., т. 70, № 1, 98 (1966). [4] *А.А. Грызлов*, Канд. дисс., Свердловск, 1973. [5] *Б. Шапировский*, ДАН, т. 218, № 1, 58 (1974). [6] *R. Pol*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Math., v. 22, 1245 (1974). [7] *S. Mrówka*, ibid., v. 17, № 7, 411 (1969). [8] *M. Katetov*, Časopis mat., fys., v. 69, 36 (1940).

УДК 518.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю.Л. ЕРШОВ

РЕГУЛЯРНО ЗАМКНУТЫЕ ПОЛЯ

Поле F назовем регулярно замкнутым, если любое абсолютно неприводимое алгебраическое многообразие V, определенное над F, имеет F-рациональную точку. Регулярная замкнутость эквивалентна любому из следующих двух свойств поля F.

(1) Для любого конечно-порожденного регулярного (см. ([2])) расширения $F(X)$ поля F (X – конечное множество) существует F-гомоморфизм кольца $F[X]$ в F.

(2) Для любого абсолютно неприводимого многочлена $f \in F[x_1, \ldots, x_n, y]$, который, как многочлен от y, унитарен, сепарабелен и имеет степень больше 1, и для любого $0 \neq g \in F[x_1, \ldots, x_n]$ существуют элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ из F такие, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = 0$, $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.

Примерами регулярно замкнутых полей являются сепарабельно замкнутые поля и бесконечные поля, удовлетворяющие всем аксиомам теории конечных полей. Регулярная замкнутость последних является следствием глубокого факта – теоремы Вейля о гипотезе Римана о кривых над конечными полями. Это было отмечено независимо Дж. Аком ([6]) и автором ([1]). Интересные классы регулярно замкнутых полей были изучены в работах ([8], [9]). Из следующего предложения видно, что регулярно замкнутых полей весьма много.

Предложение 1. *Любое поле F имеет регулярное расширение, являющееся регулярно замкнутым.*

Замечание. Из этого предложения легко следует положительный ответ на проблему 2 из статьи ([7]) о существовании регулярно замкнутых гильбертовых полей.

Регулярно замкнутые поля появляются довольно естественно в модельных пополнениях (см. ([3])) для различных классов полей. Так как понятие регулярной замкнутости поля связано с регулярными расширениями полей, то естественно так формульно расширить сигнатуру σ_f теории полей, чтобы вложениями полей в этой сигнатуре были в точности регулярные вложения.

Для полей характеристики 0 и даже для произвольных совершенных полей в качестве такой сигнатуры можно взять сигнатуру $\sigma_0 \rightleftharpoons \sigma_f \cup \langle W^n \mid n > 1 \rangle$, где W^n – символ n-местного предиката, определенного формулой

$$W^n(x_1, \ldots, x_n) \rightleftharpoons \exists \alpha \ (\alpha^n + x_1\alpha^{n-1} + \ldots + x_{n-1}\alpha + x_n = 0).$$

Теорема 1. *Класс $\mathfrak{F}_0$ всех совершенных полей, рассматриваемых в сигнатуре σ_0, имеет модельное пополнение $\mathfrak{F}_0^*$.*

Все поля из $\mathfrak{F}_0^*$ являются регулярно замкнутыми, однако $\mathfrak{F}_0^*$ состоит далеко не из всех (совершенных) регулярно замкнутых полей. Для формулировки дополнительных условий на поля из $\mathfrak{F}_0^*$ дадим следующие определения.

Класс $\mathfrak{G}$ конечных групп назовем допустимым, если выполнены следующие условия:

1. Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно гомоморфных образов.
2. Если $G_0, G_1, H_0 \in \mathfrak{G}$; φ_0: $G_0 \to H_0$, φ_1: $G_1 \to H_0$ – эпиморфизмы, то существуют $H_1 \in \mathfrak{G}$ и эпиморфизмы ψ_0: $H_1 \to G_0$, ψ_1: $H_1 \to G_1$ такие, что $\varphi_0\psi_0 = \varphi_1\psi_1$.
3. Если $G \in \mathfrak{G}$, H – произвольная конечная группа, φ: $H \to G$ – эпиморфизм, то существует подгруппа $G_0 < H$ такая, что $G_0 \in \mathfrak{G}$ и $\varphi(G_0) = G$.

Примерами допустимых классов конечных групп являются следующие: $\mathfrak{G}_\omega$ – класс всех конечных групп; $\mathfrak{G}_n$ – класс всех конечных групп, имеющих $\leqslant n$ $(n \in \omega)$ порождающих элементов; $\mathfrak{G}_\pi$ – класс всех конечных π-групп, где π – произвольное множество простых чисел; $\mathfrak{G}_s$ – класс всех конечных разрешимых групп; $\mathfrak{G}_{ss}$ – класс всех конечных сверхразрешимых групп; $\mathfrak{G}_N$ – класс всех конечных нильпотентных групп и многие другие.

Проконечную группу (см. ([4])), все конечные (непрерывные) гомоморфные образцы которой лежат в $\mathfrak{C}$, будем называть $\mathfrak{G}$-группой. $\mathfrak{G}$-группу G назовем $\mathfrak{G}$-универсальной, если для любых эпиморфизмов φ: $G \to H_0$, ψ: $H_1 \to H_0$; $H_0, H_1 \in \mathfrak{G}$ существует эпиморфизм φ': $G \to H_1$ такой, что $\psi\varphi' = \varphi$.

Если $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\omega$, то $\mathfrak{G}_\omega$-универсальную группу назовем универсальной.

Замечание. В терминологии статьи ([8]) универсальные группы – это в точности ω-свободные группы. Отметим здесь, что проблема на стр. 190 из статьи ([8]) решается, очевидно, отрицательно, так как группа $\hat{F}_\omega$ не хопфова.

Группой Галуа $G(F)$ поля F назовем группу Галуа сепарабельного замыкания F^s поля F, т.е. $G(F) \rightleftharpoons \mathrm{Aut}(F^s/F)$.

Предложение 2. *Класс полей $\mathfrak{F}_0^*$, являющийся модельным пополнением класса $\mathfrak{F}_0$ в сигнатуре σ_0, состоит в точности из совершенных регулярно замкнутых полей, группа Галуа которых универсальна.*

Укажем на следующий эффект, который обнаруживается при рассмотрении модельных пополнений: если аксиоматизируемый класс K_0 имеет модельное пополнение K_0^* и K_1 – собственный аксиоматизируемый подкласс K_0, то K_1 может также иметь модельное пополнение K_1^*, причем может оказаться, что $K_1^* \cap K_0^* = \phi$. Такие примеры легко получить из следующей теоремы.

Пусть $\mathfrak{G}$ – произвольный допустимый класс конечных групп, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}$ – класс всех совершенных полей, группа Галуа которых есть $\mathfrak{G}$-группа.

Теорема 2. *Класс полей $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}$ в сигнатуре σ_0 имеет модельное пополнение $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}^*$, состоящее в точности из совершенных регулярно замкнутых полей, группа Галуа которых является $\mathfrak{G}$-универсальной.*

Замечание. Для случая $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1$ этот результат получен ранее в работе ([5]).

Для случая несовершенных полей сигнатуры σ_0 не достаточно для того, чтобы гарантировать регулярность расширений. Для простого числа p введем серию формульных предикатов Q_p^n, $n \geqslant 1$, выражающих p-зависимость элементов $x_1, \ldots, x_n$, т.е. $Q_p^n(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место в поле F $(x_1, \ldots, x_n \in F)$ тогда и только тогда, когда система мономов $x_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\epsilon_n}$; $0 \leqslant \epsilon_i < p$, $i = 1, 2, \ldots, n$, линейно зависима над полем F^p. Обозначим через σ_p сигнатуру $\sigma_0 \cup \langle Q_p^n \mid n \geqslant 1 \rangle$.

Для поля F характеристики p пусть $\tau_p(F)$ есть натуральное число n, если степень расширения $[F : F^p]$ конечна и равна p^n, и $\tau_p(F) = \omega$, если $[F : F^p]$ бесконечна.

Пусть $\mathfrak{G}$ – произвольный допустимый класс конечных групп, $\alpha \leqslant \omega$, тогда обозначим: $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}, \alpha, p}$ – класс всех таких полей F характеристики p, что группа Галуа F есть $\mathfrak{G}$-группа, а $\tau_p(F) \leqslant \alpha$.

Теорема 3. *Класс полей $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}, \alpha, p}$ в сигнатуре σ_p имеет модельное пополнение $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}, \alpha, p}^*$, состоящее в точности из регулярно замкнутых полей F характеристики p таких, что группа Галуа F является $\mathfrak{G}$-универсальной и $\tau_p(F) = \alpha$.*

Замечание. Для случая $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0$, т.е. когда $\mathfrak{G}$ состоит только из единичной группы, этот результат установлен в ([10]).

Укажем теперь результаты об алгоритмической природе рассматриваемых классов регулярно замкнутых полей.

Теорема 4. *Элементарная теория класса $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}^*$ $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}, \alpha, p}^*)$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ – рекурсивный класс конечных групп.*

Все приведенные выше примеры допустимых классов групп являются рекурсивными.

Замечание. Разрешимость элементарной теории класса полей $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_0, \alpha, p}^*$ – это результат работы ([1]) ($\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_0, \alpha, p}^*$ – класс сепарабельно замкнутых полей F характеристики p таких, что $\tau_p(F) = \alpha$). Разрешимость элементарной теории классов $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_n}^*$, $n \in \omega$, установлена в работе ([9]), а разрешимость элементарной теории класса $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_\omega}^*$ – в работе ([8]).

Теорема 4 показывает, что имеется много классов регулярно замкнутых полей с разрешимой элементарной теорией, что привело к предположению о разрешимости элементарной теории класса всех регулярно замкнутых полей. Однако это предположение не оправдалось.

Теорема 5. *Элементарная теория класса всех регулярно замкнутых полей неразрешима.*

Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
15 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю.Л. Ершов*, ДАН, т. 174, № 1, 19 (1967). [2] *С. Ленг*, Алгебра, М., 1968. [3] *Дж. Сакс*, Теория насыщенных моделей, М., 1967. [4] *Ж.-П. Серр*, Когомологии Галуа, М., 1968. [5] *A. Adler, K. Kiefe*, Pacif.J.Math., v. 62, 305 (1976). [6] *J.Ax*, Ann.Math., v. 85, № 2, 161 (1967). [7] *M. Jarden*, Trans.Am.Math. Soc., v. 164, 67 (1972). [8] *M. Jarden*, Invent.math., v. 38, 187 (1976). [9] *M. Jarden, U. Kiehne*, ibid., v. 30, 275 (1975). [10] *C. Wood*, J.Symb.Log., v. 44, № 3, 412 (1979)