Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. B. Vasil'eva, O. E. Omel'chenko, Periodic step-like contrast structures for a singularly perturbed parabolic equation,
Differ. Uravn., 2000, Volume 36, Number 2, 209–218

https://www.mathnet.ru/eng/de10091

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.83
December 6, 2025, 00:27:26

2000. Т. 36, № 2. С. 209 — 218

УДК 517.956.4

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ ТИПА СТУПЕНЬКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. Б. Васильева, О. Е. Омельченко

1. Введение. В работе [1] рассматривалась сингулярно возмущенная задача

$$\varepsilon u'' = A(u,x)u' + B(u,x), \quad u(0,\varepsilon) = u^0, \quad u(1,\varepsilon) = u^1, \tag{1}$$

и установлено существование у такой задачи решений с внутренним переходным слоем типа ступеньки, а также сформулированы условия устойчивости таких решений. Существенной особенностью этой задачи являлось наличие в правой части (1) слагаемого Au'. В данной работе изучается краевая задача для сингулярно возмущенного параболического дифференциального уравнения вида

$$\begin{gathered}\varepsilon(u_{xx} - u_t) = A(u,x,t)u_x + B(u,x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad \Omega \equiv \{(x,t)|\ a < x < b,\ -\infty < t < +\infty\},\\ u(a,t) = 0, \quad u(b,t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad u(x,t+T) = u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $T > 0$ — период функции $u(x,t)$ по второй координате, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $A(u.x,t)$, $B(u,x,t)$ — достаточно гладкие T-периодические по переменной t функции.

Хотя задачи (1) и (2) имеют разные размерности и относятся к различным типам, но их вырожденные уравнения (т.е. уравнения, получаемые при $\varepsilon = 0$) имеют одинаковую структуру. Этот факт делает возможным перенесение на задачу (2) методов исследования задачи (1). Следует отметить, однако, что из работы [1] заимствуется лишь алгоритм построения формальной асимптотики. Доказательство основной теоремы существования проводится методом барьерных функций, который в последнее время все шире и шире используется в научных публикациях по исследованию сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [2]. Кроме того, будучи перенесенным на задачу (1), этот метод дает альтернативное доказательство теоремы существования из работы [1].

2. Построение формальной асимптотики. Если в (2) положить $\varepsilon = 0$, то получим вместо исходного параболического вырожденное уравнение

$$A(u,x,t)u_x + B(u,x,t) = 0. \tag{3}$$

Любое решение уравнения (3) в общем случае может удовлетворить лишь одному из граничных условий задачи (2). Поэтому, как следует из общей теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [3], решение задачи (2), близкое к решению уравнения (3), должно обладать одним или несколькими пограничными или внутренними слоями. В данной работе будет построена асимптотика и сформулированы достаточные условия существования решения исходной задачи, являющегося обобщением одномерных контрастных структур типа ступеньки. В соответствии с методом пограничных функций такое решение следует искать в виде

$$u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [\overline{u}_k^{(-)}(x,t) + Q_k^{(-)}(\xi,t)] & \text{при } x < X(t,\varepsilon), \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [\overline{u}_k^{(+)}(x,t) + Q_k^{(+)}(\xi,t)] & \text{при } x > X(t,\varepsilon), \end{cases} \tag{4}$$

$$X(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k X_k(t), \tag{5}$$

где $\overline{u}_k^{(\pm)}(x,t)$ — регулярные, а $Q_k^{(\pm)}(\xi,t)$ — погранслойные члены асимптотики, $\xi = [x-X(t,\varepsilon)]/\varepsilon$ — погранслойная переменная, а $x=X(t,\varepsilon)$ — кривая, в окрестности которой имеет место внутренний слой. (Заметим, что для ее однозначного определения необходимо ввести дополнительное условие, что и будет сделано по ходу построения формальной асимптотики.)

Подставляя ряд (4) в дифференциальный оператор

$$L[u]=\varepsilon\,(u_{xx}-u_t)-A(u,x,t)u_x-B(u,x,t) \tag{6}$$

и производя его формальное разложение в ряд Тейлора по степеням ε, в соответствии с методом пограничных функций получаем

$$L[u]=\varepsilon^{-1}QL_0+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k[\overline{L}_k+QL_{k+1}]. \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\overline{L}_0\equiv -A(\overline{u}_0(x,t),x,t)\partial\overline{u}_0/\partial x-B(\overline{u}_0(x,t),x,t),\\ QL_0\equiv\partial^2Q_0/\partial\xi^2-A(\overline{u}_0(X_0(t),t)+Q_0(\xi,t),X_0(t),t)\partial Q_0/\partial\xi,\\ \overline{L}_k\equiv -A(\overline{u}_0(x,t),x,t)\partial\overline{u}_k/\partial x-P(x,t)\overline{u}_k+D_k(x,t)\quad(k\geq 1),\\ QL_k\equiv\partial^2Q_k/\partial\xi^2-(\partial/\partial\xi)\{\widetilde{A}[Q_k(\xi,t)+\overline{u}_k(X_0(t),t)]\}-\varphi(\xi,t)X_k(t)-H_k(\xi,t)\quad(k\geq 1),\end{gathered} \tag{8}$$

где введены следующие обозначения: 1) для любой функции $F(u,x,t)$: $\widetilde{F}(\xi,t)\equiv F(\overline{u}_0(X_0(t),t)+Q_0(\xi,t),X_0(t),t)$, а $\overline{F}(t)\equiv F(\overline{u}_0(X_0(t),t),X_0(t),t)$; 2) $P(x,t)=A_u(\overline{u}_0(x,t),x,t)\partial\overline{u}_0/\partial x+B_u(\overline{u}_0(x,t),x,t)$; 3) $\varphi(\xi,t)=\{\widetilde{A}_u(\xi,t)\overline{u}'_{0x}(X_0(t),t)+\widetilde{A}_x(\xi,t)\}\partial Q_0/\partial\xi$; 4) $D_k(x,t)$ — некоторая функция, рекуррентно выражающаяся через регулярные члены ряда (4) от 0-го до $(k-1)$-го порядка включительно и их производные; 5) $H_k(\xi,t)$ — некоторая функция, рекуррентно выражающаяся через члены рядов (4) и (5) от 0-го до $(k-1)$-го порядка включительно и их производные; 6) если какая-либо из перечисленных функций будет встречаться в дальнейшем с индексом $(+)$ или $(-)$ сверху, то это будет означать, что этот индекс надо поставить у всех функций $\overline{u}_k(x,t)$ и $Q_k(\xi,t)$, входящих в ее определение.

Приведем также конкретные выражения для функций $D_1(x,t)$ и $H_1(\xi,t)$: $D_1(x,t)=\partial^2\overline{u}_0/\partial x^2-\partial\overline{u}_0/\partial t$, $H_1(\xi,t)=\varphi(\xi,t)\xi+\widetilde{A}(\xi,t)\overline{u}'_{0x}(X_0(t),t)+\widetilde{B}(\xi,t)-X'_0(t)\partial Q_0/\partial\xi$.

Теперь, приравнивая члены ряда (7) к нулю, получаем дифференциальные уравнения для определения членов ряда (4). При этом граничные условия задачи (2) служат для определения регулярных членов ряда (4). Так, в нулевом приближении имеем

$$A(\overline{u}_0^{(-)}(x,t),x,t)\partial\overline{u}_0^{(-)}/\partial x+B(\overline{u}_0^{(-)}(x,t),x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega,\quad \overline{u}_0^{(-)}(a,t)=0,\quad -\infty<t<+\infty, \tag{9}$$

$$A(\overline{u}_0^{(+)}(x,t),x,t)\partial\overline{u}_0^{(+)}/\partial x+B(\overline{u}_0^{(+)}(x,t),x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega,\quad \overline{u}_0^{(+)}(b,t)=0,\quad -\infty<t<+\infty. \tag{10}$$

Пусть задачи (9) и (10) имеют решения, причем

$$A(\overline{u}_0^{(-)}(x,t),x,t)>0,\quad A(\overline{u}_0^{(+)}(x,t),x,t)<0\quad \forall(x,t)\in\overline{\Omega}. \tag{11}$$

Чтобы сформулировать задачи для погранслойных членов ряда (4), нам потребуется еще одно граничное условие, а именно условие, исходя из которого будет определяться функция $X(t,\varepsilon)$. В силу (11) в качестве такого условия удобно взять

$$A(u(X,t,\varepsilon),X,t)=0, \tag{12}$$

так как уравнение (12) всегда будет иметь решение $x=X(t,\varepsilon)$, целиком лежащее в полосе Ω.

Будем искать классическое решение задачи (2), т.е. $u \in C^{x,t}_{2,1}(\overline{\Omega})$. Рассматривая формальное представление (4) для функции $u(x,t,\varepsilon)$ в предположении, что все входящие в него функции определены и достаточно гладкие, легко видеть, что непрерывность и гладкость функции u может быть подвергнута сомнению лишь на кривой $x = X(t,\varepsilon)$. Поэтому в качестве дополнительных условий на функцию u логично взять условия ее непрерывности и гладкости на кривой $x = X(t,\varepsilon)$. Для определения членов асимптотического ряда (4) будет достаточно двух условий, а именно непрерывности на кривой $x = X(t,\varepsilon)$ самой функции $u(x,t,\varepsilon)$ и ее нормальной производной $\partial u/\partial n$, где $\vec{n} = \{1+[X'(t,\varepsilon)]^2\}^{-1/2}\{1;-X'(t,\varepsilon)\}$ — вектор нормали к кривой $x = X(t,\varepsilon)$. Чтобы воспользоваться этими условиями, нам потребуются формальные разложения

$$u(X(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \overline{u}_0(X_0(t),t) + Q_0(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \{\overline{u}'_{0x}(X_0(t),t)X_k(t) + \overline{u}_k(X_0(t),t) + Q_k(0,t) + E_k(t)\}, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=X(t,\varepsilon)} = \sqrt{1+[X'_0(t)]^2}\Big\{\varepsilon^{-1}\partial Q_0(0,t)/\partial\xi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-1}[\partial Q_k(0,t)/\partial\xi + X'_0(t)X'_k(t)\{1+[X'_0(t)]^2\}^{-1}\partial Q_0(0,t)/\partial\xi + N_k(t)]\Big\}, \tag{14}$$

где $E_k(t)$ и $N_k(t)$ — некоторые функции, рекуррентно выражающиеся через низшие порядки.

Отдельно заметим, что $N_1(t) = \{1+[X'_0(t)]^2\}^{-1}[\overline{u}'_{0x}(X_0(t),t) - X'_0(t)\overline{u}'_{0t}(X_0(t),t) - -X'_0(t)\partial Q_0(0,t)/\partial t]$, $E_1(t) = 0$.

Для дальнейшего использования перепишем также левую часть (12) в виде формального ряда по степеням ε

$$A(u(X(t,\varepsilon),t,\varepsilon),X(t,\varepsilon),t) = \widetilde{A}(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \{[\widetilde{A}_u(0,t)\overline{u}'_{0x}(X_0(t),t) + \widetilde{A}_x(0,t)]X_k(t) +$$

$$+ \widetilde{A}_u(0,t)[\overline{u}_k(X_0(t),t) + Q_k(0,t) + E_k(t)] + m_k(t)\}, \tag{15}$$

где $m_k(t)$ — некоторая функция, рекуррентно выражающаяся через предшествующие порядки, причем $m_1(t) = 0$.

Согласно методу пограничных функций, получим задачу для определения $Q_0^{(\pm)}$:

$$\begin{gathered}
\partial^2 Q_0^{(\pm)}/\partial\xi^2 = A(\overline{u}_0^{(\pm)}(X_0(t),t) + Q_0^{(\pm)}(\xi,t),X_0(t),t)\partial Q_0^{(\pm)}/\partial\xi, \\
\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t) + Q_0^{(-)}(0,t) = \overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t) + Q_0^{(+)}(0,t), \\
A(\overline{u}_0^{(\pm)}(X_0(t),t) + Q_0^{(\pm)}(0,t),X_0(t),t) = 0, \\
\partial Q_0^{(-)}(0,t)/\partial\xi = \partial Q_0^{(+)}(0,t)/\partial\xi, \quad Q_0^{(\pm)}(\pm\infty,t) = \partial Q_0^{(\pm)}(\pm\infty,t)/\partial\xi = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

В предположении, что задача (16) разрешима, проинтегрируем ее дифференциальное уравнение по ξ от ζ до $+\infty$ (при $\zeta \geq 0$), получим

$$\int_{\zeta}^{+\infty} \frac{\partial^2 Q_0^{(+)}(\xi,t)}{\partial\xi^2}\,d\xi = \int_{\zeta}^{+\infty} A(\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t) + Q_0^{(+)}(\xi,t),X_0(t),t)\frac{\partial Q_0^{(+)}(\xi,t)}{\partial\xi}\,d\xi,$$

$$\left.\frac{\partial Q_0^{(+)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right|_{\xi=\zeta}^{\xi=+\infty} = \int_{Q_0^{(+)}(\zeta,t)}^{Q_0^{(+)}(+\infty,t)} A(\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t) + \eta,X_0(t),t)\,d\eta.$$

Учитывая граничные условия из (16), имеем

$$\frac{\partial Q_0^{(+)}(\zeta,t)}{\partial\zeta} = \int_{0}^{Q_0^{(+)}(\zeta,t)} A(\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t) + \eta,X_0(t),t)\,d\eta \tag{17}$$

или в несколько иной форме

$$\frac{\partial Q_0^{(+)}(\zeta,t)}{\partial\zeta} = \int\limits_{\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)+Q_0^{(+)}(\zeta,t)} A(\eta, X_0(t), t)\, d\eta. \tag{18}$$

Аналогично, проводя интегрирование по ξ от $-\infty$ до ζ при $\zeta \le 0$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\zeta} \frac{\partial^2 Q_0^{(-)}(\xi,t)}{\partial\xi^2}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\zeta} A(\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t) + Q_0^{(-)}(\xi,t), X_0(t), t) \frac{\partial Q_0^{(-)}(\xi,t)}{\partial\xi}\, d\xi,$$

$$\left.\frac{\partial Q_0^{(-)}(\xi,t)}{\partial\xi}\right|_{\xi=-\infty}^{\xi=\zeta} = \int\limits_{Q_0^{(-)}(-\infty,t)}^{Q_0^{(-)}(\zeta,t)} A(\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t) + \eta, X_0(t), t)\, d\eta,$$

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}(\zeta,t)}{\partial\zeta} = \int\limits_{0}^{Q_0^{(-)}(\zeta,t)} A(\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t) + \eta, X_0(t), t)\, d\eta, \tag{19}$$

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}(\zeta,t)}{\partial\zeta} = \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)+Q_0^{(-)}(\zeta,t)} A(\eta, X_0(t), t)\, d\eta. \tag{20}$$

Условие $\partial Q_0^{(-)}(0,t)/\partial\xi = \partial Q_0^{(+)}(0,t)/\partial\xi$ и представления (18), (20) дают возможность получить уравнение для определения функции $X_0(t)$:

$$\int\limits_{\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)+Q_0^{(+)}(0,t)} A(\eta, X_0(t), t)\, d\eta = \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)+Q_0^{(-)}(0,t)} A(\eta, X_0(t), t)\, d\eta,$$

$$\Phi(X_0(t),t) \equiv \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)} A(\eta, X_0(t), t)\, d\eta = 0. \tag{21}$$

При переходе к последнему равенству было использовано соотношение $\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t) + Q_0^{(-)}(0,t) = \overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t) + Q_0^{(+)}(0,t)$.

Потребуем, чтобы уравнение $\Phi(x,t) = 0$ имело простой корень $x = X_0(t)$, т.е. такой, что $\Phi'_x(x,t)|_{x=X_0(t)} \ne 0 \quad \forall t \in R$. Кроме того, пусть $a < X_0(t) < b \quad \forall t \in R$.

Далее пусть уравнение $A(u, X_0(t), t) = 0$ имеет простой корень $u = V(t)$, т.е.

$$A_u(u, X_0(t), t)|_{u=V(t)} \ne 0 \quad \forall t \in R, \tag{22}$$

лежащий между $\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)$ и $\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)$. Заметим, что в силу условий (11), наложенных на функции $\overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ и $\overline{u}_0^{(+)}(x,t)$, корень $u = V(t)$ всегда существует, а проверке подлежит лишь условие (22).

Наконец, для того, чтобы уравнения (17) и (19) можно было проинтегрировать по ζ и получить выражения для функций $Q_0^{(+)}(\xi,t)$ $(\xi \ge 0)$ и $Q_0^{(-)}(\xi,t)$ $(\xi \le 0)$, достаточно, чтобы функция $F(u,t) = \int\limits_{V(t)}^{u} A(\eta, X_0(t), t)\, d\eta$ при любом фиксированном $t \in R$ не имела нулей, отличных от $u = V(t)$, на замкнутом отрезке между $\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)$ и $\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)$. Это условие в явной форме утверждает, что кривая $u = V(t)$ лежит в области влияния корней $\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)$ и $\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)$.

Аналогично тому, как были получены задачи для определения нулевых членов асимптотики, можно получить задачи для определения $\overline{u}_k^{(\pm)}(x,t)$ и $Q_k^{(\pm)}(\xi,t)$:

$$\partial\overline{u}_k^{(-)}/\partial x + p^{(-)}(x,t)\overline{u}_k^{(-)}(x,t) = f_k^{(-)}(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \quad \overline{u}_k^{(-)}(a,t)=0, \quad -\infty<t<+\infty, \tag{23}$$

$$\partial\overline{u}_k^{(+)}/\partial x + p^{(+)}(x,t)\overline{u}_k^{(+)}(x,t) = f_k^{(+)}(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \quad \overline{u}_k^{(+)}(b,t)=0, \quad -\infty<t<+\infty, \tag{24}$$

$$\partial^2 Q_k^{(\pm)}/\partial\xi^2 = (\partial/\partial\xi)\{\widetilde{A}^{(\pm)}(\xi,t)[Q_k^{(\pm)}(\xi,t)+\overline{u}_k^{(\pm)}(X_0(t),t)]\} + \varphi^{(\pm)}(\xi,t)X_k(t) + H_k^{(\pm)}(\xi,t),$$

$$\overline{u}_k^{(\mp)}(X_0(t),t) + Q_k^{(\mp)}(0,t) + E_k^{(\mp)}(t) = M_k^{(\mp)}(t), \tag{25}$$

$$\partial Q_k^{(-)}(0,t)/\partial\xi + N_k^{(-)}(t) = \partial Q_k^{(+)}(0,t)/\partial\xi + N_k^{(+)}(t), \quad Q_k^{(\pm)}(\pm\infty,t) = \partial Q_k^{(\pm)}(\pm\infty,t)/\partial\xi = 0,$$

где $p^{(\pm)}(x,t)=A^{-1}(\overline{u}_0^{(\pm)}(x,t),x,t)P^{(\pm)}(x,t)$, $f_k^{(\pm)}(x,t)=A^{-1}(\overline{u}_0^{(\pm)}(x,t),x,t)D_k^{(\pm)}(x,t)$, $M_k^{(\pm)}(t) = -[\partial\overline{u}_0^{(\pm)}/\partial x(X_0(t),t) + \widetilde{A}_x(0,t)/\widetilde{A}_u(0,t)]X_k(t) - m_k(t)/\widetilde{A}_u(0,t)$ (см. обозначения к формулам (8) и (15)).

Разрешимость задач (23), (24) не вызывает сомнений, так как это фактически задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, в котором переменная t выступает в качестве параметра. Не столь очевидна ситуация с задачей (25). Рассмотрим ее при $k=1$ (при $k>1$ задача может быть рассмотрена аналогично). В предположении, что она разрешена, проинтегрируем ее дифференциальное уравнение по ξ от 0 до $+\infty$ с учетом граничных условий, получим $-\partial Q_1^{(+)}(0,t)/\partial\xi = \overline{A}^{(+)}(t)\overline{u}_1^{(+)}(X_0(t),t) - \widetilde{A}(0,t)[Q_1^{(+)}(0,t) + \overline{u}_1^{(+)}(X_0(t),t)] + X_1(t)\int\limits_0^{+\infty}\varphi^{(+)}(\xi,t)d\xi + J^{(+)}(t)$, где $J^{(+)}(t) = \int\limits_0^{+\infty} H_1^{(+)}(\xi,t)d\xi$.

Аналогично, интегрируя то же уравнение по ξ от $-\infty$ до 0, имеем $\partial Q_1^{(-)}(0,t)/\partial\xi = \widetilde{A}(0,t)[Q_1^{(-)}(0,t) + \overline{u}_1^{(-)}(X_0(t),t)] - \overline{A}^{(-)}(t)\overline{u}_1^{(-)}(X_0(t),t) + X_1(t)\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi^{(-)}(\xi,t)d\xi + J^{(-)}(t)$, где $J^{(-)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} H_1^{(-)}(\xi,t)\,d\xi$.

Исходя из условия $\partial Q_1^{(-)}(0,t)/\partial\xi + N_1^{(-)}(t) = \partial Q_1^{(+)}(0,t)/\partial\xi + N_1^{(+)}(t)$ и полученных выражений, находим, что

$$\partial Q_1^{(-)}(0,t)/\partial\xi - \partial Q_1^{(+)}(0,t)/\partial\xi = N_1^{(+)}(t) - N_1^{(-)}(t) =$$

$$= \overline{A}^{(+)}(t)\overline{u}_1^{(+)}(X_0(t),t) - \overline{A}^{(-)}(t)\overline{u}_1^{(-)}(X_0(t),t) + X_1(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,t)d\xi + J^{(+)}(t) + J^{(-)}(t).$$

Путем несложных преобразований легко убедиться, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,t)\,d\xi = \Phi'_x(X_0(t),t)$. А согласно введенному ранее требованию $\Phi'_x(X_0(t),t)\neq 0$, имеем $X_1(t) = [\Phi'_x(X_0(t),t)]^{-1}\{N_1^{(+)}(t) - N_1^{(-)}(t) + \overline{A}^{(-)}(t)\overline{u}_1^{(-)}(X_0(t),t) - \overline{A}^{(+)}(t)\overline{u}_1^{(+)}(X_0(t),t) - J^{(+)}(t) - J^{(-)}(t)\}$.

Зная явный вид функции $X_1(t)$, мы без труда можем получить решение задачи (25), так как последняя после подстановки в нее $X_1(t)$ представляет собой совокупность двух независимых краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Таким образом, мы показали, что при определенных условиях, наложенных на исходные функции, может быть построена формальная асимптотика вида (4) любого порядка. Следующий пункт посвящен ее обоснованию.

3. Обоснование асимптотики методом барьерных функций. Доказательство существования асимптотики в данной работе проводится на основе теоремы 1.2 из [4], а точнее, на некоторой ее модификации. Не вдаваясь в подробности общей формулировки, приведем необходимый нам в дальнейшем вариант этой теоремы.

Теорема 1. *Пусть существуют функции $\alpha(x,t)$ и $\beta(x,t)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1° *α, β — T-периодические по переменной t, дважды непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ функции, за исключением, быть может, конечного числа непересекающихся гладких*

кривых $x = \chi_i(t)$, *целиком лежащих в* Ω, *на которых они непрерывны, а их нормальные производные претерпевают скачок;*

2° $\alpha(x,t) \le \beta(x,t) \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$;

3° $L[\alpha] \ge 0, \quad L[\beta] \le 0$ *всюду в* $\overline{\Omega}$, *за исключением кривых* $x = \chi_i(t)$;

4° $\alpha(a,t) \le 0 \le \beta(a,t) \quad \forall t \in R, \quad \alpha(b,t) \le 0 \le \beta(b,t) \quad \forall t \in R$;

5° *на каждой кривой* $x = \chi_i(t)$ *выполнены неравенства* $\partial\alpha/\partial n|_+ \ge \partial\alpha/\partial n|_- \quad \forall t \in R$, $\partial\beta/\partial n|_+ \le \partial\beta/\partial n|_- \quad \forall t \in R$, *где знаки* $+$ *и* $-$ *у нормальной производной означают, что она берется соответственно справа и слева от кривой* $x = \chi_i(t)$.

Тогда существует по крайней мере одно решение $u = u(x,t)$ *задачи (2) такое, что* $\alpha(x,t) \le u(x,t) \le \beta(x,t)$.

Следует отметить, что в работе [4] в отличие от нашей формулировки данная теорема формулируется для случая, когда $x \in R^N \quad (N \ge 2)$. Хотя, как следует из анализа ее доказательства, она остается справедливой и в случае одномерной переменной x. Качественно новым по сравнению с [4] является допущение негладкости функций α и β, однако дополнительное условие 5° в предложенной редакции теоремы делает ее корректной и в этом случае. (Гладкость функций α и β существенна только при использовании сильного принципа максимума для параболического уравнения в лемме 4.4 из [4], условие 5° дает возможность воспользоваться этим принципом и в случае негладких функций α, β.)

Следуя обозначениям работы [4], будем называть функции α и β соответственно нижним и верхним решениями задачи (2).

Ниже для доказательства существования асимптотики вида (4) мы воспользуемся вариантом метода барьерных функций для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, впервые предложенным Н. Н. Нефедовым и развитым им в ряде его работ (см. библиографию в [2]).

В качестве нижней и верхней барьерных функций возьмем соответственно

$$\alpha(x,t,\varepsilon) = u_{(n+1)\alpha}(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}[v_\alpha(x,t) + w_\alpha(\xi,t)] + \varepsilon^{n+2}Q_{(n+2)\alpha}(\xi,t), \tag{26}$$

$$\beta(x,t,\varepsilon) = u_{(n+1)\beta}(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}[v_\beta(x,t) + w_\beta(\xi,t)] + \varepsilon^{n+2}Q_{(n+2)\beta}(\xi,t), \tag{27}$$

где

$$u_{(n+1)\alpha}(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k[\overline{u}_k^{(-)}(x,t) + Q_k^{(-)}(\xi,t)] & \text{при } x < X_\alpha(t,\varepsilon), \\ \sum\limits_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k[\overline{u}_k^{(+)}(x,t) + Q_k^{(+)}(\xi,t)] & \text{при } x > X_\alpha(t,\varepsilon), \end{cases}$$

$$X_\alpha(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k X_k(t) + \varepsilon^{n+1} X_{(n+1)\alpha}(t), \quad \xi = [x - X_\alpha(t,\varepsilon)]/\varepsilon,$$

а $u_{(n+1)\beta}(x,t,\varepsilon)$ определяется формулами для $u_{(n+1)\alpha}(x,t,\varepsilon)$ с заменой в них α на β. Функции $v_\alpha(x,t)$, $v_\beta(x,t)$, $w_\alpha(\xi,t)$, $w_\beta(\xi,t)$, $Q_{(n+2)\alpha}(\xi,t)$, $Q_{(n+2)\beta}(\xi,t)$, $X_{(n+1)\alpha}(t)$, $X_{(n+1)\beta}(t)$ будут определены ниже. Отметим также, что, как и в п. 2, все функции, входящие в определение барьеров, вообще говоря, по-разному определяются при $\xi \ge 0$ и $\xi \le 0$. Однако ниже, чтобы не усложнять описание, будем опускать использовавшиеся в этом пункте индексы $(+)$ и $(-)$.

Из условия (11) следует, что существует такое число $\rho > 0$, что $A(\overline{u}_0^{(-)}(x,t),x,t) \ge \rho$, $A(\overline{u}_0^{(+)}(x,t),x,t) \le -\rho \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. Кроме того, в силу непрерывной дифференцируемости функций $A(u,x,t)$ и $B(u,x,t)$ существует такое число $l > 0$, что $|P(x,t)| \le l \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$ (определение функции $P(x,t)$ см. в обозначениях к формуле (8)).

Теперь, когда введены все необходимые обозначения, можно продолжить описание барьерных функций. Итак, пусть

$$v_\alpha(x,t) = \begin{cases} -\gamma \exp\{(2l/\rho)(x - X_0(t))\}, & a \le x < X_\alpha(t,\varepsilon), \\ -\gamma \exp\{-(2l/\rho)(x - X_0(t))\}, & X_\alpha(t,\varepsilon) < x \le b, \end{cases} \tag{28}$$

$$v_\beta(x,t) = -v_\alpha(x,t), \tag{29}$$

где в определении $v_\beta(x,t)$ следует $X_\alpha(t,\varepsilon)$ заменить на $X_\beta(t,\varepsilon)$.

Здесь $\gamma > 0$ — произвольное число. Отметим, что функции v_α и v_β представляют собой некоторую модификацию функций, использованных в [5, гл. 4] при доказательстве сходных теорем для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Из приведенного выше разложения для оператора $L[u]$ (7) с учетом задач (9), (10), (16), (23) — (25) следует, что

$$L[\alpha] = \varepsilon^n\left\{\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial\xi^2} - \frac{\partial}{\partial\xi}[\widetilde{A}(\xi,t)[w_\alpha(\xi,t) + v_\alpha(X_0(t),t)]] - \varphi(\xi,t)X_{(n+1)\alpha}(t)\right\} -$$

$$- \varepsilon^{n+1}\left\{A(\overline{u}_0(x,t),x,t)\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + P(x,t)v_\alpha\right\} +$$

$$+ \varepsilon^{n+1}\left\{\frac{\partial^2 Q_{(n+2)\alpha}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial}{\partial\xi}[\widetilde{A}(\xi,t)Q_{(n+2)\alpha}(\xi,t)] - H_{(n+2)\alpha}(\xi,t)\right\} + O(\varepsilon^{n+2}). \qquad (30)$$

Здесь $H_{(n+2)\alpha}(\xi,t)$ та же функция, что и $H_{n+2}(\xi,t)$, но с учетом изменений, внесенных в $n+1$ порядок асимптотики.

Из представления (28) для $v_\alpha(x,t)$ следует, что $A(\overline{u}_0(x,t),x,t)\partial v_\alpha/\partial x + P(x,t)v_\alpha \le lv_\alpha$ всюду в Ω, где функция v_α дифференцируема по x. Отметим, что знак этого неравенства никак не связан с выбором кривой $x = X_\alpha(t,\varepsilon)$. Таким образом, если потребовать, чтобы функции $w_\alpha(\xi,t)$ и $Q_{(n+2)\alpha}(\xi,t)$ определялись из условия обращения в нуль первой и третьей фигурных скобок в (30), то будем иметь $L[\alpha] \ge \varepsilon^{n+1}(-lv_\alpha) + O(\varepsilon^{n+2})$. В силу равномерной по $\overline{\Omega}$ отделенности от нуля значений функции $v_\alpha(x,t)$ можем утверждать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $L[\alpha] > 0$.

Функцию $w_\alpha(\xi,t)$ будем определять из задачи

$$\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\{\widetilde{A}(\xi,t)[w_\alpha(\xi,t) + v_\alpha(X_0(t),t)]\} + \varphi(\xi,t)X_{(n+1)\alpha}(t),$$

$$v_\alpha(X_0(t),t) + w_\alpha(-0,t) = v_\alpha(X_0(t),t) + w_\alpha(+0,t) = -M, \qquad (31)$$

$$\partial w_\alpha(+0,t)/\partial\xi - \partial w_\alpha(-0,t)/\partial\xi = \delta, \quad w_\alpha(\pm\infty,t) = \partial w_\alpha(\pm\infty,t)/\partial\xi = 0.$$

Здесь $M > 0$, $\delta > 0$ — управляющие параметры, а дополнительное условие сопряжения дает возможность так же, как и в задаче (16), определить не только Q-функции, но и функцию $X_{(n+1)\alpha}(t)$.

Из определения функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и формального разложения (14) следует, что $\partial\alpha/\partial n|_+ - \partial\alpha/\partial n|_- = \varepsilon^n\sqrt{1+[X_0'(t)]^2}\delta + O(\varepsilon^{n+1})$. В силу того что $\delta > 0$, автоматически будет следовать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет выполнено неравенство $\partial\alpha/\partial n|_+ > \partial\alpha/\partial n|_-$.

Уравнение из (31) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Причем соответствующее ему однородное уравнение имеет нетривиальное решение, стремящееся к нулю при $\xi \to \pm\infty$. Таким решением, к примеру, является функция $z(\xi,t) = \partial Q_0/\partial\xi$. (В этом легко убедиться, продифференцировав уравнение из задачи (16) по ξ.) Поэтому решение задачи (31) может быть записано в следующем виде:

$$w_\alpha(\xi,t) = \begin{cases} (\gamma - M)z(\xi,t)/z(-0,t) + w_0^{(-)}(\xi,t), & \xi \le 0, \\ (\gamma - M)z(\xi,t)/z(+0,t) + w_0^{(+)}(\xi,t), & \xi \ge 0, \end{cases}$$

где $w_0^{(-)}(\xi,t)$ и $w_0^{(+)}(\xi,t)$ — решения неоднородного уравнения (31) с однородными граничными условиями $w_0^{(-)}(-0,t) = w_0^{(-)}(-\infty,t) = 0$, $w_0^{(+)}(+0,t) = w_0^{(+)}(+\infty,t) = 0$. (Заметим, что так как кривая $u = V(t)$ лежит в области влияния корней $\overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ и $\overline{u}_0^{(+)}(x,t)$, то функция $z(\xi,t)$ при любом фиксированном значении координаты t является знакопостоянной по ξ на интервалах $(-\infty;0]$ и $[0;+\infty)$ и не имеет нулей, поэтому дроби $z(\xi,t)/z(-0,t)$ и $z(\xi,t)/z(+0,t)$ всегда определены корректно.)

Так как $w_0^{(\pm)}(\xi,t) \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$, то существует такое $\xi_0 > 0$, что $|w_0^{(\pm)}(\xi,t)| \le \gamma/2$ при $\xi \ge \xi_0$. Далее, выбирая M достаточно большим, можно добиться, чтобы $w_\alpha(\xi,t) < 0$ при $|\xi| \le \xi_0$. При выбранном M в силу упомянутого выше знакопостоянства по ξ функции $z(\xi,t)$ на интервалах $(-\infty;0]$ и $[0;+\infty)$ будет выполнено неравенство

$$v_\alpha(x,t) + w_\alpha(\xi,t) \le -\gamma/2 \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}. \tag{32}$$

Определим теперь функцию $X_{(n+1)\alpha}(t)$, которую дает задача (31). Интегрируя дифференциальное уравнение (31) по ξ от $-\infty$ до 0, с учетом граничных условий будем иметь

$$\partial w_\alpha(-0,t)/\partial\xi = \{\widetilde{A}(\xi,t)[w_\alpha(\xi,t) + v_\alpha(X_0(t),t)]\}|_{-\infty}^{0} + X_{(n+1)\alpha}(t)\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi^{(-)}(\xi,t)\,d\xi,$$

$$\partial w_\alpha(-0,t)/\partial\xi = \overline{A}^{(-)}(t)\gamma + X_{(n+1)\alpha}(t)\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi^{(-)}(\xi,t)\,d\xi.$$

Аналогично

$$\partial w_\alpha(+0,t)/\partial\xi = \overline{A}^{(+)}(t)\gamma - X_{(n+1)\alpha}(t)\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi^{(+)}(\xi,t)\,d\xi.$$

Отсюда имеем

$$\begin{gathered}\partial w_\alpha(+0,t)/\partial\xi - \partial w_\alpha(-0,t)/\partial\xi = (\overline{A}^{(+)}(t) - \overline{A}^{(-)}(t))\gamma - X_{(n+1)\alpha}(t)\Phi'_x(X_0(t),t),\\ X_{(n+1)\alpha}(t) = [\Phi'_x(X_0(t),t)]^{-1}\,[(\overline{A}^{(+)}(t) - \overline{A}^{(-)}(t))\gamma - \delta].\end{gathered} \tag{33}$$

Так как $\overline{A}^{(+)}(t) - \overline{A}^{(-)}(t) < 0$ в $\overline{\Omega}$, то

$$\operatorname{sign}[X_{(n+1)\alpha}(t)] = -\operatorname{sign}[\Phi'_x(X_0(t),t)]. \tag{34}$$

Приведем теперь задачу для определения функции $Q_{(n+2)\alpha}(\xi,t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_{(n+2)\alpha}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\{\widetilde{A}(\xi,t)Q_{(n+2)\alpha}(\xi,t)\} + H_{(n+2)\alpha}(\xi,t),\\ Q_{(n+2)\alpha}(+0,t) - Q_{(n+2)\alpha}(-0,t) = -S_\alpha(t,\varepsilon),\\ Q_{(n+2)\alpha}(-0,t) = 0, \quad Q_{(n+2)\alpha}(\pm\infty,t) = \partial Q_{(n+2)\alpha}(\pm\infty,t)/\partial\xi = 0.\end{gathered} \tag{35}$$

Здесь $S_\alpha(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-n-2}u_{(n+1)\alpha}[(X_\alpha(t,\varepsilon)+0,t,\varepsilon) - (X_\alpha(t,\varepsilon)-0,t,\varepsilon)] + \varepsilon^{-1}[v_\alpha(X_\alpha(t,\varepsilon)+0,t) + w_\alpha(+0,t)] - \varepsilon^{-1}[v_\alpha(X_\alpha(t,\varepsilon)-0,t) + w_\alpha(-0,t)]$. Заметим, что $S_\alpha(t,\varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to +0$.

Первое условие сопряжения в (35) делает функцию $\alpha(x,t,\varepsilon)$ непрерывной на линии $x = X_\alpha(t,\varepsilon)$, а второе, вообще говоря, может быть взято произвольным. Из предшествующего анализа следует, что задача (35) разрешима.

Аналогично формулируются задачи для определения $w_\beta(\xi,t)$, $Q_{(n+2)\beta}(\xi,t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_\beta}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\{\widetilde{A}(\xi,t)[w_\beta(\xi,t) + v_\beta(X_0(t),t)]\} + \varphi(\xi,t)X_{(n+1)\beta}(t),\\ v_\beta(X_0(t),t) + w_\beta(-0,t) = v_\beta(X_0(t),t) + w_\beta(+0,t) = M,\\ \partial w_\beta(+0,t)/\partial\xi - \partial w_\beta(-0,t)/\partial\xi = -\delta, \quad w_\beta(\pm\infty,t) = \partial w_\beta(\pm\infty,t)/\partial\xi = 0,\end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_{(n+2)\beta}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\{\widetilde{A}(\xi,t)Q_{(n+2)\beta}(\xi,t)\} + H_{(n+2)\beta}(\xi,t),\\ Q_{(n+2)\beta}(+0,t) - Q_{(n+2)\beta}(-0,t) = -S_\beta(t,\varepsilon), \quad Q_{(n+2)\beta}(-0,t) = 0,\\ Q_{(n+2)\beta}(\pm\infty,t) = \partial Q_{(n+2)\beta}(\pm\infty,t)/\partial\xi = 0.\end{gathered} \tag{37}$$

Так же как и в случае нижней барьерной функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ здесь имеют место оценки

$$L[\beta] < 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \backslash \{(x,t) | x = X_\beta(t,\varepsilon)\}, \quad \partial\beta/\partial n|_+ < \partial\beta/\partial n|_- \quad \forall t \in R, \tag{38}$$

$$v_\beta(x,t) + w_\beta(\xi,t) \geq \gamma/2 \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}. \tag{39}$$

Анализируя полученные по ходу построения функций α и β неравенства ((38) и аналогичные неравенства для α), легко убедиться, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ построенные нами барьерные функции удовлетворяют всем условиям теоремы 1, за исключением, быть может, условия 2°. Остановимся на нем более подробно. В силу (32) и (39) при $(x,t) \in \overline{\Omega}$, но лежащих вне полосы Π между $x = X_\alpha(t,\varepsilon)$ и $x = X_\beta(t,\varepsilon)$, $\alpha < \beta$ при достаточно малых ε. Поведение же функций α и β внутри полосы Π требует дополнительного рассмотрения, а именно из условий (11) следует, что $\overline{u}_0^{(-)}(x,t) \neq \overline{u}_0^{(+)}(x,t)$ всюду в $\overline{\Omega}$, поэтому разность $\overline{u}_0^{(-)}(x,t) - \overline{u}_0^{(+)}(x,t)$ сохраняет знак всюду в $\overline{\Omega}$. Кроме того, как уже упоминалось выше, построенная нами функция $Q_0(\xi,t)$ при любом фиксированном $t \in R$ является монотонной по ξ на интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. Опираясь на сказанное, а также на равенство (34) и аналогичное соотношение для $X_{(n+1)\beta}(x,t)$, легко убедиться, что при $\operatorname{sign}[\overline{u}_0^{(-)}(x,t) - \overline{u}_0^{(+)}(x,t)] = \operatorname{sign}[\Phi'_x(X_0(t),t)]$ в полосе Π также выполнено неравенство $\alpha < \beta$ (но на этот раз за счет нулевого порядка асимптотики), а значит, в этом случае выполнены все требования теоремы 1. Следовательно, построенная выше асимптотика обоснована.

Сформулируем результат нашего рассмотрения в форме теоремы.

Теорема 2. *Пусть*

1° $A \in C^{(n+3),(n+3),1}_{u,x,t}(R \times \overline{\Omega})$, $B \in C^{(n+2),(n+2),1}_{u,x,t}(R \times \overline{\Omega})$ — *T-периодические по переменной t функции;*

2° *задачи (9), (10) имеют решения $u = \overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ и $u = \overline{u}_0^{(+)}(x,t)$ такие, что $A(\overline{u}_0^{(-)}(x,t),x,t) > 0$, $A(\overline{u}_0^{(+)}(x,t),x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega}$;*

3° *уравнение (21) имеет корень $x = X_0(t)$, целиком лежащий в области Ω, причем $\Phi'_x(x,t)|_{x=X_0(t)} \neq 0$ $\forall t \in R$;*

4° *уравнение $A(u,X_0(t),t) = 0$ имеет корень $u = V(t)$, лежащий между решениями $\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)$ и $\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)$, такой, что выполнено условие (22), а функция $F(u,t) = \int\limits_{V(t)}^{u} A(\eta,X_0(t),t)d\eta$ не имеет в замкнутом интервале между $\overline{u}_0^{(-)}(X_0(t),t)$ и $\overline{u}_0^{(+)}(X_0(t),t)$ других корней, отличных от $u = V(t)$;*

5° $\Phi'_x(X_0(t),t)/[\overline{u}_0^{(+)}(x,t) - \overline{u}_0^{(-)}(x,t)] < 0$ *в* $\overline{\Omega}$.

Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (2) с асимптотикой вида $u(x,t,\varepsilon) = u_n(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$, где

$$u_n(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon^k [\overline{u}_k^{(-)}(x,t) + Q_k^{(-)}(\xi,t)] & \text{при } x < X_{n+1}(t,\varepsilon), \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon^k [\overline{u}_k^{(+)}(x,t) + Q_k^{(+)}(\xi,t)] & \text{при } x > X_{n+1}(t,\varepsilon), \end{cases}$$

$\xi = (x - X_{n+1}(t,\varepsilon))/\varepsilon$, $X_{n+1}(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k X_k(t)$, *причем члены асимптотики определяются из задач (16), (23) — (25).*

Замечания. 1. Легко видеть, что теорема 2 остается справедливой, если функции A и B удовлетворяют сформулированным условиям гладкости лишь в некоторой окрестности построенного решения.

2. В п. 2° теоремы 2 достаточно потребовать, чтобы неравенство $A(\overline{u}_0^{(-)}(x,t),x,t) > 0$ было выполнено лишь слева от кривой $x = X_0(t)$, включая саму эту кривую, а неравенство $A(\overline{u}_0^{(+)}(x,t),x,t) < 0$ — лишь справа от этой кривой, включая ее саму. В этом случае требование 5° следует проверять только в точках, лежащих на кривой $x = X_0(t)$.

3. Форма условия 5° выбрана в виде наиболее похожем на условие устойчивости контрастной структуры из [1].

4. С помощью теоремы 1.2 из [4] по сформулированной выше схеме можно доказать теорему, аналогичную теореме 2, для задачи (2) с краевыми условиями более общего вида:

$$q_1 u(a,t) - \delta_1 u_x(a,t) = 0, \quad t \in R, \quad q_2 u(b,t) + \delta_2 u_x(b,t) = 0, \quad t \in R, \tag{40}$$

где либо $q_i = 1$, $\delta_i = 0$, либо $q_i \geq 0$, $\delta_i = 1$ $(i = 1,2)$. При этом структура асимптотики останется прежней. Ее регулярные члены будут определяться теперь из задач (9), (10), (23) и (24), в которых исходные граничные условия заменены соответствующими из (40). Задачи же для определения Q-функций останутся прежними.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99 — 01 — 01208).

Литература

1. *Васильева А. Б.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 4. С. 520 — 531.
2. *Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н.* // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4 — 32.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
4. *Amann H.* // Nonlinear Analysis: A Collection of Papers in Honor of Erich Rothe. Academic Press. New York, 1978. P. 1 — 29.
5. *Чанг К., Хауэс Ф.* Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения: Пер. с англ. М., 1988.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25 апреля 1998 г.