

УДК 518:517.944/.947

**О РЕШЕНИИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫМ
МЕТОДОМ**

И. В. ФРЯЗИНОВ

(Москва)

Для численного решения уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными в последнее время получил широкое распространение локально-одномерный метод (ЛОМ) (см., например, [1]). Этот метод применялся ранее для решения первой краевой задачи в произвольной области, а в случае третьей краевой задачи — лишь для областей, составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Для произвольных областей с кусочно-гладкой границей первая, вторая, и третья краевые задачи для системы уравнений теплопроводности рассматривались ранее в [2], где показаны существование и единственность обобщенного решения (и сходимость к нему некоторого дифференциально-разностного метода).

В данной заметке рассматривается вопрос о применении ЛОМ к решению третьей краевой задачи в произвольной области, т. е. вопрос о расщеплении граничного условия $\partial u / \partial n - (\sigma u + \mu) = 0$ по двум (или p) направлениям. В заметке рассматривается задача для двух измерений ($p = 2$). Метод допускает обобщение на случай многих переменных.

Дадим краткую характеристику метода на примере уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^p (L_{\alpha}^0 u + f_{\alpha}(x, t)) = 0, \quad L_{\alpha}^0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}.$$

В каждом слое $t_{j+(\alpha-1)/p} < t < t_{j+\alpha/p}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) решается одномерное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial t} - (L_{\alpha}^0 v + f_{\alpha}(x, t)) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (1.B)$$

Для решения этого уравнения на прямоугольных сетках используются неявные однородные разностные схемы

$$y_{\bar{t}_{\alpha}} = \Lambda_{\alpha} y + \Phi_{\alpha}, \quad (2.B)$$

изученные ранее в [1]. Граничное условие $\partial u / \partial n - (\sigma u + \mu) = 0$ заменяется условием

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \cos(n, x_{\alpha}) - (\sigma_{\alpha} u + \mu_{\alpha}) \right] = 0, \quad (3.B)$$

$$\sum_{\alpha=1}^p \sigma_{\alpha} = \sigma, \quad \sum_{\alpha=1}^p \mu_{\alpha} = \mu,$$

где ε — малый параметр. Уравнение (1.B) на слое $t_{j+(\alpha-1)/p} < t < t_{j+\alpha/p}$ решается с граничным условием

$$-\frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} \cos(n, x_{\alpha}) - (\sigma_{\alpha} v + \mu_{\alpha}) = 0, \quad (4.B)$$

которое заменяется трехточечной разностной схемой, связывающей значения функций в узлах сетки, лежащих на прямой, параллельной оси ox_{α} . Так как и разностное уравнение (2.B), и разностное граничное условие связывают значения функций при $t = t_{j+\alpha/p}$ лишь в узлах сетки, лежащих на прямой, параллельной оси ox_{α} , то решение третьей краевой задачи сводится в каждый момент $t_{j+\alpha/p}$ к решению одномерного разностного уравнения теплопроводности с граничным условием III рода (ЛОМ).

Если уравнение (1.B) и граничное условие (4.B) при $p = 2$ аппроксимировать поочередно то явными, то неявными схемами, то после исключения промежуточных значений при $t = t_{j+0.5}$ приходим к методу, который является обобщением метода продольно-поперечных направлений (П.-П.) (см. [3]) для третьей краевой задачи (см. дополнение 1).

Оказывается, что если выбрать $\varepsilon = \tau^{\delta}$, $\rho = \rho(x, t) \leq c_3 > 0$, $c = \text{const}$, $\delta c / \partial t < M$, где τ — шаг схемы по времени, и $0 < \delta < 1$ для ЛОМ, $0 < \delta < 2$ для метода П.-П., то погрешность в норме $L_2(g_h)$ для некоторого класса областей $\Omega^{(1)}$ и на некоторой последовательности сеток стремится к нулю при стремлении к нулю шагов сетки. В случае произвольных областей в заметке приведена оценка близости решений разностной и дифференциальной задач. Член $\tau^{\delta} (\partial(\rho u) / \partial t)$ добавляется при этом лишь в разностное граничное условие в виде $\tau^{\delta} (\rho u)_{-x}$. Величину $\tau^{\delta} \rho(x, t)$ можно интерпретировать, как сосредоточенную теплоемкость.

Для областей, составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, в заметке приведены оценки сходимости метода П.-П. (при $\rho \equiv 0$ в (3.B), (4.B)) с порядком $O(\tau^2) + O(\|h\|_0^2)$, где $\|h\|_0$ — максимальный шаг сетки по пространству, а также приведена схема повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, сходящаяся в $L_2(\bar{g}_h)$ с порядком $O(\|h\|_0^4) + O(\tau^2)$ (см. дополнение 2).

Нужно отметить, что решение третьей краевой задачи в произвольной области оказывается той же степени сложности, что и решение первой краевой задачи. Решение одномерных задач может быть осуществлено известным методом «прогонки», а решение третьей краевой задачи сводится к попеременным «прогонкам» по двум (или p) направлениям.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 (L_{\alpha}u + f_{\alpha}(x, t)),$$

где $x = (x_1, x_2)$ — точка двумерного пространства R_2 с координатами x_1, x_2 ; дифференциальный оператор L_{α} определяется так:

$$L_{\alpha}u = \frac{\partial w_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - q_{\alpha}(x, t)u, \quad w_{\alpha} = k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}}.$$

Будем для простоты вести основное изложение для случая односвязной конечной области G с гладкой границей Γ : $Q_T = G \times (0 < t \leq T]$. Требуется в \bar{Q}_T найти решение $u = u(x, t)$ следующей задачи.

Задача I:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 (L_{\alpha}u + f_{\alpha}(x, t)), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T,$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 w_{\alpha} \cos(n, x_{\alpha}) - (\sigma u + \mu) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

где n — внутренняя нормаль к Γ ; $u_0, \mu, \sigma, q_{\alpha}, k_{\alpha}, f_{\alpha}$ — заданные функции. Коэффициенты k_{α}, σ удовлетворяют условию $k_{\alpha} \geq c_1 > 0, \sigma \geq c_2 > 0$ (либо $\sigma \equiv 0$ — вторая краевая задача), c_1, c_2 — постоянные.

Будем предполагать, что задача I имеет единственное решение $u = u(x, t)$, непрерывное в замкнутой области \bar{Q}_T , и обладает всеми требуемыми по ходу изложения производными. Будем говорить, что выполнено условие А, т. е.

а) функции $u_{x_{\alpha}x_{\alpha}x_{\beta}}, (k_{\alpha})_{x_{\alpha}x_{\beta}}, \alpha, \beta = 1, 2$, удовлетворяют условию Липшица по x_1 и x_2 в \bar{Q}_T ;

б) функции $u_{x_{\alpha}t}, (q_{\alpha})_{x_{\alpha}}, (f_{\alpha})_{x_{\alpha}}$ удовлетворяют условию Липшица по x_{α} в $\bar{Q}_T, \alpha = 1, 2$;

в) функции $u_{x_{\alpha}}, u_{x_{\alpha}x_{\alpha}}, u_t, q_{\alpha}, f_{\alpha}, k_{\alpha}, (k_{\alpha})_{x_{\alpha}}, \sigma, \mu$ удовлетворяют условию Липшица по t в \bar{Q}_T и на $\Gamma, \alpha = 1, 2$;

г) граница Γ задается достаточно гладкими функциями $x_{\alpha} = x_{\alpha}(l), \alpha = 1, 2$, где l — длина дуги вдоль Γ , отсчитываемая от некоторой точки Γ по направлению движения часовой стрелки. Будем предполагать, что Γ не имеет особых точек, т. е. $(x_1')^2 + (x_2')^2 \neq 0$. Будем предполагать также, что, во всяком случае, функции $x_{\alpha}''(l), \alpha = 1, 2$, непрерывны и удовлетворяют на Γ условию Липшица по l .

Будем говорить, что выполнено условие Б, если выполнено условие А, а также условие б) выполняется для функции $u_{x_{\alpha}t}$, а условие в) — для функций $u_{tt}, (q_{\alpha})_{x_{\alpha}}, (f_{\alpha})_{x_{\alpha}}, (k_{\alpha})_{x_{\alpha}x_{\alpha}}, u_{x_{\alpha}x_{\alpha}x_{\alpha}}, u_{x_{\alpha}t}, \alpha = 1, 2$.

Может случиться, что задача I имеет в \bar{Q}_T достаточно гладкое решение и в том случае, если Γ — кусочно-гладкая кривая, а σ, μ — разрывные функции l . В этом случае мы также можем рассматривать вопрос о сходи-

мости схемы. Будем говорить, что выполнены условия A' или B' , если в условиях A и B вместо γ) выполнено условие γ'): функции $x_\alpha'(l)$, $x_\alpha''(l)$ ($\alpha = 1, 2$) кусочно-непрерывны, $(x_1')^2 + (x_2')^2 \neq 0$; на кусках $\Gamma_s \in \Gamma$, где $x_\alpha''(l)$ непрерывны, они, во всяком случае, удовлетворяют условию Липшица по l с постоянными M_s .

Отметим, что условия A' и B' являются достаточными для доказательства теоремы о точности [4] для ЛОМ и теоремы 2 для метода П.-П. в прямоугольнике и обеспечивают в этом случае точность $O(\tau) + O(\|h\|_0^2)$ и $O(\tau^2) + O(\|h\|_0^2)$ соответственно. Сходимость удастся доказать при более слабых требованиях.

§ 2. Сетки и обозначения

Рассмотрим множество узлов $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $i = (i_1, i_2)$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, прямоугольной сетки, покрывающей \bar{G} . Шаг сетки $h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)} > 0$ является по каждому направлению ox_α функцией координаты x_α (номера i_α). Будем предполагать, что

$$0 < m \leq h_\alpha^{(i_\alpha)} / h_\alpha^{(i_\alpha - 1)} \leq M, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1)$$

$$m = \text{const}, \quad M = \text{const}.$$

Два узла x_i и $x_{i'}$ назовем соседними, если $\sum_{\alpha=1}^2 |i_\alpha - i'_\alpha| = 1$. Обходя границу Γ области G по направлению движения часовой стрелки и соединяя последовательно узлы $x \in \bar{G}$, ближайšie к Γ , отрезками прямых, получим замкнутую ломаную Γ_h , ограничивающую при достаточно малом $0 < h_\alpha^{(i_\alpha)} \leq h_0$ лишь один многоугольник G_h : $\bar{G}_h = G_h + \Gamma_h$. Ломаную Γ_h будем проводить так, чтобы выполнялось следующее условие. Если отрезок, соединяющий два соседних узла $x_i \in \bar{G}_h$ и $x_{i'} \in \bar{G}_h$ ($\sum_{\alpha=1}^2 |i_\alpha - i'_\alpha| = 1$), принадлежит \bar{G}_h , то он принадлежит также \bar{G} . Будем всегда строить сетки так, чтобы угловые точки Γ совпадали с узлами сетки (см. фиг. 1). Множество узлов $x \in \Gamma_h$ обозначим через γ_h , множество узлов $x \in G_h$ — через g_h ; $\bar{g}_h = g_h + \gamma_h$. Двигаясь вдоль Γ_h по направлению движения часовой стрелки, перенумеруем по порядку узлы $x \in \gamma_h$. Будем отмечать иногда граничные узлы $x_{i_\gamma} \in \gamma_h$ индексом γ в отличие от индексов α, β ($\alpha, \beta = 1, 2$). Обозначим через

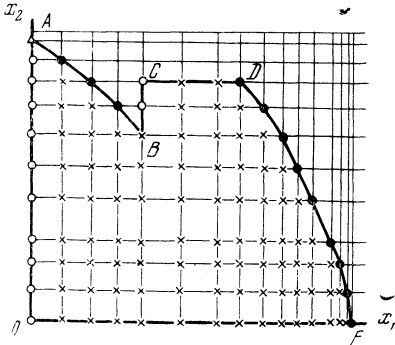
$$x_{i_{\gamma-1}} \equiv x^{(-1_\gamma)} \in \gamma_h \quad \text{и} \quad x_{i_{\gamma+1}} \equiv x^{(+1_\gamma)} \in \gamma_h$$

узлы, соседние с узлом $x_{i_\gamma} \equiv x \in \gamma_h$ вдоль Γ_h . Пусть $s^{(-0.5_\gamma)}$ — звено ломаной Γ_h , заключенное между $x \in \gamma_h$ и $x^{(-1_\gamma)} \in \gamma_h$, $s_0 = 0.5(s^{(+0.5_\gamma)} + s^{(-0.5_\gamma)})$. Здесь и в дальнейшем будем использовать одну и ту же букву для обозначения отрезка и его длины, площади и ее площади и т. д., если это не будет приводить к путанице. Все постоянные, не зависящие от $h_\alpha^{(i_\alpha)}$ и τ , будем обозначать одной буквой M .

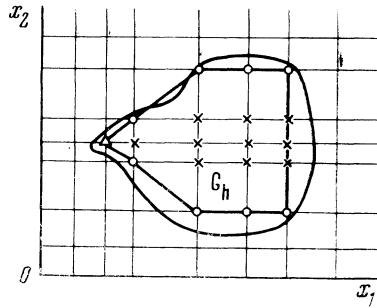
Пусть $(\mathcal{L}_\alpha)_i$ — прямая, параллельная оси ox_α , проходящая через узел x_i . Среди всех областей G можно выделить класс $\Omega^{(1)}$ областей, обладающих следующим свойством.

Для любой области $G \in \Omega^{(1)}$ можно построить последовательность сеток при $h_\alpha^{(i_\alpha)} \rightarrow 0$ ($\alpha = 1, 2$) такую, что либо граница Γ пересекает прямые $(\mathcal{L}_\alpha)_i$ ($\alpha = 1, 2$) лишь в узлах сетки $x_i \in \gamma_h$, либо куски границы Γ совпадают с отрезками прямых $(\mathcal{L}_\alpha)_i$ (OA, BC, CD, EO на фиг. 1). Назовем такие сетки при $0 < h_\alpha^{(i_\alpha)} \leq h_0 = \text{const}$ сетками $S^{(1)}$. Произвольную сетку при $0 < h_\alpha^{(i_\alpha)} \leq h_0$, узлы $x \in \gamma_h$ которой могут не принадлежать Γ ($\gamma_h \in \bar{G}$), назовем сеткой $S^{(2)}$.

Относительно выбора $h_0 = \text{const}$ см. также дополнение 3. Примеры сеток $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ приведены, соответственно, на фиг. 1 и 2. Сетку по t выберем



Фиг. 1. \times — для ω_i , \bullet — для γ_i^+ ,
 \circ — для γ_i^- , Δ — для γ_i^0



Фиг. 2

равномерной. Разобьем отрезок $0 \leq t \leq T$ на K равных частей, полагая $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots, K = T/\tau$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на две (по числу измерений) равные части и введем промежуточные (дробные) моменты времени

$$t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau,$$

где τ — полный шаг по времени. Полученная сетка по времени ω_τ включает как целые, так и дробные моменты.

Для сеточных функций введем обозначения:

$$\begin{aligned} h_\alpha &= x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)} = h_\alpha^{(i_\alpha)}, & h_{\alpha+} &= h_\alpha^{(i_\alpha+1)}, \\ x^{(\pm m_\alpha)} &= (x_1^{(i_1 \pm m)}, x_2^{(i_2)}), & x^{(\pm m_2)} &= (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2 \pm m)}), \\ x_\alpha^{(i_\alpha \pm 0.5)} &= 0.5(x_\alpha^{(i_\alpha)} + x_\alpha^{(i_\alpha \pm 1)}), & m &= 0.5, 1, \\ \|h\|_0 &= \max_{\bar{g}_h} \max_{\alpha=1,2} h_\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Проведем классификацию узлов $x \in \bar{g}_h$. Поставим в соответствие каждому узлу $x \in \bar{g}_h$ интервалы $(x^{(+1_\alpha)}, x) = d_\alpha^+$, $(x, x^{(-1_\alpha)}) = d_\alpha^-$. Представим \bar{g}_h в виде

$$\bar{g}_h = \omega_\alpha + \gamma_\alpha, \quad \gamma_\alpha = \gamma_\alpha^+ + \gamma_\alpha^- + \gamma_\alpha^0.$$

Будем считать, что $x \in \gamma_\alpha^+$ ($x \in \gamma_\alpha^-$), если $d_\alpha^+ \in \bar{G}_h$ ($d_\alpha^+ \subset \bar{G}_h$), $d_\alpha^- \subset \bar{G}_h$ ($d_\alpha^- \in \bar{G}_h$); $x \in \gamma_\alpha^0$, если $d_\alpha^+ \in \bar{G}_h$, $d_\alpha^- \in \bar{G}_h$. Множества γ_α^+ , γ_α^- , γ_α^0 будем называть, соответственно, множествами правых, левых и особых граничных узлов по направлению ox_α . Если $d \subset \bar{G}_h$ и $d \subset \bar{G}_h$, то $x \in \omega_\alpha$ — множеству внутренних узлов по направлению ox_α . На

фиг. 1 узлы, принадлежащие множествам $\omega_\alpha, \gamma_\alpha^+, \gamma_\alpha^0$ ($\alpha = 1$), отмечены различными значками.

В промежуточных точках сетки (см. (2)) $x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \bar{G}_h$ введем шаги $\tilde{h}_\beta^{(\pm 0.5\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \beta = 2, 1$. Если точка $x^{(-0.5\alpha)} \in \bar{G}_h$, то $\tilde{h}_\beta^{(-0.5\alpha)} = 0.5(h_\beta + h_{\beta+})$. Если точка $x^{(-0.5\alpha)} \in G_h$, то $\tilde{h}_\beta^{(-0.5\alpha)} = 0.5h_\beta$, если интервал между точкой $x^{(-0.5\alpha)}$ и точкой с координатами $x_\alpha^{(i_\alpha - 0.5)}, x_\beta^{(i_\beta - 0.5)}$, $\alpha = 1, 2, \beta = 2, 1$, принадлежит G_h ; иначе $\tilde{h}_\beta^{(-0.5\alpha)} = 0.5h_{\beta+}$.

Каждому внутреннему узлу $x \in g_h$ поставим в соответствие площадку $H \subset G_h$, ограниченную прямыми $x_1 = x_1^{(i_1 \pm 0.5)}, x_2 = x_2^{(i_2 \pm 0.5)}$, а узлам $x \in \gamma_h$ — площадку $H \subset G_h$, ограниченную этими прямыми и ломаной Γ_h . Очевидно, что если $x \in g_h$, то $H = \tilde{h}_1\tilde{h}_2, \tilde{h}_\alpha = 0.5(h_\alpha + h_{\alpha+})$.

Все рассуждения в дальнейшем будем проводить как на сетках $S^{(1)}$, удовлетворяющих условию (1), так и на квазиравномерных сетках $S^{(1)}$. Рассмотрим множество $\gamma_h^{(1)}$ узлов $x \in \gamma_h$, являющихся концами звеньев $s^{(+0.5\gamma)} \in \Gamma_h$, непараллельных осям координат. Сетку $S^{(1)}$ назовем квазиравномерной, если во всех таких узлах $x \in \gamma_h^{(1)}$, за исключением, быть может, конечного числа узлов, совпадающих с угловыми точками Γ , выполняется условие

$$|s^{(+0.5\gamma)} - s^{(-0.5\gamma)}| \leq M \|h\|_0^2. \quad (3)$$

Квазиравномерные сетки нетрудно построить для таких областей, как окружность, эллипс, выпуклых и достаточно гладких областей, обладающих осевой симметрией. Чтобы построить квазиравномерную сетку для области, изображенной на фиг. 1, достаточно выбрать квазиравномерную сетку по оси ox_2 , положив $h_2 - h_{2+} = O(\tilde{h}_2^2)$.

Для сеточных функций введем также обозначения

$$\begin{aligned} y &= y(x, t) = y(x_i, t_{j+\alpha/2}) = y^{j+\alpha/2}, y^{(\pm m\alpha)} = y(x^{(\pm m\alpha)}, t), \\ y_{\bar{x}_\alpha} &= (y - y^{(-1\alpha)}) / h_\alpha, \quad y_{x_\alpha} = (y_{\bar{x}_\alpha})^{(+1\alpha)}, \\ \tilde{h}_\alpha(w)_{\hat{x}_\alpha} &\equiv w^{(+0.5\alpha)} - w^{(-0.5\alpha)}, \quad (l_\alpha y)^{(+0.5\alpha)} = a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}, \\ (l_\alpha y)^{(-0.5\alpha)} &= a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}, \quad \check{y} = y^{j+(x-1)/2}, \quad \hat{y} = y^{j+(x+1)/2}, \\ y_{\bar{t}_\alpha} &= (y - \check{y}) / \tau, \quad y_{t_\alpha} = (\hat{y} - y) / \tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначение $\tilde{h}_\alpha(l_\alpha y \tilde{h}_\beta)_{\hat{x}_\alpha} \equiv (l_\alpha y \tilde{h}_\beta)^{(+0.5\alpha)} - (l_\alpha y \tilde{h}_\beta)^{(-0.5\alpha)}$ введено для того, чтобы единообразно записывать уравнение в узлах $x \in \gamma_h \cap \omega_\alpha$ и в узлах g_h . Так, в узлах $x \in g_h$ в обозначениях [1] имеем $\tilde{h}_\alpha(l_\alpha y \tilde{h}_\beta)_{\hat{x}_\alpha} - Hd_\alpha y = H\Lambda_\alpha y$, $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} - d_\alpha y = (a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha} - a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}) / \tilde{h}_\alpha - d_\alpha y$.

§ 3. Разностные схемы

Для численного решения задачи воспользуемся аппроксимациями операторов $H(L_\alpha u + f_\alpha(x, t))$, изученными в [5]. Дифференциальный оператор $H(L_\alpha u + f_\alpha)$ аппроксимируем трехточечной консервативной схемой

$$H(\Lambda_\alpha y + \Phi_\alpha) \equiv \tilde{h}_\alpha(l_\alpha y \tilde{h}_\beta)_{\hat{x}_\alpha} - H(d_\alpha y - \Phi_\alpha), \quad (5)$$

$$(l_\alpha y)^{(+0.5\alpha)} = a_x^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}, \quad (l_\alpha y)^{(-0.5\alpha)} = a_x y_{\bar{x}_\alpha}.$$

Коэффициенты a_α , d_α , φ_α являются функционалами от соответствующих коэффициентов k_α , q_α , f_α (см. [5]). В случае гладких коэффициентов можно пользоваться простейшими выражениями:

$$d_\alpha = q_\alpha, \quad \varphi_\alpha = f_\alpha, \quad a_\alpha = k_\alpha(x^{(-0.5\alpha)}, t) \quad \text{либо} \quad a_\alpha = 0.5(k_\alpha^{(-1\alpha)} + k_\alpha).$$

В каждый момент $t_{j+\alpha/2}$ будем решать разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение

$$H\left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} - (L_\alpha v + f_\alpha)\right) = 0 \quad (6)$$

с граничным условием, аппроксимирующим на Γ_h граничное условие III рода:

$$\sum_{\pm} s^{(\pm 0.5\gamma)} \left(k_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} \cos(n^{(\pm 0\gamma)}, x_\alpha) - (\sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)} v + \mu_\alpha^{(\pm 0\gamma)}) - \frac{\tau^\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \right) = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = \sigma^{(\pm 0\gamma)}, \quad \sum_{\alpha=1}^2 \mu_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = \mu^{(\pm 0\gamma)}.$$

Значок $(\pm 0\gamma)$ показывает, что σ , μ , n могут иметь разрывы в (угловых) точках границы Γ . В узлах $x \in g_h$ будем аппроксимировать (6) неявной схемой

$$Hy_{\bar{t}_\alpha} = H(\Lambda_\alpha y + \varphi_\alpha), \quad x \in g_h. \quad (8)$$

В узлах $x \in \gamma_h$ для $\sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)}$, $\mu_\alpha^{(\pm 0\gamma)}$ примем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)} &= \sigma^{(\pm 0\gamma)}(\bar{x}, t) \\ \mu_\alpha^{(\pm 0\gamma)} &= \mu^{(\pm 0\gamma)}(\bar{x}, t) \end{aligned} \right\} \text{при } s^{(\pm 0.5\gamma)} \perp ox_\alpha,$$

$$\sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = \mu_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = 0 \quad \text{при } s^{(\pm 0.5\gamma)} \parallel ox_\alpha.$$

В остальных узлах

$$\sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)}(x, t) \geq \bar{c}_2 > 0, \quad \bar{c}_2 = \text{const}, \quad \sum_{\alpha=1}^2 \sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = \sigma^{(\pm 0\gamma)}, \quad (8')$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \mu_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = \mu^{(\pm 0\gamma)}.$$

Здесь $\bar{x} \in \Gamma$ — точка пересечения нормали n к Γ , проходящей через узел $x \in \gamma_h$, с Γ (см. дополнение 3). В узлах $x \in \gamma_h$ в разностное граничное условие добавляется слагаемое $s_0 \tau^\delta (\bar{\rho} y)_{\bar{t}_\alpha}$, где $\bar{\rho}$ определяется формулами

$$\bar{\rho} = 0.5(\rho^{(+0\gamma)} s^{(+0.5\gamma)} + \rho^{(-0\gamma)} s^{(-0.5\gamma)})/s_0 \quad \text{при } s^{(\pm 0.5\gamma)} \nparallel ox_\alpha, \quad \alpha = 1, 2; \quad (9)$$

$$\bar{\rho} = 0.5(\rho^{(\pm 0\gamma)} s^{(\pm 0.5\gamma)})/s_0 \quad \text{при } s^{(\pm 0.5\gamma)} \nparallel ox_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$s^{(\mp 0.5\gamma)} \parallel ox_\beta, \quad \beta = 1 \quad \text{либо} \quad \beta = 2;$$

$\bar{\rho} = 0$ в остальных узлах.

Здесь $\rho^{(\pm 0\gamma)}$ — произвольная функция, $\rho^{(\pm 0\gamma)} \geq c_3 = \text{const} > 0$. Положим

$$\sigma_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = \mu_\alpha^{(\pm 0\gamma)} = \bar{\rho} = 0 \quad \text{при } x \in g_h. \quad (10)$$

Граничному условию (7) в узлах $x \in \gamma_\alpha^\mp$ поставим в соответствие схему

$$\pm (\bar{h}_\beta l_\alpha y)^{(\pm 0.5\alpha)} = Hy_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cy)_{\bar{t}_\alpha} + Q_\alpha(y) - H\Phi_\alpha, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Q_\alpha(y) &= Hd_\alpha y + s_0 (\bar{\sigma}_\alpha y + \bar{\mu}_\alpha), \quad c = \tau \bar{\rho}, \\ \bar{\sigma}_\alpha &= 0.5 (\sigma_\alpha^{(+0.5\gamma)} s^{(+0.5\gamma)} + \sigma_\alpha^{(-0.5\gamma)} s^{(-0.5\gamma)}) / s_0, \\ \bar{\mu}_\alpha &= 0.5 (\mu_\alpha^{(+0.5\gamma)} s^{(+0.5\gamma)} + \mu_\alpha^{(-0.5\gamma)} s^{(-0.5\gamma)}) / s_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что в узлах $x \in \gamma_\alpha^0$ имеет место соотношение

$$s^{(+0.5\gamma)} \cos(n_h^{(+0.5\gamma)}, x_\alpha) + s^{(-0.5\gamma)} \cos(n_h^{(-0.5\gamma)}, x_\alpha) = 0, \quad (13)$$

где $n_h^{(-0.5\gamma)}$ — нормаль к звену $s^{(-0.5\gamma)}$. Учитывая (13), граничному условию (7) в узлах $x \in \gamma_\alpha^0$ поставим в соответствие схему

$$0 = Hy_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cy)_{\bar{t}_\alpha} + Q_\alpha(y) - H\Phi_\alpha, \quad (14)$$

а в узлах $x \in \omega_\alpha \cap \gamma_h$ записываем схему, объединяющую (8), (11):

$$\bar{h}_\alpha (l_\alpha y \bar{h}_\beta)_{\hat{x}_\alpha} = Hy_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cy)_{\bar{t}_\alpha} + Q_\alpha(y) - H\Phi_\alpha. \quad (15)$$

Учитывая (10), уравнение (15) будем использовать во всех узлах $x \in \omega_\alpha$. Введем обозначения

$$N_\alpha(y) = \bar{h}_\alpha (l_\alpha y \bar{h}_\beta)_{\hat{x}_\alpha} - Q_\alpha(y), \quad \lambda_\alpha(y) = \pi_\alpha (\bar{h}_\beta l_\alpha y)^{(-\pi_\alpha 0.5\alpha)} + Q_\alpha(y),$$

где $\pi_\alpha = \pm 1$ при $x \in \gamma_\alpha^\pm$, $\pi_\alpha = 0$ при $x \in \gamma_\alpha^0$.

§ 4. Постановка разностной задачи

Поставим в соответствие исходной задаче I разностную задачу (реализующую локально-одномерный метод).

Задача II:

найти функцию $y = y(x, t)$ в $\bar{g}_h \times \omega_\tau$, удовлетворяющую уравнениям

$$Hy_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cy)_{\bar{t}_\alpha} = N_\alpha(y) + H\Phi_\alpha, \quad x \in \omega_\alpha,$$

краевым условиям

$$Hy_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cy)_{\bar{t}_\alpha} = -\lambda_\alpha(y) + H\Phi_\alpha, \quad x \in \gamma_\alpha$$

$$\text{при } t = t_{j+\alpha/2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\beta = 2, 1), \quad j = 0, 1, \dots, K,$$

и начальному условию

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{g}_h.$$

Отсюда видно, что при фиксированном α нужно решать одномерные уравнения с краевыми условиями III рода, используя в качестве начальных значений $y(x, t_{j+(\alpha-1)/2})$ во внутренних и граничных узлах, найденные при решении такой же задачи в момент $t_{j+(\alpha-1)/2}$ по направлению ox_β , $\beta = 2, 1$, $\alpha = 1, 2$. Таким образом, чтобы найти значение y на целом слое

$t = t_{j+1}$ по значению y на слое $t = t_j$, нужно поэтапно решать две одномерные задачи по двум координатным направлениям. При этом уравнение из задачи II нужно решать на кусках границы Γ_h , параллельных оси ox_α в узлах $x \in \omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. В случае областей составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (см. фиг. 3), согласно (9), следует положить $c = \rho \equiv 0$. В этом случае схема II переходит в схему, рассмотренную в [4]. Решение одномерных задач II может быть осуществлено известным методом «прогонки».

§ 5. Устойчивость схемы

Рассмотрим вопрос об устойчивости локально-одномерного метода (задачи II) при $\sigma \geq c_2 > 0$. Исследование устойчивости проводится методом энергетических неравенств. Введем следующие нормы:

$$\|y\| = \left(\sum_{\bar{g}_h} y^2 H \right)^{1/2}, \quad \|y\|_{\gamma_h} = \left(\sum_{\gamma_h} y^2 s_0 \right)^{1/2}, \quad \|y\|_* = \|y\|^2 + \tau^\delta \|\sqrt{\bar{\rho}} y\|_{\gamma_h}^2 \quad (16)$$

Умножим уравнения задачи II на $y^{j+\alpha/2}$ и просуммируем по $\omega_\alpha + \gamma_\alpha^0$. Воспользовавшись (8), граничными условиями задачи II, а также неравенством Коши — Буняковского, получаем

$$\|y^{j+\alpha/2}\|_*^2 (1 - M\tau) \leq \|y^{j+(\alpha-1)/2}\|_*^2 (1 + M\tau) + M\tau (\|\bar{\mu}_1^{j+\alpha/2}\|_{\gamma_h}^2 + \|\varphi^{j+\alpha/2}\|^2).$$

Отсюда следует устойчивость схемы при $0 < \tau \leq \tau_0$:

$$\|y^{j+\alpha/2}\| \leq \|y^{j+\alpha/2}\|_* \leq M \left\{ \|y^0\|_* + \left[\sum_{j'=0}^j \tau (\|\bar{\mu}_1^{j'+0.5}\|_{\gamma_h}^2 + \|\varphi^{j'+0.5}\|^2 + \|\bar{\mu}_2^{j'}\|_{\gamma_h}^2 + \|\varphi_2^{j'}\|^2) \right]^{1/2} \right\},$$

§ 6. О сходимости и точности локально-одномерного метода

Характеристикой точности разностной схемы является $\|z(x, t)\|$, где

$$z(x, t) = u(x, t) - y(x, t), \quad (17)$$

а $u(x, t)$ — решение исходной задачи I, $y(x, t)$ — решение разностной задачи II. Нетрудно видеть, что погрешность $z(x, t)$ является решением следующей задачи.

Задача III:

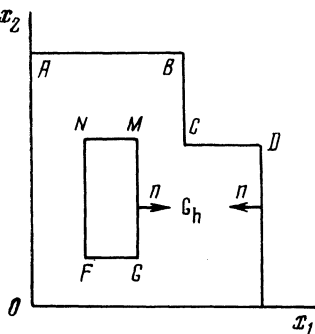
$$Hz_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cz)_{\bar{t}_\alpha} = \bar{h}_\alpha [(l_\alpha z + \nu_\alpha) \bar{h}_\beta]_{\hat{x}_\alpha} - \bar{Q}_\alpha(z) - \psi_{0_\alpha}, \quad x \in \omega_\alpha,$$

$$Hz_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cz)_{\bar{t}_\alpha} = \pm [(l_\alpha z + \nu_\alpha) \bar{h}_\beta]^{(\pm 0.5_\alpha)} - \bar{Q}_\alpha(z) - \psi_{0_\alpha}, \quad x \in \gamma_\alpha^\pm,$$

$$Hz_{\bar{t}_\alpha} + s_0 (cz)_{\bar{t}_\alpha} = -\bar{Q}_\alpha(z) - \psi_{0_\alpha}, \quad x \in \gamma_\alpha^0,$$

$$t = t_{j+\alpha/2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\beta = 2, 1),$$

$$j = 0, 1, \dots, K-1, \quad z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{g}_h,$$



Фиг. 3

где $\bar{Q}_\alpha(z) = Hd_\alpha z + s_0 \bar{\sigma}_\alpha z$, а слагаемые, содержащие функцию v_α и $\psi_{0\alpha}$, определяют погрешность аппроксимации схемы, $v_\alpha = O(h_\alpha^2)$.

Рассмотрим для простоты третью краевую задачу ($\sigma \geq \bar{c}_2 > 0$) в области $G \in \Omega^{(4)}$ с достаточно гладкой границей Γ на квазиравномерных сетках $S^{(4)}$ ($x_\alpha''(l)$, $\alpha = 1, 2$, непрерывны и удовлетворяют на Γ условию Липшица по l). В этом случае оказывается, что $\psi_{0\alpha}$ может быть представлена в виде

$$\psi_{0\alpha} = H\dot{\psi}_\alpha + H\psi^*, \quad x \in g_h; \quad \psi_{0\alpha} = \psi_\alpha^* + H\dot{\psi}_\alpha - \dot{\psi}_{\gamma_\alpha} + \psi_\delta, \quad x \in \gamma_h, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\alpha^{j+\alpha/2} &= \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=t_{j+1}}, \\ \dot{\psi}_{\gamma_\alpha}^{j+\alpha/2} &= \left\{ \psi_\alpha - w_\alpha \left(\frac{s^{(+0.5\gamma)}}{2} \cos(n_h^{(+0.5\gamma)}, x_\alpha) + \frac{s^{(-0.5\gamma)}}{2} \cos(n_h^{(-0.5\gamma)}, x_\alpha) \right) - \right. \\ &\quad \left. - s_0 (\bar{\sigma}_\alpha u + \bar{\mu}_\alpha) \right\}_{t=t_{j+1}}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом

$$\sum_{\alpha=1}^2 \dot{\psi}_\alpha^{j+\alpha/2} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^2 \dot{\psi}_{\gamma_\alpha}^{j+\alpha/2} = 0. \quad (20)$$

Для ψ^* , ψ_α^* , ψ_α , ψ_δ , $\dot{\psi}_{\gamma_\alpha}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} |\psi^*| &\leq M(\|h\|_0^2 + \tau), \quad |\psi_\delta| \leq Ms_0 \bar{\rho} \tau^\delta, \\ \max(|\psi_\alpha|, |\psi_\alpha^*|) &\leq M[s^{(+0.5\gamma)} \sqrt{\sigma_\alpha^{(+0\gamma)}} + s^{(-0.5\gamma)} \sqrt{\sigma_\alpha^{(-0\gamma)}}] (\|h\|_0^2 + \tau \|h\|_0), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}_{\gamma_\alpha}| &\leq M[s^{(+0.5\gamma)} \sqrt{\sigma_\alpha^{(+0\gamma)}} + s^{(-0.5\gamma)} \sqrt{\sigma_\alpha^{(-0\gamma)}}], \\ \dot{\psi}_{\gamma_\alpha} &= 0, \quad \bar{\rho} = 0 \quad \text{при } s^{(\pm 0.5\gamma)} \|ox_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

При оценке точности схемы используем метод суммирования погрешности, предложенный в [1]. Будем искать решение задачи III в виде

$$z = v + \eta, \quad (23)$$

где сеточная функция η , как и в [4], во всех узлах $x \in \bar{g}_h$ определяется из уравнений

$$\eta_{\bar{t}_\alpha} = \dot{\psi}_\alpha, \quad \eta^0 = 0, \quad x \in \bar{g}_h. \quad (24)$$

Используя первое равенство (20), для η имеем

$$\eta^{j+0.5} = O(\tau), \quad \eta^j = 0, \quad (L_\alpha \eta)^{j+0.5} = O(\tau). \quad (25)$$

Функцию v представим в виде

$$v = \bar{v} + \bar{\eta}, \quad (26)$$

где $\bar{\eta}$ определяется уравнениями

$$\tau^\delta s_0 (\bar{\rho}\bar{\eta})_{\bar{\Gamma}_\alpha} = \dot{\psi}_{\gamma_\alpha}, \quad x \in \gamma_h; \quad \bar{\eta} = 0 \quad \text{при } x \in g_h, \quad (27)$$

$$\bar{\eta}^0 = 0, \quad x \in \bar{g}_h.$$

Используя вторую оценку (20), для $\bar{\eta}$ получаем оценку

$$|\bar{\eta}| \leq M \bar{\rho} \tau^{1-\delta} \quad \text{при } x \in \bar{g}_h. \quad (28)$$

Для \bar{v} получаем систему уравнений типа III. Умножая уравнения этой системы на $v = \bar{v} + \bar{\eta}$, суммируя по $\omega_\alpha + \gamma_\alpha^0$, применяя неравенство Коши — Буняковского и используя оценки (25), (21), (22), (28), для функций \bar{v} , v при $0 < \tau \leq \tau_0$ получаем неравенство

$$I(1 - M\tau) \leq \check{I}(1 + M\tau) + M\tau R^2, \quad (28')$$

где

$$I = \|v\|^2 + \tau^\delta \|\bar{\rho}\bar{v}\|_{\gamma_h}^2, \quad (29)$$

$$R = (\tau + \|h\|_0^2) + (\tau^\delta + \tau^{(1-\delta)}) + \tau^{(1-\delta)/2}.$$

Из (26), (28), (28'), (29) и из (23), (25) при условии $\bar{v}^0 = 0$ получаем

$$\|z\| \leq MR. \quad (30)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Пусть выполнены условия A и $G \in \Omega^{(1)}$. Тогда решение разностной задачи (II) сходится в $L_2(\bar{g}_h)$ на квазиравномерных сетках $S^{(1)}$ при $h_\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha = 1, 2$), $\tau \rightarrow 0$, к решению исходной задачи I; точнее, при $0 < \tau \leq \tau_0$, $0 < h_\alpha \leq h_0$ имеет место оценка

$$\|u - y\| \leq M[\tau^\delta + \tau^{(1-\delta)/2} + \|h\|_0^2], \quad 0 < \delta < 1, \quad \sigma \geq c_2 > 0. \quad (31)$$

Замечания 1. На произвольных сетках $S^{(1)}$ при $\sigma \geq c_2 > 0$ аналогичное рассмотрение приводит к оценке (31), где в правую часть следует добавить слагаемое $M\|h\|_0$. Если выполнено условие A' и если угловые точки Γ совпадают с узлами сетки, то на квазиравномерных сетках в правую часть (31) нужно добавить слагаемое $M\|h\|_0^{3/2}$.

2. Если область $G \subset \Omega^{(1)}$ (и нельзя построить сетку $S^{(1)}$), то на произвольной сетке $S^{(2)}$ при выполнении условия A (или A') вместо (31) при $0 < h_\alpha \leq h_0$, $0 < \tau \leq \tau_0$ справедлива оценка

$$\|u - y\| \leq M[\tau^\delta + \tau^{(1-\delta)/2} + \|h\|_0] + M[\|\Delta n\|_{\gamma_h}^{1/2} + |\text{mes } \Gamma_h - \text{mes } \Gamma|^{1/2}]. \quad (32)$$

Здесь Δn — отрезок нормали к Γ , проведенной через узел $x \in \gamma_h$, заключенный между Γ и Γ_h (см. дополнение 3). Из (32) следует, что сетку $S^{(2)}$ нужно выбирать так, чтобы разность $\text{mes } \Gamma_h - \text{mes } \Gamma$ была мала.

3. В случае второй краевой задачи ($\sigma \equiv 0$) при выполнении условий теоремы 1 и при выполнении дополнительного предположения, что $0 < m_1 \leq h_1/h_2 \leq M$, вместо (31) справедлива оценка

$$\|u - y\| \leq M[\tau^{\delta/2} + \tau^{(1-\delta)/2} + \|h\|_0^{3/2}], \quad 0 < \delta < 1, \quad \sigma \equiv 0. \quad (33)$$

$$m_1 = \text{const.}$$

На квазиравномерной сетке $S^{(1)}$, когда выполнено условие A' (вместо A) и угловые точки Γ совпадают с узлами сетки, в правую часть (33) нужно добавить слагаемое $M\|h\|_0$. На произвольной сетке $S^{(1)}$ в (33) нужно добавить слагаемое $M\|h\|_0^{1/2}$.

4. Для областей, составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, на сетках $S^{(1)}$ ($\bar{\rho} \equiv 0$) в соответствии с [4] получаются оценки

$$\begin{aligned} \|u - y\| &\leq M(\tau + \|h\|_0^2), & \sigma &\geq c_2 > 0, \\ \|u - y\| &\leq M(\tau + \|h\|_0^{3/2}), & \sigma &\equiv 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Наилучший по времени порядок $O(\tau^{1/3})$ достигается в случае $\sigma \geq c_2 > 0$ при $\delta = 1/3$ и $O(\tau^{1/2})$ — при $\delta = 1/2$ в случае $\sigma \equiv 0$. Оценка точности по τ является грубой и появление слагаемого $\tau^{(1-\delta)/2}$ в (28'), (29), по-видимому, обусловлено лишь методом доказательства.

Незначительные изменения схемы позволяют рассматривать оператор

$$L_\alpha u = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (r_\alpha u) - q_\alpha u.$$

При этом получаются те же оценки (31) — (34').

В заключение автор приносит свою благодарность А. А. Самарскому за помощь, полезные советы и внимание к работе и Е. А. Волкову за ее обсуждение.

ДОПОЛНЕНИЯ

1. К решению третьей краевой задачи методом продольно-поперечных направлений

Как отмечено во введении, метод П.-П. может быть сведен к локально-одномерному, который состоит в решении явных и неявных одномерных разностных уравнений с разностными граничными условиями III рода. Поставим в соответствие задаче I разностную задачу, реализующую метод П.-П.

Задача II': найти функцию $y = y(x, t)$ на $\bar{g}_h \times \omega_t$, удовлетворяющую уравнениям

$$\left. \begin{aligned} Hy_{\bar{t}_2} + s_0 (cy)_{\bar{t}_2} &= N_2(y) + H\Phi_2, & x \in \omega_2, & t = t_{2j+2}, \\ Hy_{\bar{t}_1} + s_0 (cy)_{\bar{t}_1} &= N_1(y) + H\Phi_1, & x \in \omega_1, & t = t_{2j+1}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} Hy_{\bar{t}_1} + s_0 (cy)_{\bar{t}_1} &= N_1(y) + H\Phi_1, & x \in \omega_1, & t = t_{2j+1}, \\ Hy_{t_2} + s_0 (cy)_{t_2} &= N_2(y) + H\Phi_2, & x \in \omega_2, & t = t_{2j}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} Hy_{\bar{t}_2} + s_0 (cy)_{\bar{t}_2} &= -\lambda_2(y) + H\Phi_2, & x \in \gamma_2, & t = t_{2j+2}, \\ Hy_{\bar{t}_1} + s_0 (cy)_{\bar{t}_1} &= -\lambda_1(y) + H\Phi_1, & x \in \gamma_1, & t = t_{2j+1}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} Hy_{\bar{t}_1} + s_0 (cy)_{\bar{t}_1} &= -\lambda_1(y) + H\Phi_1, & x \in \gamma_1, & t = t_{2j+1}, \\ Hy_{t_2} + s_0 (cy)_{t_2} &= -\lambda_2(y) + H\Phi_2, & x \in \gamma_2, & t = t_{2j}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$j = 0, 1, \dots, (K-2)/2,$$

и с начальным условием

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{g}_h.$$

Для областей, составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, в задаче II' нужно положить $c = \bar{\rho} = 0$.

Из задачи II' следует, что при фиксированном $t_{j+\alpha/2}$ нужно решать одномерные разностные уравнения. Чтобы найти значение y в момент $t = t_{2j+2}$ по значению y в момент $t = t_{2j}$, нужно поэтапно решить четыре одномерные задачи (по двум явным и двум неявным схемам).

Если сложить попарно уравнения (35) и (36), то при $x \in g_h$ исключаются значения $y^{2j+1/2}$, $y^{2j+3/2}$ и мы приходим к обычной записи метода П.-П.:

$$\frac{y^{2j+2} - y^{2j+1}}{\tau} = (\Lambda_2 y + \Phi_2)^{2j+2} + (\Lambda_1 y + \Phi_1)^{2j+1}, \quad (39)$$

$$\frac{y^{2j+1} - y^{2j}}{\tau} = (\Lambda_2 y + \Phi_2)^{2j} + (\Lambda_1 y + \Phi_1)^{2j+1}.$$

Далее, если в узлах $x \in \gamma_h$ при $s^{(-0.5, \gamma)} \nparallel ox_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) положить $\delta = 1$, $\sigma_\alpha^{(-0, \gamma)} = \rho^{(-0, \gamma)} = 0.5\sigma^{(-0, \gamma)}$

и сложить (37), (38), то, например, в узлах $x \in \gamma_+^1 \cap \gamma_2^+$ при $s^{(\pm 0.5, \gamma)} \nparallel ox_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, получаем разностные граничные условия (для простоты считаем σ и μ непрерывными функциями):

$$\begin{aligned} -\tilde{h}_1^{(-0.5, 2)} (a_2 y_{x_2})^{2j+2} - \tilde{h}_2^{(-0.5, 1)} (a_1 y_{x_1})^{2j+1} &= H \left[\frac{y^{2j+2} - y^{2j+1}}{\tau_1} + \right. \\ &+ (d_2 y - \varphi_2)^{2j+2} + (d_1 y - \varphi_1)^{2j+1} \left. \right] + 0.5s_0 (\mu^{2j+2} + \mu^{2j+1}) + s_0 (\sigma y)^{2j+2}, \\ -\tilde{h}_1^{(-0.5, 2)} (a_2 y_{x_2})^{2j} - \tilde{h}_2^{(-0.5, 1)} (a_1 y_{x_1})^{2j+1} &= H \left[\frac{y^{2j+1} - y^{2j}}{\tau} + \right. \\ &+ (d_2 y - \varphi_2)^{2j} + (d_1 y - \varphi_1)^{2j+1} \left. \right] + 0.5s_0 (\mu^{2j} + \mu^{2j+1}) + s_0 (\sigma y)^{2j+1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Задача II' при $\sigma \geq c_2 > 0$ устойчива.

Теорема 2. При выполнении условия Б' в области, составленной из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, решение разностной задачи II' при $s = 0$ ($\bar{\rho} = 0$) на произвольных сетках $S^{(1)}$ сходится в $L_2(\bar{g}_h)$ к решению задачи I при $h_\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha = 1, 2$), $\tau \rightarrow 0$; точнее, при $0 < \tau \leq \tau_0$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|u^j - y^j\| &\leq M[\|h\|_0^2 + \tau^2], & \sigma \geq c_2 > 0, \\ \|u^j - y^j\| &\leq M[\|h\|_0^{3/2} + \tau^2], & \sigma = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Замечание 1. В случае произвольных областей $G \in \Omega^{(1)}$ на квазирегулярных сетках $S^{(1)}$ при выполнении условия Б вместо оценок (31), (33) при достаточно малых $0 < h_\alpha \leq h_0$, $0 < \tau \leq \tau_0$ получаются оценки

$$\|u^j - y^j\| \leq M[\tau^\delta + \tau^{(2-\delta)/2} + \|h\|_0^2], \quad \sigma \geq c_2 > 0, \quad (42)$$

$$\|u^j - y^j\| \leq M[\tau^{\delta/2} + \tau^{(2-\delta)/2} + \|h\|_0^{3/2}], \quad \sigma = 0 \quad (43)$$

и при $0 < \delta < 2$, $0 < m_1 \leq h_1/h_2 \leq M$,

где $m_1 = \text{const}$, $M = \text{const}$, $\partial \rho / \partial t$ удовлетворяет условию Липшица по t на G .

В случае произвольной области в оценке (32) слагаемое $M\tau^{(4-\delta)/2}$ также должно быть заменено на $M\tau^{(2-\delta)/2}$, $0 < \delta < 2$. Замечания, сделанные к оценкам (31), (33), справедливы и для (42), (43).

Наилучший порядок по времени $O(\tau^{2/3})$ достигается при $\delta = 2/3$ в случае $\sigma \geq c_2 > 0$ и $O(\tau^{1/2})$ при $\delta = 1/2$, $\sigma = 0$.

Замечание 2. При $s^{(\pm 0.5, \gamma)} \nparallel ox_\alpha$ и при $\delta = 1$, $\sigma_\alpha^{(\pm 0, \gamma)} = \rho^{(\pm 0, \gamma)} = 0.5\sigma^{(\pm 0, \gamma)}$ схема П.-П. может быть записана так, как если бы мы не добавляли слагаемого $\tau^\delta s_0(\bar{\rho}y)_{t_\alpha}$, $\tau^\delta s_0(\bar{\rho}y)_{\bar{t}_\alpha}$, а величину σy в граничном условии вычисляли на верхней строке по времени (см. (40)). Для такой схемы доказана сходимость с порядком $O(\sqrt{\tau}) + O(\|h\|_0^2)$ при $\sigma \geq c_2 > 0$, $O(\sqrt{\tau} + O(\|h\|_0^{3/2}))$ при $\sigma = 0$ (см. (42), (43)).

2. Схема пятого порядка точности

Приведем здесь схему четвертого порядка точности $O(\|h\|_0^4)$ по пространству и второго $O(\tau^2)$ по времени для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами для областей G_0 , составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Рассмотрим задачу I' для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t), \quad x \in G_0, \quad t \in (0, T],$$

с граничным условием

$$r[u] = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos(n, x_\alpha) - \sigma u = v(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T],$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}_0.$$

Предполагается, что $\sigma = \text{const}_{(i)}$ на каждом из отрезков Γ_{0i} , из которых состоит Γ_0 . Задаче I' поставим в соответствие разностную задачу на сетке $S^{(1)}$, равномерной по каждому направлению ($h_\alpha = \text{const}_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$):

Задача II'' : найти функцию $y = y(x, t)$ на $g_h \times \omega_\tau$, удовлетворяющую уравнениям

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_2 y_{\bar{t}_2} = \theta_2 N_2(y) + H \bar{\kappa}_2 \Phi_2, \quad x \in \omega_2, \quad t = t_{2j+2},$$

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_1 y_{\bar{t}_1} = (1 - \theta_1) N_1(y) + H \bar{\kappa}_1 \Phi_1, \quad x \in \omega_1, \quad t = t_{2j+1},$$

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_1 y_{\bar{t}_1} = \theta_1 N_1(y) + H \bar{\kappa}_1 \Phi_1, \quad x \in \omega_1, \quad t = t_{2j+1},$$

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_2 y_{\bar{t}_2} = (1 - \theta_2) N_2(y) + H \bar{\kappa}_2 \Phi_2, \quad x \in \omega_2, \quad t = t_{2j},$$

граничным условиям

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_2 y_{\bar{t}_2} = -\theta_2 \lambda_2(y) + H \bar{\kappa}_2 \Phi_2, \quad x \in \gamma_2, \quad t = t_{2j+2},$$

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_1 y_{\bar{t}_1} = -(1 - \theta_1) \lambda_1(y) + H \bar{\kappa}_1 \Phi_1, \quad x \in \gamma_1, \quad t = t_{2j+1},$$

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_1 y_{\bar{t}_1} = -\theta_1 \lambda_1(y) + H \bar{\kappa}_1 \Phi_1, \quad x \in \gamma_1, \quad t = t_{2j+1},$$

$$0.5 \cdot \bar{H} \bar{\kappa}_2 y_{\bar{t}_2} = -(1 - \theta_2) \lambda_1(y) + H \bar{\kappa}_2 \Phi_2, \quad x \in \gamma_2, \quad t = t_{2j},$$

$$j = 0, 1, \dots, (K-2)/2,$$

и начальному условию

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{g}_h.$$

Здесь

$$\bar{\kappa}_\alpha = 1 + \frac{h_\alpha \sigma_\alpha}{3}, \quad \bar{\mu}_\alpha = 1 + \frac{2}{9} \bar{\sigma}_\alpha s_0, \quad d_\alpha = 0, \quad a_\alpha = 1 \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0.5 \left(f + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right).$$

Функции $\bar{\sigma}_\alpha$, $\bar{\mu}_\alpha$, $Q_\alpha(y)$ определяются по формулам (8'), (10), (12) по σ и μ , где

$$\mu = v + \begin{cases} \frac{h_2^2}{6} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - r[f] \right], & x \in \Gamma_0^{(2)}, \\ \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2}{12} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - r[f] \right], & x \in \Gamma_0^{(1)}, \end{cases}$$

$\Gamma_0 = \Gamma_0^{(1)} + \Gamma_0^{(2)}$, $\Gamma_0^{(\alpha)}$ — множество отрезков, параллельных оси ox_β , $\alpha=1, 2$, $\beta=2, 1$, из которых состоит Γ . На фиг. 3 $\Gamma_0^{(1)} = \{OA, FN, GM, CB, ED\}$, $\Gamma_0^{(2)} = \{OE, FG, CD, NM, AB\}$. Весовые множители θ_α определяются формулой

$$\theta_\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h_\alpha^2}{12\tau} \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Выпишем еще раз схему II'' для частного случая прямоугольника $0 \leq x_1 \leq \bar{x}_1$, $0 \leq x_2 \leq \bar{x}_2$ в обозначениях работы [4]. В этом случае функция $y(x, t)$ удовлетворяет уравнениям

$$0.5 \cdot y_{\bar{t}_2} = \theta_2 y_{x_2 x_2} + \Phi_2, \quad x \in \omega_2, \quad t = t_{2j+2},$$

$$0.5 \cdot y_{\bar{t}_1} = (1 - \theta_1) y_{x_1 x_1}, \quad x \in \omega_1, \quad t = t_{2j+1},$$

$$0.5 \cdot y_{\bar{t}_1} = \theta_1 y_{x_1 x_1}, \quad x \in \omega_1, \quad t = t_{2j+1},$$

$$0.5 \cdot y_{\bar{t}_2} = (1 - \theta_2) y_{x_2 x_2} + \Phi_2, \quad x \in \omega_2, \quad t = t_{2j},$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 0.5 \cdot y_{t_2}^- \frac{h_2}{2} &= \theta_2 [y_{x_2} - (\sigma_2^- y + \mu_2^-)] + \kappa_2^- \frac{h_2}{2} \Phi_2, & x \in \gamma_2^- \\
 0.5 \cdot y_{t_2}^+ \frac{h_2}{2} &= \theta_2 [-y_{x_2} - (\sigma_2^+ y + \mu_2^+)] + \kappa_2^+ \frac{h_2}{2} \Phi_2, & x \in \gamma_2^+
 \end{aligned} \right\} t = t_{2j+2}, \\
 & \left. \begin{aligned}
 0.5 \cdot y_{t_1}^- \frac{h_1}{2} &= (1 - \theta_1) [y_{x_1} - (\sigma_1^- y + \mu_1^-)], & x \in \gamma_1^- \\
 0.5 \cdot y_{t_1}^+ \frac{h_1}{2} &= (1 - \theta_1) [-y_{x_1} - (\sigma_1^+ y + \mu_1^+)], & x \in \gamma_1^+
 \end{aligned} \right\} t = t_{2j+1}, \\
 & \left. \begin{aligned}
 0.5 \cdot y_{t_1}^- \frac{h_1}{2} &= \theta_1 [y_{x_1} - (\sigma_1^- y + \mu_1^-)], & x \in \gamma_1^- \\
 0.5 \cdot y_{t_1}^+ \frac{h_1}{2} &= \theta_1 [-y_{x_1} - (\sigma_1^+ y + \mu_1^+)], & x \in \gamma_1^+
 \end{aligned} \right\} t = t_{2j+1}, \\
 & \left. \begin{aligned}
 0.5 \cdot y_{t_2}^- \frac{h_2}{2} &= (1 - \theta_2) [y_{x_2} - (\sigma_2^- y + \mu_2^-)] + \kappa_2^- \frac{h_2}{2} \Phi_2, & x \in \gamma_2^- \\
 0.5 \cdot y_{t_2}^+ \frac{h_2}{2} &= (1 - \theta_2) [-y_{x_2} - \sigma_2^+ y + \mu_2^+] + \kappa_2^+ \frac{h_2}{2} \Phi_2, & x \in \gamma_2^+
 \end{aligned} \right\} t = t_{2j},
 \end{aligned}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{g}_h.$$

Здесь $\sigma_\alpha^- = \sigma$, $\mu_\alpha^- = \mu_\alpha$ при $x \in \gamma_\alpha^+$ ($x_\alpha = 0$); $\sigma_\alpha^+ = \sigma$, $\mu_\alpha^+ = \mu_\alpha$ при $x \in \gamma_\alpha^+$ ($x_\alpha = \bar{x}_\alpha$);

$$\begin{aligned}
 \kappa_\alpha^\mp &= 1 + \frac{h_\alpha \sigma_\alpha^\mp}{3} \quad (\alpha = 1, 2), \quad \mu_2^\mp = v + \frac{h_2^2}{6} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \mp \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sigma_2^\mp f \right], \\
 \mu_2^\mp &= v + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2}{12} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \mp \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sigma_1^\mp f \right], \quad y_{x_\alpha \bar{x}_\alpha} = (y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}) / h_\alpha.
 \end{aligned}$$

Пусть будут выполнены естественные условия на гладкость правых частей $f(x, t)$, $v(x, t)$ и решения $u(x, t)$ задачи I' , определяемые требованиями точности схемы. Тогда справедлива следующая

Теорема 3. При достаточной гладкости правых частей f и v и решения $u(x, t)$ задачи I' решение разностной задачи II''' сходится в $L_2(g_h)$ на равномерных сетках $S^{(1)}$ к решению задачи I' при $h_\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha = 1, 2$), $\tau \rightarrow 0$.

Справедлива следующая оценка:

$$\|u^{2j} - y^{2j}\| \leq M[h_1^4 + h_2^4 + \tau^2]A_0^2 \text{ при } \sigma \geq c_2 > 0,$$

где

$$A_0 = \sum_{\alpha=1}^2 (|\theta_\alpha| + (1 - \theta_\alpha)).$$

При $\theta_\alpha \geq 0$, т. е. при $\tau / h_\alpha^2 \geq 1/12$, имеем $A_0 \leq 2$. В менее интересном для практики случае $\tau / h_\alpha^2 < 1/12$ сходимость имеет место при $\tau / h_\alpha^2 = \text{const}$, $A_0 \leq (h_1^2 + h_2^2) / 12\tau$.

В случае $\sigma \equiv 0$ удается получить следующую оценку:

$$\|y^{2j} - u^{2j}\| \leq M(h_1^{7/2} + h_2^{7/2} + \tau^2)A_0^2.$$

3. Выбор шага h_0

Проведем следующее построение. Рассмотрим вблизи Γ достаточно узкую полосу $\Delta \in \bar{G}$ шириной $\bar{\delta}(l) \leq \bar{\delta}_0 = \text{const}$. Пусть $\bar{\delta}(l) = 0$ в угловых точках Γ . При достаточно малом $h_\alpha \leq h_0(\bar{\delta}_0) = \text{const}$ все узлы $x \in \gamma_h$ окажутся в полосе Δ . Можно показать, что всегда найдется такое $\bar{\delta}_0 = \text{const}$, что при всех $h_\alpha \leq h_0(\bar{\delta}_0) \equiv h_0$ ($\alpha = 1, 2$).

1. Из каждого узла $x \in \gamma_h$ можно провести только одну нормаль n к Γ такую, что ее отрезок Δn , заключенный между узлом $x \in \gamma_h$ и Γ , принадлежит Δ ; отрезки Δn_i , соответствующие различным узлам $x_i \in \gamma_h$, не пересекаются в Δ . Точки $\bar{x} \equiv \bar{x}_{i\gamma} \in \Gamma$ пересечения этих нормалей с Γ делят Γ на дуги $s^{(-0.5\gamma)}$, соответствующие

ющие отрезкам $s^{(-0.5\gamma)}$. Пусть точка $x^{(-0.5\gamma)} \in \Gamma$ делит дугу $s^{(-0.5\gamma)}$ пополам. Рассмотрим локальные системы координат, оси которых — нормали и касательные к дугам $s^{(-0.5\gamma)}$ в точках $x^{(-0.5\gamma)}$. Можно показать, что при достаточно малом $\bar{\delta}_0 = \text{const}$ и при всех $0 < h_\alpha \leq h_0(\bar{\delta}_0) \equiv h_0$.

2. Дуги $s^{(-0.5\gamma)}$ задаются однозначными функциями в локальных системах координат, связанных с точками $x^{(-0.5\gamma)}$.

Всегда будем рассматривать сетки только при $h_\alpha \leq h_0(\bar{\delta}_0) \equiv h_0$, $\alpha = 1, 2$. Оценки погрешности аппроксимации (21), (22) схемы, а также оценки точности (31) — (33), (42), (43) справедливы лишь при $0 < h_\alpha \leq h_0$.

*Поступила в редакцию
29.03.1965*

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 787—811.
2. В. И. Лебедев. Об одной системе параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1955, 103, № 5, 763—766.
3. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Soc. Ind. Appl. Math., 1955, 3, 28—41.
4. И. В. Фрязинов. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 6, 1106—1111.
5. А. А. Самарский. О сходимости и точности однородных разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 603—694.