I. Z. Golubchik, On the general linear group over weak Noetherian associative algebras, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1995, Volume 1, Issue 3, 661–668

О полной линейной группе над слабо нетеровыми ассоциативными алгебрами

И. З. ГОЛУБЧИК
Уфимский педагогический институт

УДК 512.544.6

Ключевые слова: полная линейная группа, элементарная подгруппа.

Аннотация

Пусть R — слабо нетерова алгебра с единицей над бесконечным полем, I — идеал в R, $n \geqslant 3$, $E_n(R)$ — подгруппа элементарных матриц в полной линейной группе $GL_n(R)$, $E_n(R,I)$ — нормальный делитель в $E_n(R)$, порожденный элементарными матрицами $1 + \lambda e_{ij}$, $\lambda \in I$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $GL_n(R,I)$ — ядро и $C_n(R,I)$ — прообраз центра при гомоморфизме $GL_n(R) \to GL_n(R/I)$ соответственно. Доказано, что если G — подгруппа в $GL_n(R)$, то она нормализуема $E_n(R)$ тогда и только тогда, когда $E_n(R,F) \subseteq G \subseteq C_n(R,F)$ для некоторого идеала F в R; $[C_n(R,F), E_n(R)] = E_n(R,F)$ и, в частности, группы $E_n(R)$, $E_n(R,F)$ нормальны в $GL_n(R)$ для всех идеалов F в R.

Abstract

I. Z. Golubchik, On the general linear group over weak Noetherian associative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 661–668.

Let R be a weak Noetherian algebra with unity element over an infinite field, I an ideal in R, $n \geqslant 3$, $E_n(R)$ the elementary subgroup in the general linear group $GL_n(R)$, $E_n(R,I)$ the normal subgroup in $E_n(R)$ generated by the elementary matrices $1 + \lambda e_{ij}$, $\lambda \in I$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $GL_n(R,I)$ the kernel and $C_n(R,I)$ the preimage of the center of the homomorphism $GL_n(R) \to GL_n(R/I)$ respectively. It is proved that if G is a subgroup of $GL_n(R)$, then it is normalized by $E_n(R)$ if and only if $E_n(R,F) \subseteq G \subseteq C_n(R,F)$ for some ideal F of R; $[C_n(R,F), E_n(R)] = E_n(R,F)$ and in particular the groups $E_n(R)$ and $E_n(R,F)$ are normal in $GL_n(R)$ for all ideals F of R.

Определение 1. Пусть R — ассоциативная алгебра над бесконечным полем P. Двусторонний идеал I алгебры R назовем *слабо нетеровым*, если для любых $a, b \in I$ правый и левый R-модули

$$\sum_{m=1}^{\infty} Rba^m \text{ и } \sum_{m=1}^{\infty} a^m bR \text{ конечно порождены над } R. \tag{1}$$

Кольцо R назовем *слабо нетеровым*, если существует такая возрастающая цепь идеалов $\{0\} = I_0 \subset \ldots \subset I_{k+1} = R$ кольца R, что идеалы I_{i+1}/I_i колец R/I_i слабо нетеровы для всех i от 0 до k.

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 661–668.

Замечание 2. Если идеал I алгебры R алгебраичен над центром R либо является правым и левым нетеровым модулем над R, то I — слабо нетеров идеал. В частности, если алгебра R алгебраична над своим центром либо R — нетерова справа и слева ассоциативная алгебра, то R слабо нетерова (здесь $I_1 = R$).

Замечание 3. Пусть R — PI-алгебра над P. Тогда по лемме 3.3 из работы Голубчика и Маркова [1] существует такая возрастающая цепь идеалов $\{0\} = I_0 \subset \ldots \subset I_{k+1} = R$, что идеалы I_{i+1}/I_i алгебраичны над центрами колец R/I_i для всех i от 0 до k, и по замечанию 2 R слабо нетерова. В частности, произвольная P-подалгебра R в алгебре матриц A_n над коммутативной P-алгеброй A слабо нетерова.

Пусть $n \geqslant 3$, $E_n(R)$ — подгруппа элементарных матриц в полной линейной группе $GL_n(R)$ над R, $E_n(R,I)$ — нормальный делитель в $E_n(R)$, порожденный элементарными матрицами $1 + \lambda e_{ij}$, $\lambda \in I$, I — идеал в R, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Далее $GL_n(R,I)$ — ядро, а $C_n(R,I)$ — прообраз центра при гомоморфизме $GL_n(R) \to GL_n(R/I)$.

Основной в работе является следующая

Теорема 4. *Пусть $n \geqslant 3$ и R — слабо нетерова алгебра с 1 над бесконечным полем P, G — подгруппа в $GL_n(R)$. Тогда*

1) группа G нормализуема $E_n(R)$, если и только если

$$E_n(R,F) \subseteq G \subseteq C_n(R,F)$$

для некоторого идеала F в R;

2) $[C_n(R,F), E_n(R)] = E_n(R,F)$, и в частности, группы $E_n(R)$, $E_n(R,F)$ нормальны в $GL_n(R)$ для всех идеалов F в R.

Для коммутативных колец R теорема 4 доказана в работах Уилсона [2], Голубчика [3], Суслина [4] и Боревича, Вавилова [6]. Для колец R, являющихся конечнопорожденными модулями над своим центром, теорема 4 получена в работе Васерштейна [7], смотри также теорему Суслина из [5]. В работах автора [8], [9] теорема 4 доказана для произвольных PI-колец, был использован результат Голубчика и Михалёва [10] о субнормальности $E_n(R)$ в $GL_n(R)$ для PI-кольца R. В работе Хлебутина [11] пункт 2 данной теоремы получен для кольца R — алгебраичного над коммутативным артиновым кольцом. Заметим также, что в работе автора [3] было доказано, что для нетерова слева кольца R и нецентральной подгруппы G в $GL_n(R)$, нормализуемой $E_n(R)$, существует ненулевой идеал I в R, для которого $G \supseteq E_n(R,I)$.

§ 1 Извлечение трансвекций

Лемма 5 ([12], с. 104)**.** *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $n \geqslant 3$ и G — подгруппа в $GL_n(R)$, инвариантная относительно $E_n(R)$, h — нецен-*

тральный элемент из G и $h_{ij} = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Тогда $G \supseteq E_n(R, F)$, где F — ненулевой идеал в R.

Лемма 6. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $n \geqslant 3$, G — подгруппа в $GL_n(R)$, инвариантная относительно $E_n(R)$, a — нецентральный элемент из G и a_{11} — делитель нуля в R. Тогда $G \supseteq E_n(R, F)$, где F — ненулевой идеал в R.*

Доказательство. Пусть $a_{11}r = 0$ и $r \neq 0$. Положим

$$b = a(1 + re_{12})a^{-1}(1 - re_{12}).$$

Тогда $b \in G$ и при $i \neq 2$ $e_{11}be_{ii} = e_{11}e_{ii}$, ибо $e_{11}a_{11}r = 0$. В частности, $b_{11} = 1$ и $b_{13} = 0$. Если b централен, то $b = 1$, ибо $b_{11} = 1$. Тогда $are_{12} = re_{12}a$ и $e_{11}are_{12} = re_{12} = 0$, ибо $a_{11}r = 0$. Таким образом, $r = 0$, что противоречит выбору r. Значит, b нецентрален, $b_{13} = 0$ и по лемме 5 $G \supseteq E_n(R, F)$, $F \neq \{0\}$. Лемма 6 доказана.

Предложение 7. *Пусть R — слабо нетерова алгебра с 1, $n \geqslant 3$, F — идеал в R и G — подгруппа в $GL_n(R)$, инвариантная относительно $E_n(R)$ и $G \nsubseteq C_n(R, F)$. Тогда существуют такие $\lambda \in R \setminus F$ и $a \in GL_n(R, F)$, что $(1 + \lambda e_{12})a \in G$.*

Доказательство. Так как факторкольцо R/F также слабо нетерово, то достаточно разобрать случай $F = \{0\}$. Тогда G — нецентральная подгруппа в $GL_n(R)$ и по лемме 5 можно считать, что $b_{23} \neq 0$ для $b \in G$. Тогда $Rb_{23} \neq 0$. Выберем i — наименьшее натуральное число, для которого $I_i b_{23} \neq 0$, где I_i — идеалы из определения 1. Так как $R = I_{k+1}$, то $0 < i \leqslant k + 1$. Пусть

$$xb_{23} \neq 0, \ x \in I_i, \ I_{i-1}b_{23} = \{0\}, \tag{2}$$

$$c = b^{-1}(1 + xe_{32})b(1 - xe_{32}). \tag{3}$$

Тогда $c \in G \cap GL_n(R, I_i)$. Если c централен, то $b(1 + xe_{32}) = \alpha(1 + xe_{32})b$, α лежит в центре кольца R и $(1 - \alpha)b_{11} = 0$. По лемме 6 можно считать, что $\alpha = 1$. Тогда $bxe_{32} = xe_{32}b$ и $xb_{23} = 0$, что противоречит (2). Итак, c нецентрален. Положим $y = c_{33} = 1 + (b^{-1})_{33}xb_{23}$, $z = c_{23} = (b^{-1})_{23}xb_{23}$. Тогда $y - 1$ и z из I_i и по условию 1 существует $m > 0$, для которого

$$z(y-1)^{m+1} - \sum_{j=1}^{m} r_j z(y-1)^j = s \in I_{i-1}, \quad r_j \in R. \tag{4}$$

Из (2) $s(y - 1) \in I_{i-1}b_{23} = \{0\}$, и из (4)

$$z(y-1)^{m+2} = \sum_{j=1}^{m} r_j z(y-1)^{j+1}.$$

Тогда

$$zy^{m+2} = \sum_{j=1}^{m+1} s_j z y^j + s_0 z; \quad s_0, s_j \in R. \tag{5}$$

По лемме 6 можно считать, что $y = c_{33}$ — неделитель нуля, и по лемме 5, что $z = c_{23} \neq 0$. Тогда из (5) $ry = sz \neq 0$, то есть

$$rc_{33} = sc_{23} \neq 0, \quad r, s \in R. \tag{6}$$

Положим $d = (1 - re_{13} + se_{12})c^{-1}(1 + re_{13} - se_{12})c$. Тогда $d \in G$ и из (6) следует, что $d_{23} = (c^{-1})_{23}(rc_{33} - sc_{23}) = 0$. По лемме (5) осталось разобрать случай, когда d централен. Тогда $c(1 + re_{13} - se_{12}) = \mu(1 + re_{13} - se_{12})c$, μ — из центра кольца R. Умножая последнее равенство справа на e_{33} и слева на c^{-1}, получаем $e_{33} + re_{13} = \mu e_{33}$, ибо из (6) $c(e_{13}r - e_{12}s)ce_{33} = 0$. Тогда $r = 0$, что противоречит (6). Предложение 7 доказано.

§ 2 Коммутаторные формулы

Лемма 8 [4]. *Пусть F — идеал в ассоциативном кольце R, $n \geqslant 3$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $W \in R_n e_{ii}$, $V \in e_{ii} F_n$, $VW = 0$ и одна из координат строки V нулевая. Тогда $1 + WV \in E_n(R, F)$.*

Лемма 9. *Пусть F — идеал в ассоциативном кольце R и E_F — подгруппа в $GL_n(R)$, порожденная $1 + \lambda e_{ij}$, $\lambda \in F$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Тогда $E_n(R, F^2) \subseteq E_F$.*

Доказательство. Из формул $[1 + \lambda e_{ij}, 1 + \mu e_{jk}] = 1 + \lambda\mu e_{ik}$, где $\lambda, \mu \in R$, i, j, k различны, следует, что группа $E_n(R, F^2)$ порождена элементами вида $a = (1 + \lambda e_{ij})(1 + xye_{ji})(1 - \lambda e_{ij})$, где $\lambda \in R$, $x, y \in F$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Но $1 + xye_{ji} = [1 + xe_{jk}, 1 + ye_{ki}]$ и $a = [(1 + \lambda xe_{ik})(1 + xe_{jk}), (1 + ye_{ki})(1 - y\lambda e_{kj})] \in E_F$, ибо $\lambda x, x, y, y\lambda \in F$. Лемма 9 доказана.

Предложение 10. *Пусть R — слабо нетерова алгебра с 1 над бесконечным полем P, $n \geqslant 3$ и F — идеал в R. Тогда*

$$\Big[GL_n(R, F), \underbrace{E_n(R), \ldots, E_n(R)}_{m}\Big] = E_n(R, F) \tag{7}$$

для некоторого натурального m.

Доказательство. Из определения слабо нетерова кольца следует, что достаточно доказать формулу

$$[GL_n(R, F), E_n(R), E_n(R)] = E_n(R, F) \tag{8}$$

в случае, когда $F \subseteq I$ и I — слабо нетеров идеал. Пусть

$$d \in GL_n(R,F), \quad \lambda \in P, \quad g = 1 + \lambda d^{-1} e_{12} d \tag{9}$$

и i, j, k — различные числа от 1 до n. Положим

$$\begin{aligned} &(g^{-1})_{jj} = 1 - \lambda a; \qquad g_{kk} = 1 + \lambda a_1; \\ &g_{ik}(g^{-1})_{kj} = \lambda^2 b, \quad g_{kj}(g^{-1})_{ij} = \lambda^2 b_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда $a, a_1, b, b_1 \in F \subseteq I$ и по условию (1)

$$ba^{m+1} = \sum_{p=1}^{m} r_p b a^p \text{ и } (a_1)^{m+1} b_1 = \sum_{p=1}^{m} a_1^p b_1 s_p \tag{11}$$

для некоторых $m > 0$, $r_p, s_p \in R$. Из (11)

$$yb = x(1 - \lambda a) \text{ и } y = 1 - \sum_{p=1}^{m} r_p (-\lambda)^{m+1-p}, \tag{12}$$

$$b_1 z = (1 + \lambda a_1) x_1 \text{ и } z = 1 - \sum_{p=1}^{m} s \lambda_p^{m+1-p}. \tag{13}$$

Пункт 1. Пусть J — идеал в R. Покажем, что для $r \in JyzJ$, где y, z из (12), (13) и g из (9)

$$g_1 = g(1 + r e_{jk}) g^{-1} (1 - r e_{jk}) \in E_n(R, J), \tag{14}$$

$$g_1 \in [1 + \lambda e_{12}, 1 + r e_{jk}] E_n(R, F \cap J). \tag{15}$$

Действительно, пусть $r \in J$. Из (10), (12)

$$r_1 y g_{ik} (g^{-1})_{kj} = r_3 (g^{-1})_{jj}, \tag{16}$$

где $r_3 = \lambda^2 r_1 x \in J$. Положим

$$W = g^{-1} e_{jj}; \quad V = e_{ji} r_1 y g, \tag{17}$$

$$V_1 = e_{jk} r_1 y g_{ik} - e_{jj} r_3; \quad V_2 = V - V_1. \tag{18}$$

Тогда $VW = 0$, ибо $e_{ji} g g^{-1} e_{jj} = 0$, и из (16)

$$V_1 W = 0, \quad V_2 W = (V - V_1) W = 0.$$

Тогда

$$g(1 + r_1 y e_{ji}) g^{-1} = (1 + WV) = (1 + WV_1)(1 + WV_2) \tag{19}$$

и по лемме 8 $1+WV_1$ и $1+WV_2$ лежат в $E_n(R,J)$, ибо $r_1 \in J$, $V_1, V_2 \in e_{jj}F_n$ и $V_1e_{ii} = 0$, $V_2e_{kk} = 0$. Тем самым $g(1+r_1ye_{ji})g^{-1} \in E_n(R,J)$. Далее $d \in GL_n(R,F)$, и из (18), (19) можно проследить, что

$$g(1+r_1ye_{ji})g^{-1} \in (1+\lambda e_{12})(1+r_1ye_{ji})(1-\lambda e_{12})E_n(R, F\cap J).$$

Аналогично из (10), (13) получаем, что

$$g(1+zr_2e_{ik})g^{-1} \in (1+\lambda e_{12})(1+zr_2e_{ik})(1-\lambda e_{12})E_n(R, F\cap J).$$

и значит, условие справедливо. Пункт 1 завершен.

Из (12), (13) вытекает, что yz — многочлен от λ с единичным свободным членом, зависящий от j и k. Перемножая эти многочлены в некотором порядке для всех различных пар j и k, получим из (15), что существует многочлен $h(\lambda)$ с единичным свободным членом и для $\bar{J} = Jh(\lambda)J$ и $a \in E_{\bar{J}}$ справедливо условие

$$(1+\lambda d^{-1}e_{12}d)a(1-\lambda d^{-1}e_{12}d) = (1+\lambda e_{12})a(1-\lambda e_{12})a_1, \tag{20}$$

где $a_1 \in E_n(R, F\cap J)$. Положим $K(\lambda) = Rh(\lambda)^2h(1-\lambda)h(\lambda)^2R$. Тогда из (20) для $b \in E_{K(\lambda)}$

$$(1+(1-\lambda)d^{-1}e_{12}d)b(1-(1-\lambda)d^{-1}e_{12}d) = (1+(1-\lambda)e_{12})b(1-(1-\lambda)e_{12})b_1,$$
$$b_1 \in E_n(R, (Rh(\lambda)^2R)\cap F),$$

и по лемме 9 и условию (20) получаем, что

$$\left[(1-e_{12})d^{-1}(1+e_{12})d, E_{K(\lambda)}\right] \subseteq E_n(R,F). \tag{21}$$

Мы воспользовались тем, что $(1+(1-\lambda)e_{12})b(1-(1-\lambda)e_{12})b_1 \in E_{\bar{J}}$, и равенством $1+e_{12} = (1+\lambda e_{12})(1+(1-\lambda)e_{12})$.

Пункт 2. Покажем, что $\sum_{\lambda\in P} K(\lambda) = R$. Действительно, если $\sum_{\lambda\in P} K(\lambda) \subseteq M$ и M — собственный идеал в R, $1 \notin M$, то многочлен $h(\lambda)$ ненулевой в R/M, ибо $h(0) = 1$. Тогда и $h(1-\lambda)$ ненулевой в R/M. Пусть j — наименьшее число, для которого коэффициент при $\lambda^j yh(1-\lambda)$ — ненулевой в R/M. Так как $h(0) = 1$, то коэффициент при λ^j у многочлена $h(\lambda)^2h(1-\lambda)h(\lambda)^2$ также ненулевой в R/M. Из бесконечности поля P этот многочлен отличен от нуля для некоторого $\lambda \in P$. Тем самым $K(\lambda) \nsubseteq M$. Пункт 2 завершен.

Из пункта 2 и условия (21) получаем, что

$$\left[(1-e_{12})d^{-1}(1+e_{12})d, E_n(R)\right] \subseteq E_n(R,F)$$

для всех $d \in GL_n(R,F)$. Значит,

$$[GL_n(R,F), E_n(R), E_n(R)] \subseteq E_n(R,F).$$

Предложение 10 доказано.

§ 3 Доказательство теоремы 4

Лемма 11 ([13], с. 201). *Пусть* E, C, C_1 *— подгруппы в группе* G *и* $[E, E] = E$, $[E, C] = C_1$, $[E, C_1] = \{1\}$. *Тогда* $[E, C] = \{1\}$.

Теперь приступим к доказательству теоремы 4. Пусть G — подгруппа в $GL_n(R)$, инвариантная относительно $E_n(R)$, и F — наибольший среди идеалов в R, для которых $E_n(R, F) \subseteq G$. Если $G \nsubseteq C_n(R, F)$, то по предложению 7 $(1 + \lambda e_{12})a \in G$, $\lambda \in R \setminus F$, $a \in GL_n(R, F)$ и по предложению 10 $(1 + \lambda e_{12})b \in G$, $b \in E_n(R, F)$. Тогда $b \in G$ и $E_n(R, R\lambda R) \subseteq G$, $\lambda \notin F$, что противоречит выбору F. Значит,
$$E_n(R, F) \subseteq G \subseteq C_n(R, F). \tag{22}$$

Пункт 1. Докажем, что $E_n(R)$ — нормальный делитель в $GL_n(R)$. Действительно, по предложению 10
$$\Big[GL_n(R), \underbrace{E_n(R), \ldots, E_n(R)}_{m}\Big] = E_n(R). \tag{23}$$

Пусть $a \in GL_n(R)$, $E = aE_n(R)a^{-1}$, $E_0 = GL_n(R)$, $E_k = \Big[E_0, \underbrace{E, \ldots, E}_{k}\Big]$. Из (23) $E_m = E$. Индукцией по k докажем, что $E_n(R) \subseteq E_k$. Для $k = 0$ это так. Пусть $E_n(R) \subseteq E_{k-1}$. Тогда $E_k = [E_{k-1}, E]$ и $[E_n(R), E] \subseteq E_k$. Далее, $E = E_m \subseteq E_k$. Тогда E_k содержит подгруппу G в $GL_n(R)$, порожденную E и инвариантную относительно $E_n(R)$. Из (22) $E_n(R, F) \subseteq G \subseteq C_n(R, F)$ для некоторого идеала F в R. Тогда $aE_n(R)a^{-1} = E \subseteq G \subseteq C_n(R, F)$, значит, $E_n(R) \subseteq C_n(R, F)$ и $F = R$. Тем самым $E_n(R) \subseteq G \subseteq E_k$; $E_n(R) \subseteq E_m = E = aE_n(R)a^{-1}$ и $aE_n(R)a^{-1} \subseteq E_n(R)$ для всех $a \in GL_n(R)$. Пункт 1 завершен.

Из пункта 1 и предложения 10 следует, что $E_n(R, F)$ — нормальный делитель в $GL_n(R)$, ибо $E_n(R)$ и $C_n(R, F)$ — нормальные делители в $GL_n(R)$ и коммутант нормальных делителей также нормальный делитель. Наконец, применяя лемму 11 к факторгруппе $GL_n(R)/E_n(R, F)$, из формулы (7) и условия $[C_n(R, F), E_n(R)] \subseteq GL_n(R, F)$ получаем, что $[C_n(R, F), E_n(R)] \subseteq E_n(R, F)$. Теорема 4 доказана.

Пользуясь случаем, выражаю признательность А. В. Михалёву за внимание к работе.

Литература

[1] Голубчик И. З., Марков В. Т. Локализационная размерность PI-колец // Труды сем. им. И. Г. Петровского. — М.: Изд-во МГУ, 1981. — 6. — С. 39–46.

[2] Wilson J. S. The normal and subnormal structure of general lineal groups // Proc. Cambr. Phil. SOS. — 1972. — V. 71. — № 2. — P. 163–177.

[3] Голубчик И. З. О полной линейной группе над ассоциативным кольцом // УМН. — 1973. — Т. 27. — № 3. — С. 179–180.

[4] Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1977. — Т. 41. — № 2. — С. 235–252.

[5] Туленбаев В. Н. Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка // Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1979. — Т. 86. — С. 162–169.

[6] Боревич З. М., Вавилов Н. А. Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // Тр. МИАН СССР. — 1984. — Т. 165. — С. 24–42.

[7] Vaserstein On the normal subgroups of GL_n over a ring // Springer Lecture Notes Math. 854. (Algebraic K-theory). — 1981. — P. 454–465.

[8] Голубчик И. З. О подгруппах полной линейной группы $GL_n(R)$ над ассоциативным кольцом R // УМН. — Т. 39. — № 1. — С. 125–126.

[9] Голубчик И. З. Коммутаторные формулы в группе $GL_n(R)$ над ассоциативным кольцом R // XI Всесоюзный симпозиум по теории групп. — Свердловск, 1989. — С. 35–36.

[10] Голубчик И. З., Михалёв А. В. О группе элементарных матриц над PI-кольцами // Иссл. по алгебре. — Тбилиси, 1985. — С. 20–24.

[11] Хлебутин С. Г. Некоторые свойства элементарной подгруппы // Алгебра, логика и теория чисел. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 86–90.

[12] Супруненко Д. А. Группы матриц. — М.: Наука, 1972.

[13] Басс Х. Алгебраическая K-теория. — М.: Мир, 1973.

Статья поступила в редакцию в апреле 1995 г.