УДК 514.763.8+514.764.2

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ

О. В. Мантуров

§ 0. ВВЕДЕНИЕ

Основные идеи и понятия теории мультипликативного интеграла весьма просты и естественны. Основные конструкции, связанные с мультипликативным интегралом, возникают в различных разделах математики, механики и физики. Однако нельзя сказать, что в настоящее время теория мультипликативного интеграла является «особо популярной» теорией среди советских и зарубежных математиков, хотя эта теория имеет долгую историю и довольно обширную библиографию.

Впервые мультипликативный интеграл был определен Вольтерра в конце XIX века. В начале XX века теория мультипликативного интеграла получила развитие в работе Шлезингера [21]. В 1912 году эта работа была удостоена Казанским физико-математическим обществом премии им. Н. И. Лобачевского.

В последнее время теорию мультипликативного интеграла применяют в физике (исследования по голономным квантовым полям), теории вероятностей, теории нелинейных дифференциальных уравнений (уравнения нулевой кривизны).

Различные интерпретации мультипликативного интеграла представляют собой целые математические разделы. Иногда это является удобным описанием такого раздела математики, а чаще имеет место почти тождественность. Примеры — теория систем линейных дифференциальных уравнений, теория связностей, теория уравнений в частных производных нулевой кривизны, теория «хронологической экспоненты», экспоненциальное отображение и др.

В § 1 настоящей работы дан очерк основных идей и понятий теории мультипликативного интеграла, описано в общих чертах, каким образом можно истолковать многие математические теории в терминах мультипликативного интеграла. Приведены начальные факты, начальные примеры.

По нашему мнению, игнорирование основной конструкции мультипликативного интеграла (в таких математических разделах как линейные дифференциальные уравнения, связности, хронологические экспоненты и др.) существенно обедняет возможности исследований. Общая «мультипликативная» точка зрения позволяет ставить «разумные» задачи, подсказывает некоторые подходы к решению задач и в известном смысле экономит труды по изучению предварительного материала.

Несмотря на большую универсальность идеи мультипликативного интеграла, она не занимает в настоящее время подобающего ей места в математической науке и математическом образовании.

На русском языке практически нет монографий по теории мультипликативного интеграла. В США в 1979 году вышла монография Долларда и Фридмана [20], в которой наряду с описанием многочисленных приложений мультипликативного интеграла поднят вопрос о том достойном месте, которое должно занять в математике понятие мультипликативного интеграла.

Начиная с 1982 г., было предпринято исследование ряда вопросов, которые показались нам естественными и интересными. Оказалось, что происходящие из понятий и конструкций мультипликативного интеграла задачи имеют приложения к общепризнанным вопросам. § 2, 3, 4 посвящены описанию этих исследований.

Мы выражаем уверенность в том, что фундаментальная монография, посвященная теории мультипликативного интеграла, необходимость которой очевидна, наконец, будет написана.

§ 1. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1°. Определение мультипликативного интеграла. Пусть A — произвольная ассоциативная топологическая алгебра с единицей E и $f(t)$ — функция вещественного переменного t, принимающая значения в алгебре A, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b$, $[a, b] = \{t \in \mathbf{R},\ a \leqslant t \leqslant b\}$, T — разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b$, $t_i \leqslant t_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; $l(T) = \max(t_{i+1} - t_i)$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Рассмотрим произведение

$$(E + f(t_0)\Delta t_0)(E + f(t_1)\Delta t_1)\ldots(E + f(t_n)\Delta t_n) = \Pi(f, T).$$

Если при любом изменении T, при котором $l(T) \to 0$, произведение $\Pi(f, T)$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется мультипликативным интегралом функции $f(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается через

$$\int_a^{b} E + f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Аналогичным образом по $f(t)$ и T можно построить произведение

$$(E+f(t_n)\Delta t_n)(E+f(t_{n-1})\Delta t_{n-1})\dots(E+f(t_0)\Delta t_0)$$

и, в случае существования предела этого произведения, получить другой тип мультипликативного интеграла, обозначаемый через

$$\overset{\frown}{\int\limits_a^b} E+f(t)\,dt. \tag{2}$$

В дальнейшем мультипликативные интегралы (1) и (2) будем называть соответственно прямым и обратным.

Описанные конструкции во многом аналогичны конструкции риманова интеграла. Действительно, риманов интеграл является пределом суммы большого числа слагаемых, близких к нулю, а мультипликативный интеграл равен пределу произведения большого количества сомножителей, близких к единице.

Упомянем еще об одной общей точке зрения на риманов и мультипликативный интегралы. Как в одном, так и в другом случае речь идет о пределе произведения элементов, близких к единице, только произведение понимается в разных смыслах: в римановом случае произведение понимают в смысле групповой операции сложения в аддитивной группе $\mathbf{R}$, а в случае мультипликативного интеграла произведение понимают в смысле операции в ассоциативной алгебре. С этой точки зрения главное различие между римановым и мультипликативным интегралом состоит в том, что произведение, лежащее в основе определения, является в одном случае коммутативным, а в другом — вообще говоря, некоммутативным.

Разумеется, свойства мультипликативного интеграла во многом определяются алгебраическими свойствами алгебры A, не говоря уже об ее топологических свойствах.

Рассмотрим частные случаи мультипликативного интеграла, выбрав ассоциативную алгебру A особым образом, с таким расчетом, чтобы пределы произведений (1) и (2) были бы попроще.

Пример 1. Пусть алгера A разлагается как линейное пространство в прямую сумму одномерного линейного пространства, натянутого на единичный элемент E, и дополнительного линейного пространства $\tilde{A}$, состоящего из элементов $a\in\tilde{A}$ таких, что

$$a^2=0. \tag{3}$$

Если значения функции $f(t)$ принадлежат $\tilde{A}$, то предел произведения (1) имеет вид

$$\lim_{l(T)\to 0}(E+f(t_0)\Delta t_0)(E+f(t_1)\Delta t_1)\dots(E+f(t_n)\Delta t_n)=$$

$$=\lim_{l(T)\to 0} E+\sum_{l(T)\to 0} f(t_i)\Delta t_i,$$

при этом

$$\int_a^b E+f(t)\,dt=E+\int_a^b f(t)\,dt,$$

где $\int_a^b f(t)\,dt$ означает обыкновенный риманов интеграл.

Пример 2. Пусть алгебра A коммутативна. Тогда

$$\lim_{l(T)\to 0}(E+f(t_0)\Delta t_0)(E+f(t_1)\Delta t_1)\dots(E+f(t_n)\Delta t_n)=$$

$$=\lim_{l(T)\to 0} E+\sum f(t_i)\Delta t_i+\sum_{i<j} f(t_i)\,f(t_j)\,\Delta t_i\Delta t_j+$$

$$+\sum_{i<j<k} f(t_i)\,f(t_j)\,f(t_k)\,\Delta t_i\Delta t_j\Delta t_k+\dots=\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_n,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — элементарные симметрические полиномы от переменных $f(t_0)\Delta t_0$, $f(t_1)\Delta t_1$, $f(t_2)\Delta t_2, \dots, f(t_n)\Delta t_n$. Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ — симметрические полиномы Ньютона от тех же переменных:

$$\rho_k=\sum_i [f(t_i)\Delta t_i]^k, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{l(T)\to 0}\rho_k=\begin{cases}0, & k>0,\ k\neq 1,\\ \int_a^b f(t)\,dt, & k=1.\end{cases} \tag{4}$$

Вычислим

$$\lim_{l(T)\to 0}\sigma_k,$$

разлагая полиномы σ_k по ρ_l ($k, l=1, 2, \dots, n$) и применяя равенство (4).

Известно, что

$$\rho_m-\rho_{m-1}\sigma_1+\rho_{m-2}\sigma_2+\dots+\rho_1\sigma_{m-1}(-1)^{m-1}+(-1)^m\sigma_m=0,$$
$$m=1, 2, \dots, n.$$

Отсюда следует:

$$\lim \sigma_1 = \lim \rho_1 = \int_a^b f(t)\,dt,$$

$$\lim \sigma_2 = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 \Big/ 2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim \sigma_n = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^n \Big/ n,$$

вследствие чего

$$\check{\int_a^b} E + f(x)\,dx = \exp \int_a^b f(t)\,dt. \tag{5}$$

Очевидно, что формула (5) справедлива и для некоммутативной алгебры A, если только элементы вида $f(x)$ при всевозможных x коммутируют между собой, в частности, если $f(x) = \mathrm{const}$.

Представляет интерес изучение мультипликативного интеграла в конкретных ассоциативных алгебрах. Здесь следует ожидать весьма причудливых формул, связывающих мультипликативный интеграл, структурные константы алгебры и риманов интеграл.

Пример 3. Пусть алгебра A имеет базис $\{1, e_1, e_2, f\}$ и определяющие соотношения

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x \qquad \forall x \in A$$

$$e_1 e_2 = f$$

и $x \cdot y = 0$ для всех остальных пар элементов (x, y) базиса $(1, e_1, e_2, f)$.

Пусть задана функция $f(t) = a(t)e_1 + b(t)e_2 + c(t)f$.

Произведение $\prod_{i=1}^{n} (1 + f(t_i)\Delta t_i)$ в этом случае равно

$$1 + \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i + \sum_{i<j} f(t_i) f(t_j)\,\Delta t_i \Delta t_j.$$

Легко видеть, что

$$\check{\int_a^b} E + f(t)\,dt = E + \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b \left(a(y) \int_a^y b(y)\,dy\right) dy.$$

2°. Простейшие свойства мультипликативного интеграла. Начальные конструкции мультипликативного интеграла естественно строить по аналогии с римановым интегралом.

Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\smile\!\!\int_a^x f(t)\,dt$$

с переменным верхним пределом. Обозначим его через $F(x)$. Вычислим производную $F'_x(x)$. Имеем:

$$F'(x)=\lim \frac{1}{\Delta x}\left(\smile\!\!\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\smile\!\!\int_a^x f(t)\,dt\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Big[\lim_{l(T)\to 0}(E+f(t_1)\Delta t_1)(E+f(t_2)\Delta t_2)\ldots(E+f(t_{n+1})\Delta t_{n+1})-$$

$$-(E+f(t_1)\Delta t_1)(E+f(t_2)\Delta t_2)\ldots(E+f(t_n)\Delta t_n)\Big]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{l(T)\to 0}[(E+f(t_1)\Delta t_1)(E+f(t_2)\Delta t_2)\ldots$$

$$\ldots(E+f(t_n)\Delta t_n)(E+f(t_{n+1})\Delta t_{n+1}-E)];$$

здесь $t_{n+1}=x+\Delta x$, $\Delta t_{n+1}=\Delta x$, $t_n=x$.

Имеем далее

$$F'(x)=[\lim_{l(T)\to 0}(E+f(t_1)\Delta t_1)(E+f(t_2)\Delta t_2)\ldots(E+f(t_n)\Delta t_n)]f(x$$

или

$$F'(x)=F(x)\cdot f(x). \tag{6}$$

Аналогичным образом для обратного интеграла $\frown\!\!\int_a^x E+f(t)\,dt=$ $=F(x)$ получаем

$$F'(x)=f(x)F(x). \tag{7}$$

Функции $F^{-1}(x)F'(x)$ и $F'(x)F^{-1}(x)$ называют мультипликативными производными (прямой и обратной).

Доказанные равенства являются аналогами теоремы Ньютона—Лейбница для риманова интеграла: прямая (обратная) мультипликативная производная от прямого (обратного) мультипликативного интеграла $\int_a^x E+f(t)\,dt$ по верхнему пределу x равняется значению подынтегральной функции f при $t=x$. Разумеется, при этом требуется выполнение некоторых условий непрерывности для $f(t)$.

Из ассоциативности алгебры A вытекает

$$\left(\smile\!\!\int_a^b E+f(t)dt\right)\left(\smile\!\!\int_b^c E+f(t)\,dt\right)=\smile\!\!\int_a^c E+f(t)\,dt$$

и

$$\left(\overset{\frown}{\int_b^c} E+f(t)\,dt\right)\left(\overset{\frown}{\int_a^b} E+f(t)\,dt\right)=\overset{\frown}{\int_a^c} E+f(t)\,dt,$$

вследствие чего справедливы формулы

$$\overset{\smile}{\int_a^b} E+f(t)\,dt=F^{-1}(a)\cdot F(b), \tag{8}$$

$$\overset{\frown}{\int_a^b} E+f(t)\,dt=F(b)\cdot F^{-1}(a) \tag{9}$$

— аналоги формул Ньютона—Лейбница.

Пусть $F(x)$ — первообразная для мультипликативного интеграла $\overset{\smile}{\int} E+f(t)\,dt$, т. е. функция вещественного переменного со значениями в алгебре A такая, что выполняются равенства (8) (прямой мультипликативный интеграл) или (9) (обратный мультипликативный интеграл). Тогда первообразной функцией будет также $CF(x)$ (прямой мультипликативный интеграл) или $F(x)C$ (обратный мультипликативный интеграл). Здесь C — произвольный обратимый элемент в A. При этом всякая первообразная функция имеет вид $CF(x)$ или $F(x)C$ при подходящем обратимом элементе C.

3°. Мультипликативный интеграл и система линейных дифференциальных уравнений. Пусть $A=\mathrm{Mat}(n)$ — алгебра всех вещественных квадратных $n\times n$ матриц с операцией умножения матриц. Мультипликативный интеграл

$$\int_a^x E+f(t)\,dt \tag{10}$$

является функцией $F(x)$, принимающей матричные значения и удовлетворяющей уравнениям

$$F'(x)=F(x)f(x),\quad F'(x)=f(x)F(x) \tag{11}$$

соответственно для прямого и обратного мультипликативного интегралов. Рассмотрим для определенности уравнение

$$F'(x)=f(x)F(x), \tag{12}$$

где $f(x)$ — заданная, а $F(x)$ — искомая матричные функции. Каждый из столбцов $\bar{y}(x)$ матрицы $F(x)$ является решением векторной системы уравнений

$$\bar{y}'(x)=f(x)\bar{y}(x). \tag{13}$$

Таким образом, вычисление мультипликативного интеграла (10) (т. е. первообразной функции $F(x)$ (обратной)) эквивалентно решению системы линейных уравнений (13).

Среди всех решений уравнения (12) часто выделяют такое, которое при $x=x_0$ имеет значение E.

Аналогичным образом можно описать связь между прямым мультипликативным интегралом и системой линейных дифференциальных уравнений.

В [2] дано изложение начальных конструкций мультипликативного интеграла, [20] представляет собой обстоятельную монографию, содержащую большое количество приложений мультипликативного интеграла.

4°. Мультипликативный интеграл и задачи классификации. Пусть $C(x)$ — произвольная функция вещественного переменного со значениями в ассоциативной топологической алгебре A. Если $f(x)$ — обратная мультипликативная производная некоторой функции $F(x)$, то мультипликативная производная функции $C(x)F(x)$ имеет вид:

$$[C'(x)F(x)+CF'(x)][C(x)F(x)]^{-1}=[C'(x)F(x)+$$
$$+CF'(x)]F^{-1}(x)\cdot C^{-1}(x)=C'(x)F(x)F^{-1}(x)C^{-1}(x)+$$
$$+CF'(x)F^{-1}(x)C^{-1}(x)=C'(x)C^{-1}(x)+C(x)f(x)C^{-1}(x).$$

Можно сказать, что преобразования

$$F(x)\to C(x)F(x) \tag{14}$$

порождают преобразования прямой мультипликативной производной

$${}^{\smile}T_C: f(x)\to C'C^{-1}+CfC^{-1}, \tag{15}$$

так что группа всех обратимых функций $C(x)$ (т. е. гладких функций вещественного переменного x, принимающих обратимые значения в алгебре A) действует на пространстве функций $F(x)$ и на линейном пространстве функций $f(x)$ по формулам (14) и (15).

Аналогичным образом можно определить действие

$$F(x)\to F(x)C(x), \tag{16}$$
$${}^{\smile}T_C: f(x)\to C^{-1}fC+C^{-1}C'. \tag{17}$$

Преобразования (15), (17) называются калибровочными преобразованиями (для обратного и прямого мультипликативного интеграла). Эти преобразования обладают свойством

$${}^{\frown}T_{C_1C_2}={}^{\frown}T_{C_1}\cdot{}^{\frown}T_{C_2} \tag{18}$$
$${}^{\smile}T_{C_2C_1}={}^{\smile}T_{C_2}\cdot{}^{\smile}T_{C_1}. \tag{19}$$

Действительно,

$${}^{\frown}T_{C_1C_2}f=C_1C_2fC_2^{-1}C_1^{-1}+(C_1'C_2+C_1C_2')C_2^{-1}C_1^{-1}=$$
$$=C_1C_2fC_2^{-1}C_1^{-1}+C_1'C_1^{-1}+C_1C_2'C_2^{-1}C_1^{-1},$$
$${}^{\frown}T_{C_2}f=C_2fC_2^{-1}+C_2'C_2^{-1},$$

$$T_{C_1}T_{C_2}f = C_1(C_2fC_2^{-1} + C_2'C_2^{-1})C_1^{-1} + C_1'C_1^{-1} =$$
$$= C_1C_2fC_2^{-1}C_1^{-1} + C_1C_2'C_2^{-1}C_1^{-1} + C_1'C_1^{-1},$$

из чего следует (18).

Аналогичным образом можно доказать равенство (19).

Итак, множество X всех функций $f(x)$ вещественного переменного x со значениями в ассоциативной топологической алгебре A с единицей можно рассматривать как G-пространство, где G — группа всех функций $C(x)$ действительного переменного x, принимающих значение во множестве обратимых элементов A^* алгебры A, а действие определено формулой (15).

Стандартным образом пространство X делится на орбиты, определяемые действием группы G. Элементы, принадлежащие одной орбите, будем называть эквивалентными. Задача классификации орбит в G-пространстве является, согласно Эрлангенской программе Клейна, основной задачей геометрии. Введенное выше G-пространство X позволяет поставить конкретную задачу классификации, а также порождает множество новых $\tilde{G}$-пространств $\tilde{X}$, для которых $\tilde{X}$ является подмножеством в X, а $\tilde{G}$ — некоторая подгруппа группы G. Для этих новых G-пространств задачи классификации являются содержательными и характеризуются интересными геометрическими свойствами.

5°. Мультипликативный интеграл в алгебре дифференциальных операторов. Пусть A — алгебра дифференциальных операторов, действующих в пространстве функций $\varphi(u)$, определенных на действительной оси u. Всякий элемент $a \in A$ имеет вид:

$$a = \rho_0(u) + \rho_1(u)\frac{d}{du} + \rho_2(u)\frac{d^2}{du^2} + \ldots + \rho_n(u)\frac{d^n}{du^n}; \qquad (20)$$

здесь $\rho_i(u)$ — скалярные функции переменного u. Умножение дифференциальных операторов в алгебре A определяется как суперпозиция этих операторов.

Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\int_0^x E + \frac{\partial}{\partial u}\,dt. \qquad (21)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial u}$ — элемент вида (20) из A, его можно рассматривать как функцию вещественного переменного t, принимающую постоянное значение $\frac{\partial}{\partial u}$ в A. Как было отмечено в 1°, при постоянной подынтегральной функции имеет место формула (5), следовательно

$$\int_0^x E+\frac{\partial}{\partial u}\,dt=\exp\, x\frac{\partial}{\partial u}=1+x\frac{\partial}{\partial u}+$$

$$+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial u^n}+\ldots. \qquad (22)$$

Таким образом, мультипликативный интеграл $F(x)$ как функция вещественного переменного x со значениями в алгебре дифференциальных операторов есть оператор в правой части (22), который действует на функцию $\varphi(u)$ следующим образом:

$$F(x)\,\varphi(u)=\varphi(u)+x\frac{\varphi'(u)}{1!}+\frac{x^2}{2!}\varphi''(u)+\ldots+\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(u)+\ldots=$$

$$=\Sigma x^k\frac{\varphi^{(k)}(u)}{k!}=\varphi(x+u), \qquad (23)$$

т. е. аналитическая функция $\varphi(x)$ под действием $F(x)$ переходит в $\varphi(x+u)$.

Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\int_0^x E+\frac{d^2}{du^2}\,dt. \qquad (24)$$

Согласно формуле (5),

$$\int_0^x E+\frac{\partial^2}{\partial u^2}\,dt=\exp\, x\frac{d^2}{du^2}.$$

Как действует оператор $x\frac{d^2}{du^2}=F(x)$? Поскольку этот оператор удовлетворяет уравнению

$$F'_x=\frac{\partial^2}{\partial u^2}F(x),$$

то для всякой достаточно гладкой функции $\varphi(u)$ имеем:

$$F'_x\varphi(u)=\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}F(x)\right)\varphi(u),\quad (F(x)\,\varphi(u))'_x=\frac{\partial^2\,(F(x)\,\varphi(u))}{\partial u^2},$$

так что $f(x,\ u)=F(x)\,\varphi(u)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \qquad (25)$$

и «начальному условию»

$$f(0,\ u)=\varphi(u). \qquad (26)$$

Хотя решение уравнения теплопроводности (25) не определено однозначно «начальным условием», все же для достаточно «хороших» функций $\varphi(u)$ из всех решений этого уравнения с условием (26) можно выделить вполне определенное, а именно

$$f(x, u)=\exp x\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u).$$

Рассмотренные примеры показывают, что существенные черты конструкции мультипликативного интеграла естественным образом проявляют себя в задачах, связанных с уравнениями математической физики. По-видимому, решение уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial f}{\partial x}=L(u, x)f, \tag{27}$$

где $L\left(\frac{\partial}{\partial u}, x\right)$ — функция вещественного переменного x со значениями в алгебре дифференциальных операторов, действующих на функции $\varphi(u)$ переменного u, можно исследовать, изучая соответствующий мультипликативный интеграл. Если дифференциальные операторы $L(u, x_1)$ и $L(u, x_2)$ перестановочны при любых x_1 и x_2, то имеет место формула (5). Если алгебра A близка к коммутативной в каком-либо естественном смысле, то, исследуя произведение

$$(E+f(t_1)\Delta t_1)(E+f(t_2)\Delta t_2)\ldots(E+f(t_n)\Delta t_n)$$

или

$$(E+f(t_n)\Delta t_n)(E+f(t_{n-1})\Delta t_{n-1})\ldots(E+f(t_1)\Delta t_1),$$

можно получить некоторую информацию о решении уравнения (27) (ср. пример 3.1°).

В заключение пункта 5° отметим, что рассмотренные в нем вопросы трактуются в терминах хронологического исчисления (см., например, [1]). Так, если дифференциальный оператор L задан векторным полем, то решение уравнения $\frac{d}{dt}A_t=A_t\circ L$, при условии $A|_{t=0}=id$, называется правой хронологической экспонентой и обозначается $\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t L d\tau$. Аналогичный смысл имеет левая хронологическая экспонента, обозначаемая через $\overleftarrow{\exp}\int\limits_0^t L d\tau$; последняя связана с уравнением $\frac{d}{dt}B_t=L\circ B_t$. Однако в этой теории обычно не обращают внимание на определение, данное в 1°.

6°. Криволинейный мультипликативный интеграл. Рассмотрим выражение

$$\smile\!\!\int E+P(x, y)dx+Q(x, y)dy, \tag{28}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — функции двух вещественных переменных со значениями в алгебре $\mathrm{Mat}(n)$ матриц $n\times n$ с операцией матричного умножения.

Если на плоскости переменных x, y дана кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b], \tag{29}$$

то, подставляя x, y из (29) в (28), получим:

$$\smile\!\!\int E + [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt, \tag{30}$$

что представляет собой прямой мультипликативный интеграл. Аналогичным образом можно получить обратный мультипликативный интеграл из выражения

$$\frown\!\!\int E + P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{31}$$

и кривой на плоскости x, y.

Можно рассмотреть и более общий случай выражений

$$\smile\!\!\int E + \Sigma P_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)dx^i, \quad \frown\!\!\int E + \Sigma P_i(x^1, \ldots, x^n)dx^i \tag{32}$$

и кривой

$$x^i = x^i(t)$$

в n-мерном пространстве переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Как и в плоском случае, выражения (32) обращаются в мультипликативный интеграл, если переменные x^i связаны условиями $x^i = x^i(t)$, т. е. если точки $(x^1, \ldots, x^n)$ принадлежат заданной гладкой кривой.

Будем называть выражения (32) криволинейным мультипликативным интегралом.

Уместно сравнить структуру мультипликативного интеграла и параллельного перенесения векторов, определенного какой-либо связностью.

Если некоторый вектор параллельно переносится вдоль кривой относительно заданной связности, то кривая γ разбивается на мелкие кусочки, на каждом из которых параллельное перенесение вектора состоит в преобразовании этого вектора с помощью некоторого линейного оператора, близкого к тождественному оператору. Параллельное перенесение вдоль «макроскопического» куска кривой может быть (приближенно) описано линейным преобразованием, представляющим собой суперпозицию большого количества линейных операторов, близких к тождественному, соответствующих каждому малому куску в разбиении кривой. Таким образом точное описание параллельного перенесения вектора задается как предел произведения большого числа линейных операторов, близких к единичному, примененного к исходному вектору.

Из этих рассуждений видно, что понятие параллельного переноса векторов тесно связано с понятием криволинейного мультипликативного интеграла (обратного). Разница между этими понятиями состоит только в том, что криволинейный мультипликативный интеграл является пределом произведения операторов, близких к тождественному, а параллельно перенесенный вектор есть результат применения этого предела к исходному вектору.

Если же вместо одного вектора рассмотреть параллельное перенесение нескольких векторов, составляющих базис некоторого линейного пространства, и следить за матрицей перенесения этого базиса и базисом перенесенных векторов, то, как легко видеть, эта матрица будет матрицей линейного оператора, равного рассматриваемому (обратному) криволинейному интегралу. Так что с этой точки зрения криволинейный мультипликативный интеграл и связность являются эквивалентными (если не сказать — тождественными) понятиями.

Разумеется, тот факт, что определение параллельного перенесения связано с суперпозицией большого числа линейных операторов, близких к тождественному, широко известен. Однако большинство исследований по теории связностей используют этот факт неявно, т. е. только лишь посредством анализа соответствующей системы дифференциальных уравнений. (Как было упомянуто в 3°, мультипликативный интеграл действительно определяет некоторую систему дифференциальных уравнений).

По-видимому, толкование связности как криволинейного мультипликативного интеграла является разумной и естественной точкой зрения. Действительно, конструкция криволинейного мультипликативного интеграла является естественной общематематической конструкцией. Благодаря этой общей точке зрения, можно рассматривать связности в ассоциативных алгебрах более сложных, чем $\mathrm{Mat}(n)$. При этом возникают интересные геометрические аналоги, появляются возможности эвристических соображений и единого описания различных ситуаций.

7°. Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла. Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл

$$\frown\!\!\int E+\Sigma P_i dx^i \tag{33}$$

и замкнутую гладкую кривую γ:

$$x^i=x^i(t),\quad t\in[t_0,\ t_1], \tag{34}$$

в пространстве переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Вычислим приближенно этот интеграл в предположении, что кривая имеет небольшую длину и ограничивает двумерную поверхность S небольшой площади ΔS. Для простоты будем считать, что вся кривая принадлежит некоторому двумерному линейному пространству L, содержащему векторы $\overline{x'}(t_0)$ и $\overline{x'}(t_1)$. При этих условиях мультипликативный интеграл

$$F(t)=\frown\!\!\int_{t_0,\gamma}^{t} E+\Sigma P_i dx^i \tag{35}$$

будет обладать свойствами:

$$F(t_0)=E,\ F(t_1)=E+\Delta F, \tag{36}$$

где ΔF — линейный оператор, близкий к нулевому, причем существует предел

$$K=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{37}$$

Линейный оператор K называется кривизной криволинейного мультипликативного интеграла в точке $x^i=x^i(0)$, $i=1, 2, \ldots, n$, и в двумерном направлении, которое определено двумерным линейным подпространством L и лежащей в нем кривой γ. Очевидно, что при истолковании криволинейного мультипликативного интеграла как связности построенный линейный оператор K является аффинором, координаты которого могут быть получены из координат тензора $R^i{}_{jkl}$ кривизны заданной связности после свертывания $R^i{}_{jkl}$ с бивектором, характеризующим двумерное направление.

Приведем вычисление кривизны криволинейного мультипликативного интеграла вида

$$\frown\!\!\int E+P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy \tag{38}$$

вдоль прямоугольника (x_0, y_0), $(x_0+\Delta x,\ y_0)$, $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, $(x_0,\ y_0+\Delta y)$, (x_0, y_0).

Как было доказано, вычисление мультипликативного интеграла

$$F(x)=\overset{\frown}{\int_0^x} E+f(t)\,dt \tag{39}$$

сводится к решению дифференциального уравнения

$$F'(x)=f(x)F(x),\ F(0)=E. \tag{40}$$

Легко проверить, что (при соблюдении некоторых условий гладкости и сходимости)

$$\begin{aligned} F(x)=E&+\int_0^x f(t)\,dt\int_0^t f(t)\,dt+\\ &+\int_0^x f(t)\,dt\int_0^t f(t)\,dt\int_0^t f(t)\,dt+\ldots\\ \ldots&+\int_0^x f(t)\,dt\int_0^t f(t)\,dt\ldots\int_0^t f(t)\,dt+\ldots. \end{aligned} \tag{41}$$

Интегралы в правой части этого равенства являются римановыми, и каждое слагаемое в правой части понимается как результат последовательного интегрирования.

Рассмотрим мультипликативный интеграл вида

$$\int_{x}^{x+\Delta x} E+f(t)\,dt, \tag{42}$$

где Δx — малые числа.

Вычисляя этот интеграл с помощью формулы (41) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем Δx^2, имеем:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} E+f(t)\,dt=E+f(x)\Delta x+ \\ +\frac{f^2(x)+f'(x)}{2}\Delta x^2. \tag{43}$$

Полученную формулу применим для вычисления мультипликативного интеграла (38) по каждому из четырех сторон прямоугольника

$$\gamma_1:(x,y)-(x+\Delta x,y);\ \gamma_2:(x+\Delta x,y)-(x+\Delta x,y+\Delta y);$$

$$\gamma_3:(x+\Delta x,y+\Delta y)-(x,y+\Delta y);\ \gamma_4:(x,y+\Delta y)-(x,y).$$

Имеем по отрезку γ_1 $(dy=0)$:

$$F_1=\int_{x}^{x+\Delta x} E+P(t,y)\,dt=E+P(x,y)\Delta x+\frac{P^2+P_x}{2}\Delta x^2, \tag{44}$$

по второму отрезку γ_2 $(dx=0)$:

$$F_2=\int_{y}^{y+\Delta y} E+Q(x+\Delta x,t)\,dt=E+Q(x+\Delta x,y)\Delta y+ \\ +\frac{Q^2+Q_y}{2}\Delta y^2=E+Q(x,y)\Delta y+Q_x\Delta x\Delta y+\frac{Q^2+Q_y}{2}\Delta y^2, \tag{45}$$

по третьему отрезку γ_3 $(dy=0)$:

$$F_3=\int_{x+\Delta x}^{x} E+P(x+\Delta x,y+\Delta y)\,dt=$$

$$=E+P(x+\Delta x,y+\Delta y)(-\Delta x)+\frac{P^2+P_x}{2}\Delta x^2=$$

$$=E-P(x,y)\Delta x-P_x\Delta x^2-P_y\Delta x\Delta y+\frac{P^2+P_x}{2}\Delta x^2, \tag{46}$$

по четвертому отрезку γ_4 $(dx=0)$:

$$F_4 = \widehat{\int_{y+\Delta y}^{y}} E + Q(x, y+\Delta y)\,dt = E - Q(x, y+\Delta y)\,\Delta y +$$

$$+ \frac{Q^2+Q_y}{2}\Delta y^2 = E - Q\Delta y - Q_y \Delta y^2 + \frac{Q^2+Q_y}{2}\Delta y^2. \qquad (47)$$

Мультипликативный интеграл (38), с точностью до бесконечно малых второго порядка малости, равен $F_4F_3F_2F_1$. Используя (43)—(47), имеем:

$$F = F_4F_3F_2F_1 =$$

$$= \left(E - Q\Delta y - Q_y\Delta y^2 + \frac{Q^2+Q_y}{2}\Delta y^2\right)\left(E - P(x, y)\,\Delta x -\right.$$

$$\left. - P_x\Delta x^2 - P_y \Delta x \Delta y + \frac{P^2+P_x}{2}\Delta x^2\right)\left(E + Q\Delta y + Q_x \Delta x \Delta y +\right.$$

$$\left. + \frac{Q^2+Q_y}{2}\Delta y^2\right)\left(E + P\Delta x + \frac{P^2+P_x}{2}\Delta x^2\right) =$$

$$= E + [Q_x - P_y - (PQ - QP)]\Delta x \Delta y. \qquad (48)$$

Таким образом, формула (37) доказана для частного случая криволинейного мультипликативного интеграла, более того, согласно (48),

$$K = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - [P, Q]. \qquad (49)$$

Пусть Γ^i_{jk}, $i, j, k = 1, 2$, означают коэффициенты некоторой аффинной связности на двумерном пространстве аффинной связности; пусть $\widetilde{\Gamma}_1$ и $\widetilde{\Gamma}_2$ означают матрицы 2×2 с элементами Γ^i_{1j}, Γ^i_{2j}, соответственно. Рассмотрим

$$\widehat{\int} E + P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \qquad (50)$$

где $P = \widetilde{\Gamma}_1$, $Q = \widetilde{\Gamma}_2$.

Легко убедиться в том, что координаты $R^i{}_{jkl}$ тензора рассматриваемой аффинной связности обладают свойством

$$R^i_{12j} = \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} - [\Gamma_1, \Gamma_2]\right)^i_j. \qquad (51)$$

Всякий криволинейный мультипликативный интеграл вида (33) превращается в интеграл вида (38), (50) от двух переменных, если зафиксировать постоянными значениями все x^i, за исключением двух. Тогда справедливы формулы:

$$K_{rs} = \frac{\partial P_s}{\partial x^r} - \frac{\partial P_r}{\partial x^s} - [P_r, P_s], \qquad (52)$$

где r, s — номера незафиксированных переменных x^r, x^s, а кривизна (т. е. линейный оператор K_{rs}) в двумерном направлении

r, s в системе координат x^i, имеет координатами числа

$$(K_{rs})^i_j = \left(\frac{\partial P_s}{\partial x^r} - \frac{\partial P_r}{\partial x^s} - [P_r, P_s]\right)^i_j = R^i_{rsj} \tag{53}$$

где $R^i{}_{rsj}$ — компоненты тензора кривизны аффинной связности, для которой коэффициенты связности Γ^i_{jk}, i, j, k, $= 1, 2, \ldots, n$, совпадают с координатами $(P_j)_k{}^i$ линейного оператора P_j.

Таким образом, кривизна аффинной связности и кривизна криволинейного интеграла, соответствующего этой связности, являются эквивалентными понятиями (если не тождественными). Различие в этих понятиях заключается лишь в терминах, положенных в основу описания — параллельный перенос для аффинной связности и предел произведения линейных операторов, бизких к тождественному.

8°. **Потенциал для криволинейного мультипликативного интеграла нулевой кривизны.** Если кривизна криволинейного мультипликативного интеграла

$$\widehat{\int} E + \sum_{i=1}^{n} P_i dx^i \tag{54}$$

равна нулю, т. е.

$$K_{pq} = 0, \quad p, q = 1, 2, \ldots, n, \tag{55}$$

то существует такая функция $\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ со значениями в топологической ассоциативной алгебре A, называемая потенциалом, что

$$P_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \Phi^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{56}$$

Верно и обратное: криволинейный мультипликативный интеграл (54) при условии (56) имеет кривизну, равную нулю.

Сформулированное утверждение аналогично известному свойству криволинейного риманова интеграла: интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю и обратно — если всякий интеграл по замкнутому контуру равен нулю, то (при соблюдении условий «гладкости и односвязности») подынтегральное выражение является полным дифференциалом.

Укажем основную идею доказательства обсуждаемого свойства криволинейного мультипликативного интеграла. Если кривизна равна нулю, то интегрирование по двум кривым, совпадающим на всем своем протяжении, включая начальную и конечную точки, за исключением маленького участка, где эти кривые немного отличаются друг от друга, приводит к одному и тому же результату. Отсюда следует, что значения криволинейных мультипликативных интегралов по двум кривым, соединяющим точки A и B, совпадают между собой, если одну из кривых можно непрерывно перетянуть в другую так, чтобы в процессе гомотопии подынтегральное выражение обладало бы необходимыми свойствами гладкости. Основываясь на указанном свойстве независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, определим функцию $\Phi(x^1, \ldots, x^n)$ формулой

$$\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \overset{\frown}{\int_A^X} E + \sum_{i=1}^n P_i dx^i, \qquad (57)$$

где A — фиксированная, а X — текущая точка в пространстве переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и интегрирование ведется по (произвольной) кривой γ, соединяющей точки A и X; $a^1, a^2, \ldots, a^n$ и $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — координаты точек A и X.

Покажем, что функция Φ удовлетворяет условию (56). Примем во внимание такой факт: если Φ удовлетворяет условию $\Phi'_{x_i}\Phi^{-1} = P_i$, то этим же свойством обладает $\tilde{\Phi} = \Phi C$, где C — функция переменных $x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n$; в самом деле, $\tilde{\Phi}'_{x_i}\tilde{\Phi}^{-1} = (\Phi C)'_{x_i} C^{-1}\Phi^{-1} = \Phi'_{x_i}\Phi^{-1}$.

Для проверки равенства $\Phi'_{x_i}\Phi^{-1} = P_i$ для данного i выберем кривую γ в (57) следующим образом: кривая γ состоит из прямолинейных отрезков в пространстве переменных $x^1, \ldots, x^n$, причем все координаты точек j-го отрезка постоянны, за исключением j-ой координаты, которая изменяется от a^j до x^j. Первые $n-1$ отрезков, составляющих кривую γ, выберем произвольно, а последним отрезком в γ будем считать i-ый, т. е. тот, где i-ая координата изменяется от a^i до x^i. Мультипликативный интеграл $\hat{\Phi}$ (57) по i-ому отрезку γ_i очевидно обладает свойством $\hat{\Phi}'_{x_i}\hat{\Phi}^{-1} = P_i$. Что же касается мультипликативного интеграла Φ (57) по кривой γ, то имеет место равенство

$$\Phi = \hat{\Phi} C,$$

где C — функция переменных $x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n$. В силу отмеченного выше свойства, функция Φ обладает свойством $\Phi'_{x_i}\Phi^{-1} = P_i$. Обратно, если $P_i = \Phi'_{x_i}\Phi^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и для некоторой функции Φ, то

$$K_{rs} = \frac{\partial P_s}{\partial x_r} - \frac{\partial P_r}{\partial x_s} - [P_r P_s] = \Phi''_{x_s x_r}\Phi^{-1} + \Phi'_{x_s}\Phi^{-1}\left(-\Phi'_{x_r}\right)\Phi^{-1} +$$
$$+ \Phi'_{x_r}\Phi^{-1}\left(-\Phi'_{x_s}\right)\Phi^{-1} - \Phi''_{x_r x_s}\Phi^{-1} - \Phi'_{x_r}\Phi^{-1}\Phi'_{x_s}\Phi^{-1} +$$
$$+ \Phi'_{x_s}\Phi^{-1}\Phi'_{x_r}\Phi^{-1} = 0.$$

9°. Уравнения нулевой кривизны. В последние 30 лет большой интерес математиков был вызван исследованиями некоторых видов нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В основном это те уравнения, которые могут быть описаны следующим образом.

Пусть $L(x, t, u)$, $P(x, t, u)$ — две функции переменных x, t, u со значениями в кольце дифференциальных операторов, действующих на функции переменного x. Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл

$$\int^{\frown} E + L dt + P dx, \tag{58}$$

где u — некоторая скалярная функция переменных x, t. Для всякой гладкой функции $u(x, t)$ можно рассмотреть кривизну криволинейного мультипликативного интеграла — функцию Φ, определенную равенством (49) и принимающую свои значения в кольце A дифференциальных операторов.

Для некоторых функций $u(x, t)$ кривизна интеграла оказывается равной нулю. Для того чтобы кривизна интеграла равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы функция u удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial t} - [P, L] = 0, \tag{59}$$

которое в специальных случаях, представляющих особый интерес, является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. Частным случаем рассмотренной ситуации является уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial x} = [P, L] \tag{60}$$

$\left(\text{случай } \frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$.

Наиболее исследованным нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных является уравнение Кортевега — де Фриза. Это уравнение получается описанным выше способом при

$$L = -\partial_x^2 + u(x, t), \quad P = 4\partial_x^3 - 3(2u\partial_x + u'_x).$$

Условие (60) при этом принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0. \tag{61}$$

При исследовании уравнения Кортевега — де Фриза применяются основные понятия и теоремы теории мультипликативного интеграла.

Уравнения нулевой кривизны изучаются в [9], [10], [11].

10°. Уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой. Как известно, при движении твердого тела вокруг закрепленной неподвижной точки при отсутствии внешних сил в каждый момент времени справедливо соотношение

$$\frac{dM}{dt} = [M, \Omega], \tag{62}$$

где M — вектор кинетического момента тела, а Ω — вектор угловой скорости. Векторы трехмерного евклидова пространства находятся во взаимно однозначном соответствии с кососимметрическими матрицами:

$$\alpha: xe_1+ye_2+ze_3 \to \begin{pmatrix} 0 & -x & y \\ x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

При этом отображение α обладает свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \alpha g(x)=g\alpha(x)g^{-1}, \\ &2)\ \alpha([x, y])=\alpha(x)\alpha(y)-\alpha(y)\alpha(x), \end{aligned} \tag{64}$$

где g — произвольная ортогональная матрица с определителем единица, а [,] означает векторное произведение.

С учетом указанных свойств уравнение (61) можно переписать в матричном виде:

$$\frac{dM}{dt}=M\cdot\Omega-\Omega\cdot M, \tag{65}$$

где для краткости $\alpha(M)$ и $\alpha(\Omega)$ обозначены через M и Ω.

Условие (65) совпадает с условием равенства нулю кривизны мультипликативного интеграла

$$\widehat{\int} E+\Omega dt+Mdy, \tag{66}$$

где матрица Ω не зависит от y.

Более того, движение твердого тела с закрепленной точкой под действием внешних сил, сумма моментов которых относительно закрепленной точки равна N, описывается уравнением:

$$\frac{dM}{dt}-[M, \Omega]=N. \tag{67}$$

Если вектор-функции M, Ω, N толковать как матричные функции $\alpha(M)$, $\alpha(\Omega)$, $\alpha(N)$, то закон движения твердого тела можно будет сформулировать так: сумма моментов внешних сил равна кривизне мультипликативного интеграла (66).

Таким образом, естественная геометрическая конструкция кривизны мультипликативного интеграла явным образом входит в описание важной задачи механики.

§ 2. О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

1°. В этом параграфе будет изложено решение следующей задачи, связанной с мультипликативным интегралом.

Пусть $A(x)$ — функция вещественого аргумента x со значениями в $\mathrm{Mat}(n)$ — ассоциативной алгебре матриц порядка n.

При изучении риманова интеграла в качестве первой (простейшей) формулы обычно рассматривают

$\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)+C$, где n — целое.

По аналогии с указанным случаем естественно рассмотреть

$$\int_0^t E+f(t)\,dt=F(t) \tag{1}$$

при условии, что $f(t)$ есть полином от переменного t. Любопытно было бы знать для каких функций $f(t)$ мультипликативный интеграл $F(t)$ будет также полиномом.

Поскольку равенство (1) эквивалентно равенствам

$$F_t'=f\cdot F,\ F(0)=E, \tag{2}$$

то

$$f=F_t'F^{-1}. \tag{3}$$

Если F — полином от t, то F_t' также является полиномом; что же касается F^{-1}, то, как известно,

$$(F^{-1})_{ij}=A_{ji}/\det F \tag{4}$$

(здесь $(F^{-1})_{ij}$ — элемент с номером ij матрицы F^{-1}, A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента с номером ij в матрице F). Из (4) следует, что f в (3) является полиномом тогда и только тогда, когда $\det F=\text{const}$, т. е. с учетом (2), $\det F=1$. При этом след матрицы F равен нулю.

Можно более подробно и точно ответить на поставленный вопрос в случае, если $n=2$, т. е. алгебра A состоит из матриц размера 2×2.

Согласно известной теореме о полиномиальных матрицах, всякая такая матрица элементарными преобразованиями может быть сведена к диагональной

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где полином p_2 делится на полином p_1. Поскольку полиномиальная матрица $F(x)$ имеет определитель единица, то $p_1=p_2=1$, т. е. матрица (5) является единичной.

Известно также, что всякое элементарное преобразование над некоторой матрицей X есть умножение X слева или справа на матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где q — некоторый полином, или есть перестановка строк или столбцов матрицы X. В последнем случае элементарное преобразование матрицы X состоит в умножении этой матрицы на $\Theta=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ слева или справа.

С учетом вышесказанного матрица F имеет вид:

$$F = Q_n \Theta Q_{n-1} \Theta \dots Q_1 \tag{7}$$

или

$$F = \Theta Q_n \Theta \dots Q_1 \quad F = Q_n \Theta Q_{n-1} \Theta \dots Q_1 \Theta$$

$$F = \Theta Q_n \Theta Q_{n-1} \dots \Theta, \tag{8}$$

где

$$Q_i = \begin{pmatrix} 1 & q_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

и q_i — произвольный полином от x.

Очевидно, что достаточно ограничиться одним из случаев (7), (8), поскольку прямые мультипликативные производные функций F и $F\Theta$ совпадают ($F'F^{-1} = F'\Theta(F\Theta)^{-1} = F'\Theta\Theta F^{-1}$). Что же касается прямых мультипликативных производных $F'F^{-1}$ и $\Theta F' \cdot (\Theta F)^{-1}$ от функций F и ΘF, то они связаны простым соотношением

$$F'F^{-1} = \Theta[\Theta F'(\Theta F)^{-1}]\Theta. \tag{9}$$

Таким образом, всякая полиномиальная матричная функция, мультипликативный интеграл от которой является полиномиальной функцией, имеет вид $f = F'F^{-1}$ или $f = \Theta F'F^{-1}\Theta$, где

$$F = P_n P_{n-1} \dots P_1 \tag{10}$$

и

$$P_i = \begin{pmatrix} p_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Представляет интерес вычисление полиномиальных матриц f при различных n и конкретных полиномах p_i.

2°. Будем говорить, что полиномиальная матрица $F(x)$ принадлежит множеству S_n, если всякое представление матрицы $F(x)$ в виде (10) содержит не менее n сомножителей и существует представление $F(x)$, содержащее ровно n сомножителей.

Чем больше индекс n у множества S_n, тем сложнее матрицы $F(x)$ и $f(x) = F'(x)F^{-1}(x)$, тем более сложным выглядит пример системы дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и пространством решений, состоящим из полиномов.

Ниже будет построен мультипликативный интеграл

$$F(x) = \widehat{\int_0^x} E + f(x)\,dx, \tag{12}$$

в котором $F(x)$, $f(x)$ — матричные полиномиальные функции и $F(x) \in S_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Для этой цели сначала докажем следующее утверждение.

Лемма. Полиномиальная матрица

$$T_m=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m \tag{13}$$

принадлежит подмножеству S_m, $m=0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — переменные. Положим

$$q(\varnothing)=0,\ q(0)=1,\ q(0, 1)=p_1,\ q(0, 1, \ldots, n)=$$
$$=p_n q(0, 1, \ldots, n-1)+q(0, 1, \ldots, n-2), \quad n=2, 3, \ldots,$$
$$q(0, 2)=p_2,$$
$$q(0, 2, \ldots, n)=p_n q(0, 2, \ldots, n-1)+q(0, 2, \ldots, n-2),$$
$$n=2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$\begin{pmatrix} 1 & p_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Theta\begin{pmatrix} 1 & p_{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Theta\ldots\begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Theta=\begin{pmatrix} p_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} q(0, 1, \ldots, n) & q(0, 2, 3, \ldots, n) \\ q(0, 1, \ldots, n-1) & q(0, 2, 3, \ldots, n-1) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Матрицу (15) будем обозначать через $Q(0, 1, 2, \ldots, n)$. Если

$$p_1(x)=p_2(x)=\ldots=p_n(x)=x,$$

то

$$T_m=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $F_{-1}(x)=0$, $F_0(x)=0$, $F_n(x)=xF_{n-1}(x)+F_{n-2}(x)$, $n=1, 2, \ldots$ (степень многочлена $F_n(x)$ равна $n-1$, $\deg F_n=n-1$). Очевидно, что

$$Q(0, 1, 2, \ldots, n)|_{p_1=p_2=\ldots=p_n=x}=T_n,\ n=0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Утверждению леммы с учетом введенных обозначений можно придать следующий вид.

Равенство

$$Q(0, 1, 2, \ldots, n)A=T_m, \tag{18}$$

где A — диагональная матрица, не зависящая от x, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — многочлены от x, возможно только при $n\geqslant m$.

Мы покажем, что многочлены $p_1, p_2, \ldots, p_n$ имеют степень не превышающую единицу, и количество многочленов степени один в множестве $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ равно m. Доказательство будет проведено по такому плану, использующему индукцию.

Пусть при некотором $k\leqslant n$ справедливо равенство

$$RQ(0, 1, 2, \ldots, k)B=T_{m-s}, \tag{19}$$

где R и B — некоторые матрицы, не зависящие от x, B — диагональна, s — число многочленов степени один среди многочленов множества $\{p_{k+1}, \ldots, p_n\}$.

Началом индукции ($s=0$) является равенство (18) ($R=E$, $B=A$, $n=k$). При $s=m$ имеем:

$$\tilde{R}Q(0, l, 2, \ldots, l)\tilde{B}=T_0, \tag{20}$$

где $\tilde{R}$, $\tilde{B}$ — матрицы, не зависящие от x, $\tilde{B}$ — диагональна, $Q(0, 1, 2, \ldots, l)$ не зависит от x; по этой причине многочлены $p_1, \ldots, p_l$ имеют степень нуль; среди многочленов $p_{l+1}, p_{l+2}, \ldots, p_n$ содержится ровно $s=m$ многочленов степени единица.

Утверждение о равенстве (19) проверяется при $s=0$ и доказывается индукцией по s для $s=m$. Утверждение о равенстве (20) эквивалентно утверждению леммы.

Шаг индукции. Если справедливо (19) и

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix},$$

то, сравнивая первые столбцы в (19), получаем:

$$\begin{pmatrix} Q(0, 1, \ldots, k)\, b_1 \\ Q(0, 1, \ldots, k-1)\, b_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\det R}\begin{pmatrix} r_{22}F_{m-s+1}-r_{12}F_{m-s} \\ -r_{21}F_{m-s+1}+r_{11}F_{m-s} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

если $r_{21}\neq 0$, то из (21) следует

$$\deg Q(0, 1, 2, \ldots, k)=\deg Q(0, 1, 2, \ldots, k-1), \quad \deg p_k=0.$$

В этом случае из (19) имеем:

$$R\begin{pmatrix} p_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q(0, 1, 2, \ldots, k-1)\, B=T_{m-s}, \tag{22}$$

т. е. справедливо (19), поскольку в (25) s равно количеству многочленов степени один среди многочленов $\{p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n\}$. Если $r_{21}=0$ в (21), то

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} Q(0, 1, 2, \ldots, k)\, B=\begin{pmatrix} 1 & r_{12}/r_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} Q(0, 1, \ldots, k)B=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & r_{12}/r_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{Q}(0, 1, \ldots, k)\, B.$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} Q(0, 1, 2, \ldots, k)\begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}=\tilde{Q}(0, 1, \ldots, k) \tag{23}$$

и $\tilde{Q}(0, 1, 2, \ldots, k)$ выражается через $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_k$ так же, как $Q(0, 1, 2, \ldots, k)$ выражается через $p_1, p_2, \ldots, p_k$, при этом $\tilde{p}_i$, $i=1, \ldots, k$, отличается от p_i лишь постоянным множителем, не равным нулю,

$$\tilde{p}_i=p_i\frac{r_{11}}{r_{12}},$$

в частности, $\deg\tilde{p}_i=\deg p_i$, матрица $\tilde{B}$ не зависит от x и диагональна,

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

В силу (22),

$$\tilde{Q}(0, 1, 2, \ldots, k)\tilde{B}=\begin{pmatrix}1 & -r_{11}/r_{22}\\ 0 & 0\end{pmatrix}T_{m-s}. \tag{25}$$

Сравнивая первые столбцы в (25), имеем:

$$\begin{pmatrix}\tilde{q}(0, 1, \ldots, k)\tilde{b}_1\\ \tilde{q}(0, 1, \ldots, k-1)\tilde{b}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{m-s+1}-(r_{12}/r_{22})F_{m-s}\\ F_{m-s}\end{pmatrix}, \tag{26}$$

где $\tilde{q}(0, 1, \ldots, l)$, $l=1, \ldots, k$, зависят от $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_l$ так же, как $q(0, 1, \ldots, l)$ от $p_1, p_2, \ldots, p_l$, а $\tilde{p}_i$, $i=1, \ldots, l$, отличаются от p_i лишь постоянным множителем. Примем во внимание

$$\tilde{q}(0, 1, \ldots, k)=\tilde{p}_k\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-1)+\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-2), \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\deg\tilde{q}(0, 1, \ldots, k)=\deg F_{m-s+1}=m-s,\\ \deg\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-1)=\deg F_{m-s}=m-s+1,\\ \deg\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-2)\leqslant\deg\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-1).\end{gathered} \tag{28}$$

(27) следует из (14), а (28) — из (26). Из этих соотношений вытекает, что $\deg\tilde{p}_k=1$, т. е. $\tilde{p}_k=cx+d$.

Покажем, что $\tilde{p}_k$ имеет вид:

$$\tilde{p}_k=x+d. \tag{29}$$

Действительно, в силу (26),

$$\begin{aligned}\tilde{q}(0, 1, \ldots, k)&=\frac{1}{\tilde{b}_1}\left(F_{m-s+1}-\left(\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)F_{m-s}\right)=\\ &=\frac{1}{\tilde{b}_1}(xF_{m-s}+F_{m-s+1})-\frac{1}{\tilde{b}_1}\cdot\frac{r_{12}}{r_{22}}F_{m-s-1}=\left(x-\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)\cdot\frac{F_{m-s}}{\tilde{b}_1}+\frac{F_{m-s-1}}{\tilde{b}_1}=\\ &=\left(x-\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-1)+\frac{F_{m-s-1}}{\tilde{b}_1}.\end{aligned} \tag{30}$$

Приравнивая правые части равенств (27) и (30), получаем:

$$\begin{aligned}&\tilde{p}_k\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-1)+\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-2)=\\ &=\left(x-\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)q(0, 1, \ldots, k-1)+\frac{F_{m-s-1}}{\tilde{b}_1},\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}0=&\left[cx+d-\left(x-\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)\right]q(0, 1, \ldots, k-1)+\\ &+\tilde{q}(0, 1, \ldots, k-2)-\frac{F_{m-s-1}}{\tilde{b}_1}.\end{aligned} \tag{31}$$

При $c \neq 1$ многочлен в правой части (31) имеет степень $m-s>0$, что при $s \neq m$ невозможно. Итак, $c=1$ и $\tilde{p}_k = x+d$ Учитывая это обстоятельство, имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r_{12}/r_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+d & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{Q}(0, 1, \ldots, k-1)\, \tilde{B} = T_{m-s-1} \quad (32)$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d+\frac{r_{11}}{r_{22}} \end{pmatrix} \tilde{Q}(0, 1, \ldots, k-1)\, \tilde{B} = T_{m-s-1}. \quad (33)$$

Здесь $s+1$ — количество многочленов степени один среди $\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k+1}, \ldots, \tilde{p}_n$. Таким образом, формула (18) справедлива при замене s на $s+1$ $(s \neq m)$ и наборе многочленов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_k$, отличающихся соответственно от $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ненулевыми постоянными множителями. Шаг индукции завершен. Лемма доказана.

3°. Рассмотрим полиноминальную матрицу

$$T_m = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m, \quad (34)$$

принадлежащую, в силу доказанной в 2° леммы, подмножеству s_m. Вычислим

$$f = T'_m T_m^{-1} \quad (35)$$

в явном виде.

Имеем:

$$T'_m = \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m-k},$$

$$T_m^{-1} = \left[\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right]^m, \quad (36)$$

$$T'_m T_m^{-1} = \sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-r}. \quad (37)$$

Как обычно,

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}; \quad (38)$$

в этих обозначениях

$$T'_m T_m^{-1} = \sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} F_{r+1} & F_r \\ F_r & F_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{r-1} & -F_r \\ -F_r & F_{r+1} \end{pmatrix} (-1)^r =$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\begin{pmatrix}F_{r+1} & F_r\\ F_r & F_{r-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-F_r & F_{r+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}(-1)^r=$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\begin{pmatrix}-F_{r+1}F_r & F_{r+1}F_{r+1}\\ -F_rF_r & F_{r+1}F_r\end{pmatrix}(-1)^r. \qquad (39)$$

Вычислим каждый элемент матрицы (39) в явном виде. Будем использовать обозначения:

$$\alpha=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2},\quad \beta=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2},$$
$$\alpha+\beta=x,\quad \alpha\beta=-1. \qquad (40)$$

При этом

$$F_r=\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}, \qquad (41)$$

поскольку, как легко видеть,

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_r=xF_{r-1}+F_{r-2},\quad r=2,\ 3,\ \ldots.$$

Элемент с номером 11 матрицы (39) равен

$$\sum_{r=0}^{m-1}-F_rF_{r+1}(-1)^r=\sum_{r=0}^{m-1}-\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\,\frac{\alpha^{r+1}-\beta^{r+1}}{\alpha-\beta}(-1)^r=$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\sum_{r=0}^{m-1}-(\alpha^{2r+1}+\beta^{2r+1}-\alpha^r\beta^{r+1}-\alpha^{r+1}\beta^r)(-1)^r=$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\sum_{r=0}^{m-1}[(\alpha^{2r+1}+\beta^{2r+1})(-1)^{r+1}+(\alpha+\beta)]=$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[mx+(-1)^m\frac{\alpha^{2m}-\beta^{2m}}{\alpha-\beta}\right]=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[mx+(-1)^mF_{2m}].$$

Элемент с номером 12 матрицы (39) равен

$$\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}F_{r+1}^2=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\sum_{r=0}^{m-1}(\alpha^{2r+2}+\beta^{2r+2}-2\alpha^{r+1}\beta^{r+1})(-1)^{r+1}=$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\sum_{r=0}^{m-1}(-2)+\frac{(-1)^m\alpha^{2m+2}-\alpha^2}{\alpha^2+1}+\frac{(-1)^m\beta^{2m+2}-\beta^2}{\beta^2+1}=$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(2m+1+(-1)^{m+1}F_{2m+1}).$$

Аналогичным образом находим элемент с номером 21:

$$\frac{1}{x^2+4}[2m-1+(-1)^mF_{2m-1}]$$

и элемент с номером 22:

$$\frac{1}{x^2+4}\left[-2mx+(-1)^{m+1}F_{2m}\right].$$

Таким образом,

$$f=T'_mT_m^{-1}=\frac{1}{x^2+4}\begin{pmatrix}2mx & 2m+1\\ 2m-1 & -2mx\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{x^2+4}(-1)^m\begin{pmatrix}F_{2m} & -F_{2m+1}\\ F_{2m-1} & -F_{2m}\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{x^2+4}\begin{pmatrix}2mx & 2m+1\\ 2m-1 & -2mx\end{pmatrix}+\frac{1}{x^2+4}(-1)^mT_{2m}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \quad (42)$$

Формула (42) задает полиномиальную матрицу f, обладающую свойством

$$\int E+f(x)\,dx=T_m(x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^m.$$

При этом полиномиальная матрица $T_m(x)$ принадлежит множеству S_m. Таким образом, формула (42) задает систему линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и с полиномиальными решениями и при этом «любой степени сложности», т. е. принадлежащую S_m при любом m.

4°. С алгеброй полиномиальных матриц размера 2×2 и мультипликативных интегралов в алгебре полиномиальных матриц связана следующая задача.

По данной полиномиальной матрице $f(x)$ найти полиномиальную матрицу $F(x)$ такую, что

$$F'F^{-1}=f(x) \quad (43)$$

или, что то же самое,

$$\int_0^x E+f(x)\,dx=F(x). \quad (44)$$

Разумеется, задача разрешима не для всякой $f(x)$, так что в более точной постановке задачи нужно вместо слова «найти» употребить «найти, если существует».

В этом пункте мы опишем алгоритм, решающий поставленную задачу. Следуя этому алгоритму, можно для каждой полиномиальной матрицы $f(x)$ либо построить $F(x)$ с условиями (43), (44) либо установить, что искомой полиномиальной матрицы не существует.

Как указывалось в 3°, если $F(x)$ и $f=F'F^{-1}$ — полиномиальные матрицы, то $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F=P_n\Theta P_{n-1}\Theta\ldots P_1\Theta\cdot B \quad (45)$$

или

$$F=\Theta P_n \Theta P_{n-1} \dots P_1 \Theta \cdot B, \qquad (46)$$

где

$$P_i=\begin{pmatrix}1 & p_i(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \Theta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix}. \qquad (47)$$

Без ограничения общности можно считать, что в правых частях (45), (46) не более двух соседних матриц P_{i+1}, P_i обладают тем свойством, что

$$\deg P_i=0, \qquad \deg P_{i+1}=0. \qquad (48)$$

Будем использовать в дальнейшем обозначения:

$$F_i=P_1 \Theta P_{i-1} \Theta \dots P_1 \Theta,$$

$$f_i=F_i' F_i^{-1}, \qquad i=1, 2, \dots, n. \qquad (49)$$

Алгоритм, который мы опишем в этом пункте, позволяет (при выполнении некоторого условия) перейти от f_i к f_{i-1} (с вычислением многочлена p_i) или (при невыполнении этого условия) устанавливает, что исходная полиномиальная матрица f не является мультипликативной производной от полиномиальной матричной функции.

Упомянутое выше условие состоит в следующем. Пусть

$$f_i(x)=\begin{pmatrix}\beta_i(x) & \gamma_i(x)\\ \alpha_i(x) & -\beta_i(x)\end{pmatrix} \qquad (50)$$

(след матрицы f_i равен нулю вследствие того, что определитель матрицы F можно считать равным единице).

Лемма. Если $F_i(x)$ и $f_i=F_i' F_i^{-1}(x)$ — полиномиальные $2\times\times 2$ матрицы, то

$$\min(\deg \alpha_i(x), \deg \gamma_i(x)) \leqslant \deg \beta_i(x) \leqslant \max(\deg \alpha_i(x), \deg \gamma_i(x)). \qquad (51)$$

Доказательство леммы можно провести с помощью индукции по индексу i. При этом следует учесть соотношения:

$$\alpha_{i+1}=-2p_{i+1}\beta_i-p^2_{i+1}\alpha_i+\gamma_i+p'_{i+1},$$

$$\beta_{i+1}=-p_{i+1}\alpha_i-\beta_i,$$

$$\gamma_{i+1}=\alpha_i. \qquad (52)$$

Если $\deg p_{i+1}>0$, то условие (51) для f_{i+1} легко вытекает из (51) для f_i. Если же $\deg p_{i+1}=0$, то шаг индукции несколько осложняется и требует учета некоторых дополнительных обстоятельств. Строгое доказательство дано в [8].

При выполнении условия (51) предписание алгоритма имеет вид:

1) Если $\deg \alpha_i \leqslant \deg \gamma_i$, то от f_i следует перейти к $\tilde{f}_i=\Theta f_i \Theta$; при этом элементы матрицы $\tilde{f}_i$

$$\tilde{f}_i=\begin{pmatrix}\beta_i & \gamma_i\\ \alpha_i & -\beta_i\end{pmatrix} \tag{53}$$

и $\deg\gamma_i\leqslant\deg\alpha_i$.

2) При выполнении условия (53) разделить β_i на γ_i с остатком r_i:

$$\beta_i=q_i\gamma_i+r_i,\qquad \deg r_i<\deg\alpha_i.$$

3) Подействовать на F_i калибровочным преобразованием с матрицей

$$\begin{pmatrix}q_i & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{54}$$

т. е. перейти от $\begin{pmatrix}\beta_i & \gamma_i\\ \alpha_i & -\beta_i\end{pmatrix}$ к матрице

$$\begin{pmatrix}q_i & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_i & \gamma_i\\ \alpha_i & -\beta_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -q_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q_i' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & q_i\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}q_i\gamma_i-\beta_i & -q_i^2\gamma_i+2\beta_iq_i+\alpha_i+q_i\\ \gamma_i & \beta_i-q_i\gamma_i\end{pmatrix}. \tag{55}$$

Элемент 11 полиномиальной матрицы (55) имеет степень меньшую, чем элемент 11 полиномиальной матрицы F_i.

4) Для матрицы (55) следует проверить условие (51) и далее выполнить предписания 1), 2), 3).

Действуя согласно предписаниям алгоритма, на некотором шаге будем иметь одно из двух: либо на некотором шаге будет нарушено условие (51), либо в результате преобразований получим матрицу вида $\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha(x) & 0\end{pmatrix}$, которая калибровочным преобразованием с матрицей $\begin{pmatrix}1 & 0\\ p(x) & 1\end{pmatrix}$, $p'(x)=\alpha(x)$, сводится к нулевой матрице.

В первом случае исходная матрица f не может быть представлена в виде $f=F'F^{-1}$, во втором случае матрица f может быть получена из нулевой матрицы калибровочными преобразованиями с некоторой полиномиальной матрицей $F(x)$

$$f=F0F^{-1}+F'F^{-1},$$

где F — произведение матриц вида $\begin{pmatrix}p_i & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и Θ; при этом и сами матрицы $\begin{pmatrix}p_i & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, и порядок их умножения однозначно определяются описанным выше алгоритмом.

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{pmatrix}-x^2-1 & 1\\ -x^4-2x^2+2x-1 & 1+x^2\end{pmatrix}.$$

Имеем:

1) $\deg\alpha > \deg\beta > \deg\gamma$,

2) $\beta = \gamma q + r \quad -x^2 - 1 = 1(-1-x^2) + 0 \quad q = -1 - x^2$,

3) $$\begin{pmatrix} -1-x^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x^2-1 & 1 \\ -x^4-2x^2+2x-1 & 1+x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+x^2 \end{pmatrix} +$$
$$+\begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-x^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+x^2 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1+x+x^3 & x^2+1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ОРБИТ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

1°. Еще одной интересной задачей, связанной с теорией мультипликативного интеграла в кольце полиномиальных матриц, является задача классификации орбит в пространстве полиномиальных матриц относительно действия калибровочных преобразований.

Более точная постановка: назовем две полиномиальные 2×2 матрицы A и B эквивалентными, если существует такая невыраженная полиномиальная матрица C, что

$$B = CAC^{-1} + C'C^{-1}. \tag{1}$$

Множество X всех полиномиальных матриц, как легко видеть, разлагается в теоретико-множественную сумму непересекающихся между собой подмножеств, состоящих из попарно эквивалентных между собой матриц. Требуется в той или иной степени описать эти подмножества (орбиты действия группы G всех полиномиальных матриц размера 2×2 с определителем ±1).

Здесь мы опишем алгоритм, с помощью которого можно ответить на вопрос, эквивалентны или неэквивалентны две заданные полиномиальные матрицы. Будут указаны также приложения этого алгоритма.

2°. Ограничимся рассмотрением подпространства X_0 в X, состоящего из матриц со следом нуль.

Обозначим:

$$P_i(x) = \begin{pmatrix} 1 & p_i(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad b_1,\ b_2 \neq 0,\ b_1,\ b_2 = \mathrm{const}, \tag{3}$$

$$C_i(x)=P_i\Theta P_{i-1}\Theta\ldots P_1\Theta,\ i=1,\ 2,\ \ldots, \tag{4}$$

$$A_i=C_iAC_i^{-1}+C_i'C_i^{-1},\ \ i=1,\ 2,\ \ldots, \tag{5}$$

$$A_i(x)=\begin{pmatrix}\beta_i(x) & \gamma_i(x)\\ \alpha_i(x) & -\beta_i(x)\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Пусть $A(x)\in M$ — такова, что для матрицы $A_1(x)$ справедливо неравенство $\deg\alpha_1(x)\geqslant\deg\beta_1(x)\geqslant\deg\gamma_1(x)$. Тогда $\deg\alpha_i(x)\geqslant\deg\beta_i(x)\geqslant\deg\gamma_i(x)$ для любого натурального $i>1$.

Доказательство. Проверим по индукции, что если $\forall i\in N$ p_i и p_{i+1} не являются одновременно числовыми матрицами, то $\forall k\in N$ $\deg\alpha_k(x)\geqslant\deg\beta_k(x)\geqslant\deg\gamma_k(x)$. Действительно, для $k=1$ утверждение справедливо по условию. Пусть утверждение справедливо для произвольного, но фиксированного числа k. Покажем, что $\deg\alpha_{k+1}(x)\geqslant\deg\beta_{k+1}(x)\geqslant\deg\gamma_{k+1}(x)$. Из (5) имеем:

$$\begin{cases}\alpha_{k+1}(x)=-2p_{k+1}(x)\beta_k(x)-p_{k+1}^2(x)\alpha_k(x)+\gamma_k(x)+p_{k+1}'(x),\\ {}_{k+1}(x)=-p_{k+1}(x)\alpha_k(x)-\beta_k(x),\\ \beta_{+1}(x)=\alpha_k(x).\end{cases} \tag{7}$$

Если $\deg p_{k+1}(x)\neq 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\deg p_{k+1}(x)=0$. Тогда $\deg p_k(x)\neq 0$. Из (7) получим: $\deg\alpha_k(x)=$ $=\deg p_k^2(x)\alpha_{k-1}(x)$, $\deg\beta_k(x)=\deg p_k(x)\alpha_{k-1}(x)$, $\deg\gamma_k(x)=$ $=\deg\alpha_{k-1}(x)$, т. е. $\deg\alpha_k(x)>\deg\beta_k(x)>\deg\gamma_k(x)$. Из (7) далее имеем: $\deg\alpha_{k+1}(x)=\deg\beta_{k+1}(x)=\deg\gamma_{k+1}(x)=\deg\alpha_k(x)$.

Пусть $y_i=\Theta P_i\Theta\ldots\Theta P_1$, причем $\forall k\leqslant i$ P_k и P_{k-1} не являются одновременно числовыми матрицами. Рассмотрим $C_{i+2}=$ $=\Theta P_{i+2}\Theta P_{i+1}\Theta\ldots\Theta P_1$, где $\deg P_{i+2}(x)=\deg P_{i+1}(x)=0$. Тогда можно считать, что $\deg P_i(x)\neq 0$. Рассмотрим A_{i+2}:

$$\alpha_{i+2}(x)=(p_{i+2}p_{i+1}+1)^2\alpha_i(x)+$$
$$+2p_{i+2}(p_{i+2}p_{i+1}+1)\beta_i(x)-p_{i+2}^2\gamma_i(x),$$
$$\beta_{i+2}(x)=p_{i+1}(p_{i+2}p_{i+1}+1)\alpha_i(x)+$$
$$+(2p_{i+2}p_{i+1}+1)\beta_i(x)-p_{i+2}\gamma_i(x),$$
$$\gamma_{i+2}(x)=\alpha_{i+1}(x)=-p_{i+1}^2\alpha_i(x)-2p_{i+1}\beta_i(x)+\gamma_i(x).$$

Так как $p_{i+2}p_{i+1}+1\neq 0$, то $\deg\alpha_{i+2}(x)=\deg\beta_{i+2}(x)=\deg\gamma_{i+2}(x)=$ $=\deg\alpha_i(x)$. Таким образом, утверждение доказано.

3°. Полиномиальную матрицу n-го порядка можно представить в виде матричного многочлена относительно x, т. е. в виде многочлена с матричными коэффициентами:

$$A(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m.$$

Число m называется степенью матричного многочлена, если $A_0\neq 0$. Матричный многочлен $A(x)$ называется регулярным, если $\det A_0\neq 0$, и сингулярным, если $\det A_0=0$. Если хотя бы один из двух матричных многочленов регулярный, то степень их произведения равна сумме степеней сомножителей. Действительно, пусть $A=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m$ и $B=B_0x^p+B_1x^{p-1}+\ldots$ $\ldots+B_p$, $A_0\neq 0$, $B_0\neq 0$ и $\det A_0\neq 0$. Тогда $A\cdot B=A_0B_0x^{m+p}+$ $+(A_0B_1+A_1B_0)x^{m+p-1}+\ldots+A_mB_p$. Так как $\det A_0\neq 0$, $A_0\neq 0$, $B_0\neq 0$, то $A_0B_0\neq 0$.

Теорема 1. Пусть $A(x)$ — регулярный матричный полином n-го порядка и $\deg A(x)>\deg B(x)$. Тогда $A(x)$ и $B(x)$ не эквивалентны.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $A(x)$ эквивалентна $B(x)$ и $\deg A(x)=m$, $\deg B(x)=n$, причем $m>n$. Тогда из (2) следует, что $A(x)$ и $B(x)$ удовлетворяют уравнению

$$C'(x)=A(x)C(x)-C(x)B(x). \tag{8}$$

Пусть $\deg C(x)=q$. Тогда $\deg A(x)C(x)=\deg A(x)+\deg C(x)=$ $=m+q$, так как $A(x)$ — регулярный матричный многочлен. Далее $\deg C(x)B(x)\leqslant\deg C(x)+\deg B(x)=q+n$. Следовательно, $\deg A(x)C(x)>\deg C(x)B(x)$. Из (8) получаем, что $\deg C'(x)=$ $=\deg A(x)C(x)$, т. е. $q-1=m+q$, или $m=-1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. Пусть $A(x)$, $B(x)\in M$, $\deg A(x)=\deg B(x)$ и $A(x)$ — регулярный матричный полином, а $B(x)$ — сингулярный матричный полином. Тогда $A(x)$ не эквивалентна $B(x)$.

Доказательство. Пусть $A=\sum\limits_{k=0}^{m}A_kx^{m-k}$, $B=\sum\limits_{k=0}^{m}B_kx^{m-k}$.

Так как $\det A_0\neq 0$, $\operatorname{Sp}A_0=0$, $\det B_0=0$ и $\operatorname{Sp}B_0=0$, то можно считать, что

$$A_0=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix},\quad B_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Предположим противное тому, что требуется доказать, т. е. что A эквивалентна B. Из (8) следует, что матрица C не может быть постоянной, иначе было бы, что $A=CBC^{-1}$, но $A_0\neq CB_0C^{-1}$. Пусть $\deg C=p>0$, т. е. $C=\sum\limits_{k=0}^{p}C_kx^{p-k}$, $C_0\neq 0$. Тогда из (8) будем иметь $A_0C_0=C_0B_0$, откуда следует, что $C_0=0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Удобным приемом классификации орбит является приведение элемента к каноническому виду. Будем говорить, что матрица $A(x)$ имеет канонический вид в своей орбите, если $\deg A(x)\leqslant\deg B(x)$, где $B(x)$ — произвольная эквивалентная ей матрица.

Рассмотрим

$$A(x)=\begin{pmatrix}-\beta(x) & \alpha(x)\\ \gamma(x) & \beta(x)\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Пусть $A(x)$ — сингулярный матричный полином. Тогда можно считать, что

$$\deg \alpha(x) > \max\{\deg \beta(x), \deg \gamma(x)\}.$$

Теорема 3. Пусть $A(x)$ такова, что $\deg \alpha(x) > \deg \gamma(x) \geqslant \geqslant \deg \beta(x)$, $\gamma(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$. Тогда:

1) если $\deg \alpha(x) - \deg \gamma(x)$ — четное число, то существует эквивалентная ей матрица $B(x)$ такая, что $\deg B(x) < \deg A(x)$;

2) если $\deg \alpha(x) - \deg \gamma(x)$ — нечетное число, то такой матрицы $B(x)$ не существует.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $P = \Theta PAP^{-1}\Theta + +\Theta P'P^{-1}\Theta$. Тогда

$$B = \begin{pmatrix} -p\gamma + \beta & \gamma \\ 2p\beta - p^2\gamma + \alpha + p' & -\beta + p\gamma \end{pmatrix}. \tag{10}$$

1) Возьмем многочлен p так, чтобы $2\deg p = \deg \alpha - \deg \gamma$. Тогда $\deg p^2\gamma = \deg \alpha$, $\deg p\beta < \deg \alpha$. Имеем $\deg(-\beta + p\gamma) < <\deg(2p\beta - p^2\gamma + \alpha + p')$, иначе $\beta(x)$ была бы регулярной и $\deg B > \deg A$, что противоречит теореме 1. Выбирая подходящим образом старший коэффициент полинома p (а именно, положим $p_0{}^2\gamma_0 = \alpha_0$, где p_0, γ_0, α_0 — старшие коэффициенты многочленов p, γ, α соответственно), мы будем иметь, что $\deg(-\beta + +p\gamma) < \deg(2p\beta - p^2\gamma + \alpha + p') < \deg \alpha$, т. е. $\deg \beta(x) < \deg A(x)$.

2) Если $\deg \alpha - \deg \gamma$ — нечетное число, то выбрать многочлен p так, чтобы $\deg p^2\gamma = \deg \alpha$, не удается. Поэтому $\deg(2p\beta - p^2\gamma + \alpha + p') > \deg(-p\gamma + \beta) \geqslant \deg \gamma$ для произвольного полинома p. Предположим противное тому, что требуется доказать, т. е. что существует такая матрица $R(x)$, что $\deg R(x) < <\deg A(x)$ и $R(x)$ эквивалентна $A(x)$. Тогда существует такая $C(x)$, $\det C(x) = \pm 1$, что $CAC^{-1} + C'C^{-1} = R$. Тогда $C(x)$ имеет вид (4). Так как матрицы Θ и D не оказывают влияния на $\deg R$, то будем считать, что $C(x) = \Theta P_n\Theta \ldots \Theta P_1$ или $C(x) = =\Theta P_n\Theta \ldots \Theta P_1\Theta$. Рассмотрим первую возможность, т. е. пусть $C(x) = \Theta P_n\Theta \ldots \Theta P_1$. Так как в силу доказанного $\deg \alpha_1 > > \deg \beta_1 \geqslant \deg \gamma_1$, где $A_1(x) = B(x)$, то из леммы будем иметь, что $\deg \alpha_n \geqslant \deg \beta_n \geqslant \deg \gamma_n = \deg \alpha_{n-1}$. Отсюда следует, что $\deg \alpha_n > \deg \alpha$, т. е. $\deg R(x) > \deg A(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть $C(x) = \Theta P_n\Theta \ldots \Theta P_1\Theta$. Рассмотрим $A_1(x) = =\Theta P_1\Theta A\Theta P_1{}^{-1}\Theta + \Theta P_1{}'P_1{}^{-1}\Theta$.

Имеем:

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} -\beta - p_1\alpha & \alpha \\ -2p_1\beta - p_1^2\alpha + \gamma + p_1' & \beta + p_1\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\deg \alpha_1 \geqslant \deg \beta_1 \geqslant \deg \gamma_1 = \deg \alpha(x)$, где $\alpha_1 = = -2p_1\beta - p_1{}^2\alpha + \gamma + p_1{}'$, $\beta_1 = -\beta - p_1\alpha$, $\gamma_1 = \alpha$. И опять из леммы будем иметь, что $\deg \alpha_n \geqslant \deg \beta_n \geqslant \deg \gamma_n$. Так как $C(x) \neq \mathrm{const}$, то $\deg \alpha_n > \deg \alpha$ и $\deg R(x) > \deg A(x)$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание. Теорема 3 остается справедливой и в случае, когда $\beta=0$, т. е. когда $A(x)$ имеет вид:

$$A(x)=\begin{pmatrix}0 & \alpha(x)\\ \gamma(x) & 0\end{pmatrix},$$

где $\deg \alpha > \deg \gamma$, $\gamma \neq 0$. Доказательство аналогичное.

Теорема 4. Пусть $A(x)$ такова, что $\deg \alpha > \deg \beta > \deg \gamma$, $\gamma \neq 0$. Тогда:

1) если $2 \deg \beta \geqslant \deg \alpha + \deg \gamma$, то существует матрица $B(x)$, эквивалентная $A(x)$, такая, что $\deg B(x) < \deg A(x)$;

2) если $2 \deg \beta < \deg \alpha + \deg \gamma$ и $\deg \alpha - \deg \gamma$ — четное число, то существует $B(x)$, эквивалентная $A(x)$, такая, что $\deg B(x) < \deg A(x)$.

3) если $2 \deg \beta < \deg \alpha + \deg \gamma$ и $\deg \alpha - \deg \gamma$ — нечетное число, то такой матрицы $B(x)$ не существует.

Доказательство. 1) Пусть $2 \deg \beta > \deg \alpha + \deg \gamma$. Рассмотрим $B(x) = \Theta PAP^{-1}\Theta + \Theta P'P^{-1}$ из (10). Возьмем полином p так, чтобы $\deg p = \deg \alpha - \deg \beta$. Тогда будем иметь, что $\deg p^2\gamma < \deg \alpha$. Действительно, $\deg \beta = \deg \alpha - \deg p$, $2 \deg \beta = 2 \deg \alpha - 2 \deg p$. Далее $2 \deg \alpha - 2 \deg p > \deg \alpha + \deg \gamma$ из условия. Поэтому $\deg \alpha > \deg \gamma + 2 \deg p = \deg p^2 \gamma$. Выбирая старший коэффициент многочлена p так, чтобы $2 p_0\beta_0 + \alpha_0 = 0$, где p_0, β_0, α_0 — старшие коэффициенты многочленов p, β, α соответственно, получим, что $\deg(2 p\beta - p^2\gamma + \alpha + p') < \deg \alpha$. Так как $\deg(-\beta + p\gamma) < \deg \alpha$, то утверждение доказано.

Пусть $2 \deg \beta = \deg \alpha + \deg \gamma$. Рассмотрим матрицу $B(x)$ из (10), где в качестве p возьмем неполное частное от деления $\beta(x)$ на $\gamma(x)$, т. е. $\beta(x) = p(x)\gamma(x) + q(x)$, где $\deg q(x) < \deg \gamma(x)$. Имеем:

$$B(x)=\begin{pmatrix}q & \gamma\\ p\beta + pq + \alpha + p' & -q\end{pmatrix}.$$

Далее имеет $\deg p\beta = \deg \alpha$. Действительно, $\deg p = \deg \beta - \deg \gamma$, $\deg p\beta = \deg p + \deg \beta = 2 \deg \beta - \deg \gamma = \deg \alpha$. Если $\deg(p\beta + pq + \alpha + p') < \deg \alpha$, то утверждение доказано. Пусть $\deg(p\beta + pq + \alpha + p') = \deg \alpha$, т. е. $\deg B(x) = \deg A(x)$. Но тогда имеем, что $\deg \alpha - \deg \gamma$ — четное число. В самом деле, $2 \deg \beta = \deg \alpha + \deg \gamma$, т. е. сумма двух неотрицательных целых чисел есть четное число. Значит, либо они оба четные, либо оба нечетные. И в том и другом случае их разность число четное. В таком случае воспользуемся уже доказанной теоремой 3.

2) Возьмем p так, чтобы $2 \deg p = \deg \alpha - \deg \gamma$. Имеем $\deg p^2 \gamma = \deg \alpha$ и $\deg p\beta < \deg \alpha$. Действительно, $2 \deg p\beta = 2 \deg p + 2 \deg \beta = \deg \alpha - \deg \gamma + 2 \deg \beta < \deg \alpha - \deg \gamma + \deg \alpha + \deg \gamma = 2 \deg \alpha$. Возьмем старший коэффициент поли-

нома p так, чтобы $-p_0^2\gamma+\alpha_0=0$, где p_0, γ_0, α_0 — старшие коэффициенты многочленов p, γ, α соответственно. Тогда $\deg(2p\beta-p^2\gamma+\alpha+p')<\deg\alpha$ и утверждение доказано.

3) Если $\deg\alpha-\deg\gamma$ — нечетное число, то выбрать полином p так, чтобы $\deg p^2\gamma=\deg\alpha$, не удается. Поэтому $\deg(2p\beta-p^2\gamma+\alpha+p')\geqslant\deg\alpha$. Таким образом, для произвольной матрицы P $\deg B\geqslant\deg A$. Предположим противное тому, что требуется доказать, т. е. что существует такая матрица $R(x)$, что $\deg R(x)<\deg A(x)$ и $R(x)$ эквивалентна $A(x)$. Далее аналогично доказательству части 2) теоремы 3. Теорема полностью доказана.

Пусть сингулярный матричный полином $A(x)$ имеет вид (9). Объединяя теорему 3 и теорему 4, будем иметь следующий результат.

Теорема 5. Пусть $A(x)$ — сингулярный матричный полином. Тогда если $2\deg\beta<\deg\alpha+\deg\gamma$ и $\deg\alpha-\deg\gamma$ — нечетное число, $\gamma\neq0$, то $A(x)$ имет канонический вид в своей орбите. Во всех остальных случаях существует $B(x)$, эквивалентная $A(x)$, такая, что $\deg B(x)<\deg A(x)$.

Замечание. Если $\gamma=0$ и $\deg\beta>\deg\beta$, то существует $B(x)$, эквивалентная $A(x)$, и $\deg B(x)<\deg A(x)$. Действительно, рассмотрим $B(x)=\Theta PAP^{-1}\Theta+\Theta P'P^{-1}\Theta$:

$$B(x)=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 2p\beta+\alpha+p' & -\beta\end{pmatrix}.$$

Возьмем полином p так, чтобы $\deg p=\deg\alpha-\deg\beta$ и чтобы $2p_0\beta_0+\alpha_0=0$, где p_0, β_0, α_0 — старшие коэффициенты полиномов p, β, α соответственно. Тогда $\deg(2p\beta+\alpha+p')<\deg\alpha$, $\deg B(x)<\deg A(x)$.

Следствие. Пусть матрицы $A(x)$ и $B(x)$ сингулярные и имеют канонический вид, т. е. наименьшую степень в своих орбитах; $\deg A=\deg B$. Тогда если A эквивалентна B, то $A=CBC^{-1}$, где $C=\text{const}$.

Доказательство. Пусть $A=CBC^{-1}+C'C^{-1}$, где $C\neq\text{const}$. Так как B сингулярная и имеет канонический вид, то из доказательства теорем 3 и 4 следует, что $\deg A>\deg B$. Но по условию $\deg A=\deg B$. Противоречие возникло в связи с допущением, что $\deg C\neq\text{const}$. Следовательно, $C=\text{const}$.

4°. Пусть $A(x)$ — регулярная матрица:

$$A(x)=\begin{pmatrix}\beta(x) & \gamma(x)\\ \alpha(x) & -\beta(x)\end{pmatrix},$$

причем $\alpha(x)\neq0$, $\gamma(x)\neq0$. Можно считать, что $\deg\beta(x)>\max\{\deg\alpha(x),\ \deg\gamma(x)\}$. Обозначим $A_1=C_1AC_1^{-1}+C_1'C_1^{-1}$, где $C_1=\Theta P_1$, $A_i=C_iA_{i-1}C_i^{-1}+C_i'C_i^{-1}$, где $C_i=\Theta P_i$, $P_i=\begin{pmatrix}1 & p_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Теорема 6. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — регулярные матрицы и $\deg A=\deg B$. Если A эквивалентна B, причем $B\neq CAC^{-1}$, где $C=\mathrm{const}$, то $B=CAC^{-1}+C'C^{-1}$, где C имеет вид (4), причем

1) если $C=DF$ или $C=D\Theta F$, то p_1 есть неполное частное от деления 2β на $-\alpha$, p_i есть неполное частное от деления $2\beta_{i-1}$ на $-\alpha_{i-1}$;

2) если $C=DF\Theta$ или $C=D\Theta F\Theta$, то p_1 есть неполное частное от деления 2β на γ, p_i есть неполное частное от деления $2\beta_{i-1}$ на γ_{i-1}.

Доказательство. Так как матрицы D и Θ не оказывают влияния на $\deg B$, то можно считать, что $B=FAF^{-1}+F'F^{-1}$ либо $B=F\theta A\theta F^{-1}+F'F^{-1}$, где $\Theta P_n\Theta\ldots\Theta P_1$.

Пусть $B=A_n=FAF^{-1}+F'F^{-1}$. Так как A и B регулярные, то можно считать, что $\deg\beta>\max\{\deg\alpha,\ \deg\gamma\}$ и $\deg\beta_n>\max\{\deg\alpha_n,\ \deg\gamma_n\}$. Покажем, что ни одна из матриц p_i не может быть числовой. Доказательство проведем по индукции.

Пусть $p_1=\mathrm{const}$. Тогда

$$A_1=\begin{pmatrix}-p_1\alpha-\beta & \alpha\\ -2p_1\beta-p_1^2\alpha+\gamma+p_1' & p_1\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

и $\deg\alpha_1\geqslant\deg\beta_1\geqslant\deg\gamma_1=\deg\alpha$. Из леммы будет следовать, что $\deg\alpha_n\geqslant\deg\beta_n\geqslant\deg\gamma_n$. Но $\deg\beta_n>\max\{\deg\alpha_n,\ \deg\gamma_n\}$. Противоречие возникло из предположения, что $p_2=\mathrm{const}$.

Пусть утверждение справедливо для произвольного, но фиксированного числа $k<n$, т. е. $p_i\neq\mathrm{const}$ для любого натурального $i\leqslant k$. Покажем, что $p_{k+1}\neq\mathrm{const}$. Предположим противное, т. е. что $p_{k+1}=\mathrm{const}$. Если $p_{k+1}=\mathrm{const}$, то $\deg\alpha_{k+1}=\deg\beta_{k+1}=\deg\gamma_{k+1}$. Имеем, что матрица A_k такова, что для A_{k+1} справедливо $\deg\alpha_{k+1}\geqslant\deg\beta_{k+1}\geqslant\deg\gamma_{k+1}$. Из леммы будет следовать, что $\deg\alpha_n\geqslant\deg\beta_n\geqslant\deg\gamma_n$, но $\deg\beta_n>\max\{\deg\alpha_n,\ \deg\gamma_n\}$. Противоречие доказывает утверждение.

Далее, если $\deg p_1>\deg\beta$, то будем иметь $\deg\alpha_1>\deg\beta_1>\deg\gamma_1$, и из леммы будет следовать, что $\deg B>\deg A$.

Пусть $\deg p_1\alpha<\deg\beta$. Тогда $\deg\alpha_1=\deg(-2p_1\beta-p_1^2\alpha+\gamma+p_1')=\deg p_1\beta$. Имеем $\deg\alpha_1>\deg\beta_1>\deg\gamma_1$. Аналогично, из леммы следует, что $\deg B>\deg A$.

Таким образом, имеем $\deg p_1\alpha=\deg\beta$.

а) Пусть $\deg(\beta+p_1\alpha)<\deg\beta$. Тогда $\deg\alpha_1=\deg(-2p_1\beta-p_1^2\alpha+\gamma+p_1')=\deg(-p_1\beta-p_1(\beta+p_1\alpha)+\gamma+\gamma_1')=\deg p_1\beta$. Если предположить, что $\deg\beta_1=\deg(\beta+p_1\alpha)\geqslant\deg\alpha$, то будем иметь $\deg\alpha_1>\deg\beta_1\geqslant\deg\gamma_1$ и в соответствии с леммой $\deg B>\deg A$. Пусть $\deg\beta_1<\deg\alpha$. Имеем $\deg\alpha_1>\deg\gamma_1>\deg\beta_1$. Рассмотрим

$$A_2=\begin{pmatrix}-p_2\alpha_1-\beta_1 & \alpha_1\\ -2p_2\beta_1-p_2^2\alpha_1+\gamma_1+p_2' & p_2\alpha_1+\beta_1\end{pmatrix}.$$

Имеем $\deg\alpha_2>\deg\beta_2>\deg\gamma_2$ и в соответствии с леммой $\deg A<\deg B$.

б) Пусть $\deg\beta_1=\deg\beta$. Если предположить, что $\deg\alpha_1\geqslant\geqslant\deg\beta_1=\deg\beta>\deg\gamma_1$, то в соответствии с леммой $\deg B>>\deg A$. Итак, имеем $\deg\alpha_1<\deg\beta_1$. Отсюда следует, что $\deg(2\beta+p_1\alpha)<\deg\alpha$. Действительно, если бы $\deg(2\beta+p_1\alpha)\geqslant\geqslant\deg\alpha$, то $\deg\alpha_1\geqslant\deg p_1\alpha=\deg\beta$. Так как $\deg\beta=\deg p_1\alpha$, то $2\beta+p_1\alpha=r$, где $\deg r<\deg\alpha$. Таким образом, $2\beta=-p_1\alpha++r$, т. е. полином p_1 есть неполное частное от деления 2β на $-\alpha$, причем p_1 определяется однозначно, в силу однозначности деления с остатком. Далее имеем $\alpha_1=-p_1r+\gamma+p_1'$, $\beta_1=\beta-r$. Получим:

$$A_1=\begin{pmatrix}\beta-r & \alpha\\ -p_1r+\gamma+p_1' & -\beta+r\end{pmatrix},$$

где $\deg\beta_1>\max\{\deg\alpha_1, \deg\gamma_1\}$. Проводя для матрицы A_1 те же самые рассуждения, что и для A. мы получим $\deg B=\deg A$ и тем самым утверждение доказано.

Пусть $B=F\Theta A\Theta F^{-1}+F'F^{-1}$. Матрица $\Theta A\Theta$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}-\beta & \alpha\\ \gamma & \beta\end{pmatrix},$$

где $\deg\beta>\max\{\deg\gamma, \deg\alpha\}$. Поэтому те же рассуждения справедливы и для данного случая.

З а м е ч а н и е. Согласно теореме 6 матрицы, эквивалентные A, получаются с помощью описанного алгоритма из матриц A и $\tilde{A}=\Theta A\Theta$:

$$A\to A_1\to A_2\to\ldots$$
$$\tilde{A}\to\tilde{A}_1\to\tilde{A}_2\to\ldots.$$

Вместо того чтобы строить эти две последовательности, можно строить последовательность из матрицы A вправо и влево:

$$\ldots\to A_{-2}\to A_{-1}\to A\to A_1\to A_2\to\ldots,$$

причем, как можно показать, $A_l=\Theta\tilde{A}_l\Theta$.

5°. Пусть $A(x)$ эквивалентна $B(x)$, где

$$A(x)=\begin{pmatrix}a_1(x) & a_2(x)\\ a_3(x) & -a_1(x)\end{pmatrix},\quad B(x)=\begin{pmatrix}b_1(x) & b_2(x)\\ 0 & -b_1(x)\end{pmatrix}$$

и $a_2(x)\neq0$, $a_3(x)\neq0$. Тогда существует $C(x)$, $\deg C(x)=\pm1$ такая, что

$$B=CAC^{-1}+C'C^{-1}. \tag{11}$$

Пусть $C(x)$ имеет вид:

$$C(x)=\begin{pmatrix}c_1(x) & c_2(x)\\ c_3(x) & c_4(x)\end{pmatrix}.$$

Тогда из (11) будем иметь уравнение

$$2c_3c_4a_1+c_4^2a_3-c_3^2a_2+c_3'c_4-c_4'c_3=0. \tag{12}$$

Если предположить, что $c_4=0$, то получим $c_3^2a_2=0$, откуда $c_3=0$, т. к. $a_2\neq 0$. Отсюда следует, что $\det C=0$, что противоречит условию. Таким образом, $c_4\neq 0$. Разделим (12) на c_4^2. Получим:

$$2\left(\frac{c_3}{c_4}\right)a_1+a_3-\left(\frac{c_3}{c_4}\right)^2a_2+\left(\frac{c_3}{c_4}\right)'=0.$$

Обозначив $z=\frac{c_3}{c_4}$, будем иметь общее уравнение Риккати с полиномиальными коэффициентами

$$z'=a_2z^2-2a_1z-a_3, \tag{13}$$

которое имеет рациональное решение. Верно и обратное: если уравнение (13) имеет рациональное решение, то A эквивалентна треугольной матрице B.

Пусть имеется общее уравнение Риккати $r'=cr^2-2ar-b$, где a, b, c — полиномы от x. Рассмотрим полиномиальную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a\end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу А к каноническому виду. Если канонический вид матрицы A представляет собой сингулярную матрицу, то уравнение Риккати не имеет рациональных решений, так как всякая треугольная матрица эквивалентна регулярной треугольной. Пусть канонический вид матрицы есть регулярная матрица. Воспользуемся алгоритмом, описанным в теореме 6. Если в результате применения алгоритма получим треугольную матрицу, то уравнение Риккати будет иметь рациональное решение, в противном случае нет. Заметим, что описанный алгоритм позволяет установить не только существование рациональных решений, но и найти их в явном виде.

Решение вопроса о том, когда мультипликативный интеграл от полиномиальной матричной функции второго порядка является полиномиальным, и о том, какие из полиномиальных мультипликативных интегралов эквивалентны относительно полиномиальной группы калибровочных преобразований, дано в [3], [6]—[8].

§ 4. РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АБЕЛЕВЫ СВЯЗНОСТИ

В этом параграфе речь пойдет о римановых и псевдоримановых метриках, о криволинейных мультипликативных интегралах, определяемых связностями этих метрик, и о свойстве «функциональной абелевости» таких связностей.

Пусть g_{ij}, $i, j=1, \ldots, n$,— метрический тензор. Как известно, коэффициенты связности $\Gamma_{jk}^{\ i}$ метрики g_{ij} выражаются через g_{ij} следующим образом:

$$\Gamma^{i}_{jk}=\frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{s}}\right). \tag{1}$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}_j$ матрицу, у которой элементы в i-й строке и k-ом столбце равны $\Gamma_{jk}^{\ i}$. Построим криволинейный мультипликативный интеграл

$$\int E+\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j dx^j. \tag{2}$$

Как было отмечено в § 1, выражение (2) для каждой кривой $x^j=x^j(t)$ задает некоторый мультипликативный интеграл, описывающий параллельный перенос в рассматриваемой связности. Вычисление параллельного переноса сводится к системе линейных дифференциальных уравнений

$$Y'=A\cdot Y, \quad Y(t_0)=E, \tag{3}$$

где

$$A(t)=\sum_{j=1}^{n} \tilde{\Gamma}_j(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))\, x^{j\prime}(t), \tag{4}$$

а $Y(t)$ — матричная функция переменного t и $Y(t)\xi$ равно результату параллельного перенесения вектора ξ.

Известно, что решение системы уравнений (3) становится простой задачей в предположении, что матричная функция $A(t)$ удовлетворяет условию

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1) \qquad \forall t_1,\ t_2\in\mathbf{R}, \tag{5}$$

которое будем в дальнейшем называть функциональной абелевостью.

По-видимому, вычисления, связанные с параллельным переносом (и геодезическими линиями), несколько упростятся, если криволинейный мультипликативный интеграл (2) будет обладать свойством (5).

Возникает вопрос о том, какие метрики и в каких системах координат порождают мультипликативный интеграл, для которого вдоль любоъ кривой выполняется свойство (5).

На первый взгляд, условие (5) для каждой кривой $x^i=x^i(t)$ является столь сильным, что ему удовлетворяют лишь очень немногие метрики в очень немногих системах координат. Некоторое представление о множестве решений поставленной задачи дает следующий факт.

Имеются две замечательные метрики двумерного риманова пространства постоянной отрицательной кривизны, а именно

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{sh}^2 u\, dv^2, \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{6}$$

Соответствующие операторы $\overset{(1)}{\Gamma}_1$, $\overset{(1)}{\Gamma}_2$; $\overset{(2)}{\Gamma}_1$, $\overset{(2)}{\Gamma}_2$ имеют вид:

$$\overset{(1)}{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\mathrm{ch}\, u}{\mathrm{sh}\, u} \end{pmatrix}, \quad \overset{(1)}{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{ch}\, u \\ \dfrac{\mathrm{ch}\, u}{\mathrm{sh}\, u} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}_1 = -\frac{1}{y}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{(2)}{\Gamma}_2 = -\frac{1}{y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Легко видеть, что рассматриваемая метрика в системе координат u, v не обладает свойством функциональной абелевости, а в системе координат x, y этим свойством обладает.

Несложно проверить, что интересующее нас свойство метрики и системы координат в двумерном римановом пространстве имеет место, когда

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \tag{9}$$

$$ds^2 = a^2(x)dx^2 + 2ka(x)b(y)dxdy + b^2(y)dy^2, \tag{10}$$

$$ds^2 = c^2(y)dx^2 + 2c^2(y)\Lambda(x, y)dxdy + (\Lambda^2(x, y) + d^2)dy^2; \tag{11}$$

здесь a, b, c, Λ — гладкие функции, причем $\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x}(x, y) = \dfrac{c'(y)}{c(y)}$, $a, k, d \in \mathrm{R}$, $|k| < 1$, $d \neq 0$.

Известно, что всякую риманову метрику в двумерном римановом пространстве можно локально в подходящей системе координат записать в виде (9). Таким образом, положительный ответ на поставленный вопрос имеет место для всякой римановой метрики на двумерном локальном многообразии в некоторой особой системе координат, называемой изотермической (конформной).

Метрики (10), (11) имеют нулевую кривизну.

В работе [19] показано, что указанный список исчерпывает все решения поставленной задачи в локальном двумерном римановом пространстве с точностью до изменения системы координат линейным преобразованием в пространстве переменных x, y.

Укажем матрицы $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$ для метрик (9), (10), (11).

Метрика (9):

$$\begin{gathered}\tilde{\Gamma}_1 = \frac{1}{2\lambda(x, y)}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \\ \tilde{\Gamma}_2 = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right),\end{gathered} \tag{12}$$

метрика (10):

$$\tilde{\Gamma}_1=\frac{a'(y)}{a(y)}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{\Gamma}_2=\frac{a'(y)}{a(y)}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\tag{13}$$

метрика (11):

$$\tilde{\Gamma}_1=\frac{a'(x)}{a(x)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{\Gamma}_2=\frac{b'(y)}{b(y)}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\tag{14}$$

Более сложным является случай трехмерного риманова пространства.

Имеют место следующие утверждения.

1. Если собственно риманова метрика имеет вид:

$$ds^2=a^2(x,\ y,\ z)\,dx^2+b^2(x,\ y,\ z)\,dy^2+c^2(x,\ y,\ z)\,dz^2\tag{15}$$

и ее коэффициенты связности обладают свойством функциональной абеловости, то либо

$$ds^2=a^2(x)\,dx^2+b^2(y)\,dy^2+c^2(z)\,dz^2,\tag{16}$$

либо

$$ds^2=b^2(x,\ y)\,(dx^2+dy^2)+c^2(z)\,dz^2\tag{17}$$

(с точностью до постоянного линейного преобразования переменных x, y, z, сохраняющего форму (15)).

2. Если метрика трехмерного собственно риманова пространства не сводится к (15) линейным преобразованием переменных x, y, z с постоянными коэффициентами, то ее коэффициенты связности обладают свойством функциональной абелевости тогда и только тогда, когда эта метрика (с точностью до линейного преобразования с постоянными коэффициентами) имеет один из следующих видов:

1)

$$g_1=\begin{pmatrix}a(x) & 0 & 0\\ 0 & b(y) & 0\\ 0 & 0 & c(z)\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}a(x) & 0 & 0\\ 0 & b(y) & 0\\ 0 & 0 & c(z)\end{pmatrix},\tag{18}$$

где A — симметрическая положительно определенная матрица с постоянными коэффициентами;

2)

$$g_2=\begin{pmatrix}a(y) & 0 & 0\\ b(x,y) & a(y) & 0\\ c(z) & 0 & c(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha^2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(y) & b(x,y) & c(z)\\ 0 & a(y) & 0\\ 0 & 0 & c(z)\end{pmatrix},\tag{19}$$

где $\frac{\partial b}{\partial x}=a'(y)$, $\alpha,\gamma\in\mathrm{R}$;

3)

$$g_3=\begin{pmatrix}a(z) & 0 & 0\\ b(y,z) & a(z) & 0\\ c(x,y,z) & b(y,z) & a(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha^2 & \beta\\ 0 & \beta & \gamma^2\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} a(z) & b(y,z) & c(x,y,z) \\ 0 & a(z) & b(y,z) \\ 0 & 0 & a(z)\end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $|\alpha\gamma|>|\beta|$, $\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y}=\frac{\partial a}{\partial z}$, $\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial z}$;

4)

$$g_4=\begin{pmatrix} a(z) & 0 & 0 \\ 0 & a(z) & 0 \\ c(x,y,z) & b(y,z) & a(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & \beta \\ 0 & \beta & \delta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(z) & 0 & c(x,y,z) \\ 0 & a(z) & b(y,z) \\ 0 & 0 & a(z)\end{pmatrix}, \quad (21)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$, $|\alpha\gamma|>|\beta|$, $\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y}=\frac{\partial a}{\partial z}$, $\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial z}$;

5)

$$g_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b(y,z) & 1 & 0 \\ c(y,z) & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \beta \\ 0 & \beta & \gamma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b(x,z) & c(y,z) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $\frac{\partial b}{\partial z}=\frac{\partial c}{\partial y}$.

Матрицы $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$, $\tilde{\Gamma}_3$ связностей метрик g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 таковы:

$$g_1:\ \tilde{\Gamma}_1=\frac{a'(x)}{a(x)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{\Gamma}_2=\frac{b'(y)}{b(y)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{\Gamma}_3=\frac{c'(z)}{c(z)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$g_2:\ \tilde{\Gamma}_1=\frac{a'(y)}{a(y)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{\Gamma}_2=\begin{pmatrix} \frac{a'(y)}{a(y)} & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b(x,y)}{a(y)}\right) & 0 \\ 0 & \frac{a'(y)}{a(y)} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c'(z)}{c(z)}\end{pmatrix},$$

$$g_3:\ \tilde{\Gamma}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{\Gamma}_2=\begin{pmatrix} 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{b(x,y)}{a(z)} \\ 0 & 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_3=\begin{pmatrix} \frac{a'(z)}{a(z)} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{b(x,y)}{a(z)} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{c(x,y,z)}{a(z)} \\ 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{b(x,y)}{a(z)} \\ 0 & 0 & \frac{a'(z)}{a(z)}\end{pmatrix},$$

$$g_4\colon\ \tilde{\Gamma}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \tilde{\Gamma}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_3=\begin{pmatrix} \frac{a'(z)}{a(z)} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\frac{c(x,y,z)-b(y,z)}{a(z)} \\ 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{b(y,z)}{a(z)} \\ 0 & 0 & \frac{a'(z)}{a(z)} \end{pmatrix},$$

$$g_5\colon\ \tilde{\Gamma}_1=0,\ \tilde{\Gamma}_2=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial b(y,z)}{\partial y} & \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \tilde{\Gamma}_3=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial b(y,z)}{\partial z} & \frac{\partial c(y,z)}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение укажем один из результатов, относящихся к n-мерным римановым пространствам.

Теорема ([18]). Матрицы связности n-мерной римановой метрики

$$ds^2=\sum_{i=1}^{n} g_{ii}\,(dx^i)^2$$

являются функционально абелевыми тогда и только тогда, когда метрика ds^2 является метрикой прямого произведения некоторого числа двумерных конформных метрик и одномерных метрик.

Необходимые и достаточные условия функциональной абелевости семейства матриц выведены в статье [12]. В работах [18], [19] получен ряд результатов о функциональной абелевости римановых связностей.

§ 5. О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

1°. В этом параграфе мы укажем некоторые задачи, которые нам кажутся содержательными и интересными. Эти задачи мотивированы общей «мультипликативной» точкой зрения.

1°. Пусть g_{ij} — метрика в (локальном) римановом пространстве, Γ^i_{jk} — риманова связность, $\tilde{\Gamma}_j$ — линейные операторы с элементами Γ^i_{jk}.

Пусть коэффициенты связности Γ^i_{jk} обладают свойствами фундаментальной абелевости. Это значит, что линейные операторы

$$\tilde{\Gamma}_1,\ \tilde{\Gamma}_2, \ldots, \tilde{\Gamma}_n \qquad (1$$

перестановочны между собой не только в каждой точке, но и в различных точках, т. е.

$$\tilde{\Gamma}_r(\bar{x})\,\tilde{\Gamma}_s(\bar{y})=\tilde{\Gamma}_s(\bar{y})\,\tilde{\Gamma}_r(\bar{x}),\quad r,\ s=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

для любых двух точек $\bar{x}$, $\bar{y}$ рассматриваемого риманова пространства, $\bar{x}=(x^1, x^2,\ldots, x^n)$, $\bar{y}=(y^1, y^2,\ldots, y^n)$.

Пусть дана кривая L

$$x^i=x^i(t).$$

Вектор ξ, параллельно перенесенный из начальной точки вдоль кривой L, в точке t имеет вид

$$\xi(t)=\left(\widehat{\int_{t_0}^{t}} E+\Sigma\Gamma^l_{jk}dx^j\right)\xi. \tag{3}$$

При выполнении условий (2)

$$\xi(t)=\left(\exp\int_{t_0}^{t}\Sigma\Gamma^l_{jk}dx^j\right)\xi. \tag{4}$$

Если кривая L является геодезической, то вектор $\xi_0=\bar{x}'(t_0)$, касательный к кривой L в точке t_0, будучи параллельно перенесен в точку t, должен быть коллинеарен касательному вектору $\bar{x}'(t)$ к кривой L в точке t. Отсюда

$$\bar{x}'=\lambda\left(\exp\int\Sigma\Gamma^l_{jk}dx^j\right)\bar{x}'(t_0). \tag{5}$$

В правой части формулы (5) выражение

$$A(g,\ L)=\exp\int_{t_0}^{t}\Sigma\Gamma^l_{jk}dx^j \tag{6}$$

представляет собой матрицу, выраженную с помощью квадратур через исходные данные — метрику g_{ij} и кривую L. Иными словами, $A(g, L)$ является функцией, сопоставляющей каждой гладкой кривой матрицу.

Задача вычисления геодезической линии, согласно (5), может быть сформулирована следующим образом: по известной функции $A(g, L)$ найти такую кривую $\bar{x}(t)$, чтобы

$$A(g,\ \bar{x}(t))\,\bar{x}'(t_0)=\lambda\bar{x}'(t), \tag{7}$$

где λ — некоторая числовая функция.

Заметим, что условия (2) естественно возникают при рассмотрении мультипликативного интеграла; в то же время эти условия не так легко мотивировать, оставаясь на традиционной точке зрения.

2°. Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл вида

$$\frown\!\!\int E+P(x, y, u)\,dx+Q(x, y, u)\,dy, \tag{8}$$

где P, Q — известные матричные функции от трех переменных x, y, u, а u — неизвестная скалярная функция двух переменных x, y.

Кривизна K криволинейного мультипликативного интеграла есть матричная функция переменных x, y, u. По аналогии с мультипликативным интегралом в кольце дифференциальных операторов, можно поставить задачу о вычислении такой функции $u(x, y)$, для которой кривизна K будет нулевой матрицей. В случае кольца дифференциальных операторов эта задача является очень глубокой, интересной и содержательной. В матричном случае задача будет по-видимому проще. Неизвестно, однако, насколько она содержательна, т. е. неизвестно, сводится ли эта задача, хотя бы в некоторых частных случаях, к интересным задачам математики и физики. Все же есть надежда, что рассматриваемая задача будет довольно содержательной.

Для коммутативного кольца A, которому принадлежат значения функций $P(x, y, u)$, $Q(x. y, u)$ в криволинейном мультипликативном интеграле

$$\int E+P(x, y, u)\,dx+Q(x, y, u)\,du, \tag{9}$$

кривизна K имеет вид:

$$K=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{10}$$

и условие $K=0$ является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

Пусть теперь A является кольцом матриц размера 2×2 и $P(x, y, u)$, $Q(x, y, u)$ в (9) принадлежат A. В этом случае кривизна также имеет след нуль. Оставляя без внимания случай, когда матрица K имеет в качестве канонического вида жорданову клетку, можно вместо условия $K=0$ рассмотреть условие

$$\int\limits_{\Omega}\operatorname{Tr} KK^{*}d\omega=0, \tag{11}$$

где Tr означает след, Ω — область, содержащая начальную точку x_0, y_0, $d\omega$ — элемент площади.

Вычисление функции $u(x, y)$, удовлетворяющей условию (11), сводится к решению вариационной задачи на минимум скалярного функционала:

$$G(u)=\int\limits_{\Omega}\operatorname{Tr} KK^{*}d\omega.$$

В общем виде эта вариационная задача является весьма сложной, однако наверняка существуют ее частные случаи, в которых можно получить в том или ином виде искомое решение.

Важным обстоятельством является следующее. Можно вычислить (с точностью до бесконечно малых первого порядка), как связаны вариация функционала G и вариация функции $u(x, y)$. Если в каждой точке $x, y, u(x, y)$ знать, какое приращение функции $u(x, y)$ приведет к уменьшению значения функционала G, то легко построить последовательность функций, начинающуюся, например, с константы и приближающуюся к искомому решению $u(x, y)$ уравнения (11). При этом возникает некоторый численный метод решения уравнения $K=0$.

3°. Качение сферы S^2 по поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Пусть в евклидовом пространстве R^3 задана поверхность V

$$\vec{r}=\vec{r}(u, v) \tag{12}$$

и сфера радиуса R с центром в точке

$$\vec{r}(u, v)+\vec{n}R, \tag{13}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали.

При описанной ситуации возникает криволинейный мультипликативный интеграл, определенный следующим образом.

Пусть

$$u=u(t),\ v=v(t),\ u(t_0)=u_0,\ v(t_0)=v_0 \tag{14}$$

задает кривую на поверхности V, проходящую через точку (u_0, v_0). Обозначим через $\vec{t}$ единичный касательный вектор к этой кривой в точке (u_0, v_0); пусть $\vec{b}=[\vec{t}, \vec{n}]$. Можно рассмотреть вращение вокруг оси, проходящей через точку (u_0, v_0), в направлении вектора $\vec{b}$ и бесконечно малое вращение, соответствующее этому вращению. Это бесконечно малое линейное преобразование (плюс тождественное преобразование) является тем близким к единичному преобразованием, предел произведения которого равен мультипликативному интегралу.

Если сфера S^2 катится без скольжения по поверхности вдоль кривой s, то при продвижении от точки (u_0, v_0) к точке $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ точка касания (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δt) перейдет в точку $\vec{r}(u, v)+\vec{t}\Delta s$, где Δs — длина дуги $(u_0, v_0)-(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$, и, кроме того, будет осуществлен поворот сферы вокруг оси, проходящей через ее центр и параллельной вектору $\vec{b}$, на угол $\Delta s/R$.

Это же движение можно рассматривать как поворот на угол $\Delta s/R$ вокруг оси, проходящей через точку (u_0, v_0) и параллельной вектору $\vec{b}$. Производная угла поворота по s равна $\frac{1}{R}$. Таким образом, угловая скорость характеризуется вектором $\frac{1}{R}\vec{b}$. Известно, что трехмерное евклидово пространство вместе с операцией векторного произведения является алгеброй Ли, изоморфной алгебре всех вещественных кососимметрических матриц с операцией коммутирования матриц. Изоморфизм может быть задан, например, так:

$$\Phi: xe_1+ye_2+ze_3 \to \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

При заданном соответствии очевидно, что вышеописанный криволинейный мультипликативный интеграл, связанный с качением шара по поверхности, имеет вид:

$$\int E+\frac{1}{R}\Phi(\vec{b})\,ds = \int E+\frac{1}{\Delta\cdot R}\Phi([\vec{t}, [\vec{r}_u\times\vec{r}_v])\,ds =$$

$$= \int E+\frac{1}{\Delta\cdot R}\Phi([\vec{r}_u\times[\vec{r}_u\times\vec{r}_v])\,du+\frac{1}{\Delta\cdot R}\Phi([\vec{r}_v\times[\vec{r}_u\times\vec{r}_v])\,dv,$$

где $\Delta=\sqrt{EG-F^2}$ и $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$.

Можно вычислить кривизну этого интеграла и выразить ее через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности.

Задача качения сферы по поверхности описана в [4]. В стаьях [5], [13] рассмотрены различные частные вопросы теории мультипликативного интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гамкрелидзе Р. В., Аграчев А. А., Вахромеев С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление // Итоги науки и техн. Сер. соврем. пробл. матем. Новейшие достижения / ВИНИТИ.— 1989.— *35*.— С. 3—107 (РЖМат, 1989, 12А703)
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с. (РЖМат, 1968, 3А312К)
3. *Мантуров О. В.* Об одной задаче теории мультипликативного интеграла // Дифференц. геометрия и прил.— М., 1982.— С. 3—17.— Деп. в ВИНИТИ 22.03.83, № 1442—83 Деп (РЖМат, 1983, 6Б52 ДЕП)
4. — О некоторых задачах, обсуждавшихся на семинаре кафедры геометрии МОПИ им. Н. К. Крупской // Инварианты дифференц. группы / Моск. обл. пед. ин-т.— М., 1988.— С. 3—13.— Деп. в ВИНИТИ 28.11.88, № 8355—В88 (РЖМат, 1989, 3А621 ДЕП)
5. — Некоторые факты теории мультипликативного интеграла // Приложения дифференц. геометрии.— Воронеж, 1989.

6. —, *Мартынюк А. Н.* О формуле Архимеда для мультипликативного интеграла // *Инвариант. тензоры на однород. пространствах* / *Моск. обл.* пед. ин-т.— М., 1987.— С. 25—33.— Деп. в ВИНИТИ 28.05.87, № 3843-В87 (РЖМат, 1987, 9А762 ДЕП)
7. —, — Об одном алгоритме в теории мультипликативного интеграла // Изв. вузов. Мат.— 1989.— № 5.— С. 26—31 (РЖМат, 1989, 11Б894)
8. —, — Классификация орбит пространства sl(2, $P[x]$) // Дифференц. геом. и мультипликат. интеграл / Моск. обл. пед. ин-т.— М., 1989.— С. 3—17.— Деп. в ВИНИТИ 17.05.89, № 3299—В89 (РЖМат, 1989, 10А486 ДЕП)
9. —, *Паланджянц Л. Ж.* Мультипликативный интеграл и некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных // Прикл. вопр. дифференц. геометрии.— М., 1983.— С. 95—100.— Деп. в ВИНИТИ 11.10.83, № 4470—83Деп (РЖМат, 1984, 1Б372 ДЕП)
10. —, — Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны // *Дифференц. геометрия и алгебры Ли / Моск. обл. пед. ин-т.*— М., 1983.— С. 11—18.— Деп. в ВИНИТИ 17.04.84, № 2384—84Деп (РЖМат, 1984, 9А440 ДЕП)
11. *Мартынюк А. Н.* Об одной задаче теории криволинейного мультипликативного интеграла // Приложения диффер. геометрии.— Воронеж, 1989.— С. 45—50
12. *Морозов В. В.* О коммутативных матрицах // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та.— 1952.— *112,* кн. 9.— С. 17—20
13. *Паланджянц Л. Ж.* Об одном приеме вычисления мультипликативного интеграла методом теории поверхностей // Дифференц. уравнения.— 1983.— *19,* № 9.— С. 1630—1632 (РЖМат, 1984, 1Б1153)
14. — О криволинейном мультипликативном интеграле в римановых пространствах // Дифференц. геометрия и прил.— М., 1982.— С. 128—139.— Деп. в ВИНИТИ 22.03.83, № 1442—83Деп (РЖМат, 1983, 7А658 ДЕП)
15. — О кривизне мультипликативного интеграла // Инвариант. тензоры на однород. пространствах / Моск. обл. пед. ин-т.— М., 1987.— С. 98—102.— Деп. в ВИНИТИ 28.05.87, № 3843—В87 (РЖМат, 1987, 9А763 ДЕП)
16. — О геометрических приложениях мультипликативного интеграла // Некотор. прил. дифференц. геометрии.— М., 1985.— С. 94—117.— Деп. в ВИНИТИ 25.06.85, № 4531—85Деп (РЖМат, 1985, 10А477 ДЕП)
17. — Об алгебрах, замкнутых относительно кривизны // Дифференц. геом. и мультипликат. интеграл / Моск. обл. пед. ин-т.— М., 1989.— С. 72—84.— Деп. в ВИНИТИ 17.05.89, № 3299—В89 (РЖМат, 1989, 10А634 ДЕП)
18. *Петрова В. Т.* Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Инварианты дифференц. группы / Моск. обл. пед. ин-т.— М., 1988.— С. 118—132.— Деп. в ВИНИТИ 28.11.88, № 8355—В88 (РЖМат, 1989, 3А676 ДЕП)
19. — Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Дифференц. геом. и мультипликат. интеграл / Моск. обл. пед. ин-т.— М., 1989.— С. 29—46.— Деп. в ВИНИТИ 17.05.89, № 3299—В89 (РЖМат, 1989, 10А658 ДЕП)
20. *Dollard J. D., Friedman Ch. N.* Product integration with applications to differential equations.— London, Addison-Wesley Publ. Co., 1979.— 254 с. (РЖМат, 1980, 8Б775 К)
21. *Schlesinger L.* Vorlesungen über lineare Differential-gleichungen.— Berlin, 1908.— 330 с.