V. G. Krotov, Representation of measurable functions by series in the Faber–Schauder system and universal series, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1974, Volume 214, Number 6, 1258–1261

Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

В. Г. КРОТОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА — ШАУДЕРА И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ

(Представлено академиком С. М. Никольским 25 VI 1973)

1. Пусть $\{\Phi_n(x)\}$ — система Фабера — Шаудера ([1]), образующая, как известно, базис в пространстве $C[0, 1]$. Т. е. всякая функция $f(x)\in C[0, 1]$ однозначно представима рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\,\Phi_n(x) \tag{1}$$

по системе $\{\Phi_n(x)\}$, равномерно сходящимся на $[0, 1]$ к $f(x)$. Ряд (1) будем называть рядом Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\Phi_n(x)\}$.

В настоящей статье изучаются универсальные ряды ([2]) по системе $\{\Phi_n(x)\}$ и вопросы представления измеримых функций рядами

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(x), \tag{2}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} c_n=0. \tag{3}$$

2. А. А. Талалян ([3]) установил, что любая измеримая на $[0, 1]$ функция $f(x)$ представима почти всюду сходящимся рядом (2), причем выполнено (3). Р. Зинк ([4]) показал, что теорема А. А. Талаляна сохраняет силу для всякой подсистемы $\{\Phi_{n_i}(x)\}$ системы $\{\Phi_n(x)\}$ с

$$\operatorname{mes}\varlimsup_{i\to\infty}\Delta[\Phi_{n_i}]=1, \tag{4}$$

где $\Delta[f]=\{x\colon x\in[0, 1];\ f(x)\neq 0\}$. П. Л. Ульянов ([1]) нашел условия на функцию $\varphi\in\Phi$, необходимые и достаточные для того, чтобы всякая функция $f(x)\in\varphi(L)$ была представима рядом (2), φ-сходящимся к $f(x)$. Результаты настоящей статьи позволяют усилить эти утверждения в различных направлениях.

3. Будем говорить для краткости, что ряд (2) U_1-, U_2- и U_3-универсален, если он соответственно универсален в обычном смысле, универсален относительно частичных рядов, универсален относительно перестановок в классе измеримых функций в смысле сходимости почти всюду. Пусть Φ — совокупность четных, неотрицательных, конечных, неубывающих и непрерывных справа на $[0, \infty)$ функций $\varphi(x)$ с $\varphi(0)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$. Если функция $\varphi\in\Phi$, то, заменяя класс измеримых функций на класс $\varphi(L)$, а сходимость почти всюду на φ-сходимость ([1]), получим аналогично понятия U_ν^φ-универсальности, $\nu=1, 2, 3$.

4. Пусть $\{c_n\}$ — последовательность действительных чисел.

Теорема 1. *Если выполнено* (3), *то*:

1) *условие*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\Phi_n(x)=\infty \quad \text{для почти всех} \quad x\in[0,1] \tag{5}$$

необходимо и достаточно для U_1-универсальности ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n c_n\Phi_n(x) \tag{6}$$

при некоторых λ_n, $|\lambda_n|=1$, $n=0, 1, \ldots$;

2) *для того чтобы некоторый частичный ряд ряда* (2) (*некоторый ряд, полученный перестановкой ряда* (2)) *был U_1-универсальным, необходимо и достаточно, чтобы при* $\Omega^+\{c_n\}=\{n: c_n>0\}$, $\Omega^-\{c_n\}=\{n: c_n<0\}$ *выполнялось условие*

$$\sum_{n\in\Omega^+\{c_n\}}c_n\Phi_n(x)=+\infty, \qquad \sum_{n\in\Omega^-\{c_n\}}c_n\Phi_n(x)=-\infty \quad \text{для почти всех } x\in[0,1]. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если выполнено условие* (3), *то ряд* (2) U_ν-*универсален при* $\nu=2$ (*или* $\nu=3$) *тогда и только тогда, когда имеет место* (7).

Определение. Ряд (2) назовем S-универсальным, если для любой измеримой на $[0, 1]$ функции $f(x)$ существует такая последовательность знаков $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n|=1$, $n=0, 1,\ldots$, что ряд (6) сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$.

Аналогично получаем понятие S^φ-универсального ряда, где функция $\varphi\in\Phi$.

Теорема 3. *При условии* (3) *ряд* (2) S-*универсален тогда и только тогда, когда выполнено* (5).

Теоремы 1—3 позволяют выяснить взаимоотношения различных типов универсальности для рядов (2), коэффициенты которых удовлетворяют условию (3).

Теорема 4. *Если выполнено* (3), *то* $U_1\Rightarrow U_2\Leftrightarrow U_3\Rightarrow S$.

Из сформулированных теорем легко получить следствие, непосредственно усиливающее упомянутые результаты А. А. Талаляна [3] и Р. Зинка [4].

Следствие 1. *Если выполнено* (4), *то существуют ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_i\Phi_{n_i}(x), \tag{8}$$

одновременно S-универсальные и U_ν-универсальные, $\nu=1, 2, 3$, *причем выполнено* (3).

5. Рассмотрим теперь классы $\varphi(L)$ и φ-сходимость.

Теорема 5. *Если функция* $\varphi\in\Phi$ *и*

$$\varphi(x+1)=O\{\varphi(x)\} \quad \text{при} \quad x\to\infty, \tag{9}$$

то: 1) *при условиях* (3) *и* (5) *ряд* (2) S^φ-*универсален*; 2) *при условиях* (3) *и* (7) *ряд* (2) U_ν^φ-*универсален*, $\nu=2, 3$.

Следствие 2. *Пусть функция* $\varphi\in\Phi$ *и выполнено* (9). *При условии* (4) *существуют ряды вида* (8), *одновременно S^φ-универсальные и U_ν^φ-универсальные*, $\nu=2, 3$, *причем выполнено* (3).

Следствие 2 усиливает в некоторых отношениях теорему 5.1 работы [1]. Из теоремы 5.2 работы [1] и следствия 2 вытекает

Теорема 6. *Пусть функция* $\varphi\in\Phi$. *Условие* (9) *необходимо и достаточно для того, чтобы*: 1) *существовал S^φ-универсальный ряд вида* (2); 2) *существовал U_2^φ-универсальный ряд вида* (2).

6. Доказательство теорем 1—3 и 5 основано на применении следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{c_n\}$, $c_n \geqslant 0$, *удовлетворяет условиям* (3) *и* (5). *Пусть заданы также полином по системе Хаара* $\chi(x)$, *натуральное число* $m \geqslant 1$, *числа* $\delta > 0$ *и* $\eta > 0$.

Тогда существуют конечные множества натуральных чисел ω^- *и* ω^+, $\omega^- \cap \omega^+ = \varnothing$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

$$\min\{\min \omega^-, \min \omega^+\} > m,$$

$$\Delta\Big[\sum_{n\in\omega^-} c_n\Phi_n\Big] \cap \Delta\Big[\sum_{n\in\omega^+} c_n\Phi_n\Big] = \varnothing,$$

$$\Big|\sigma_N\Big(x, \sum_{n\in\omega^-\cup\omega^+} \lambda_n c_n \Phi_n\Big)\Big| \leqslant |\chi(x)|, \quad x\in[0,1], \quad N=1,2,\ldots,$$

$$\operatorname{mes}\Big\{x: x\in[0,1];\ \Big|\chi(x) - \sum_{n\in\omega^-\cup\omega^+} \lambda_n c_n \Phi_n(x)\Big| \geqslant \delta\Big\} < \eta,$$

где $\lambda_n = +1$ *при* $n\in\omega^+$, $\lambda_n = -1$ *при* $n\in\omega^-$, *а* $\sigma_N(x,f)$ — N*-я частная сумма ряда* (1).

Лемма 2. *Если* $c_0, \ldots, c_m$ — *действительные числа, то при некоторых* λ_n, $|\lambda_n| = 1$, $n = 0, \ldots, m$, *выполнены неравенства*

$$\Big\|\sigma_N\Big(x, \sum_{n=0}^{m} \lambda_n c_n \Phi_n\Big)\Big\|_{C[0,1]} \leqslant \max_{0\leqslant n\leqslant m} |c_n|.$$

7. В этом пункте мы решим вопрос о существовании универсальных рядов Фурье (1) для функций с максимально возможной степенью гладкости в терминах модулей непрерывности.

Теорема 7. *Пусть* $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности со свойствами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) = \infty,$$

$$0 < C_1 \leqslant \omega(\delta^2)/\omega(\delta) \leqslant C_2 < 1 \quad \text{при } 0<\delta\leqslant\delta_0<1 \qquad (10)$$

и для функции $\varphi\in\Phi$ *выполнено* (9).

Тогда существует функция $f(x)\in H^\omega$, *ряд Фурье* (1) *которой*: 1) *одновременно* U_ν-, S-, U_ν^φ- *и* S^φ*-универсален*, $\nu=2, 3$; 2) *становится* U_1*-универсальным после выбрасывания некоторых членов* (*после некоторой перестановки, после некоторого выбора знаков у коэффициентов* $c_n(f)$).

Доказательство теоремы 7 вытекает из теорем 1—3, 5, теоремы С. В. Бочкарева ([5]) и следующего утверждения.

Теорема 8. *При условии* (3) *существует такая последовательность знаков* $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n| = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, *что ряд* (6) *сходится в* $C[0, 1]$.

Утверждение теоремы 7 теряет силу при замене первого условия (10) на $\sum_{n=1} \frac{1}{n}\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) < \infty$, ибо в этом случае для любой функции $f(x)\in H^\omega$ ряд Фурье (1) сходится в $C[0, 1]$ безусловно ([5]).

В связи с теоремой 7 заметим, что никакой ортогональный ряд Фурье функции $f(x)\in L^2$ не может быть U_3-универсальным даже для сходимости по мере.

Следствие 3. *Для любой измеримой на* $[0, 1]$ *функции* $f(x)$ (*функции* $f(x)\in\varphi(L)$, *где* $\varphi\in\Phi$ *удовлетворяет условию* (9)) *существует ряд* (2), *сходящийся к $f(x)$ почти всюду на* $[0, 1]$ (*соответственно φ-сходящийся к $f(x)$*), *причем выполнено соотношение*

$$c_n=o(1/\log n) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{11}$$

Следствие 4. *Пусть для функции $\varphi\in\Phi$ выполнено* (9). *Существуют U_ν-, S-, U_μ^φ- и S^φ-универсальные ряды* (2), $\nu=1, 2, 3$; $\mu=2, 3$, *коэффициенты которых удовлетворяют условию* (11).

Заметим, что утверждения следствий 3 и 4 теряют силу при замене условия (11) на условие $c_n=o(1/\log^{1+\varepsilon} n)$ при $n\to\infty$, где $\varepsilon>0$.

8. Полученные результаты позволяют говорить о том, что выбор знаков у коэффициентов рядов (2) является не менее естественным преобразованием ряда по сравнению с его перестановками или с выбором частичных рядов. Далее, ряды Фурье по системе Фабера — Шаудера не только представляют функции класса $C[0, 1]$ в смысле равномерной сходимости на $[0, 1]$, но и могут служить аппаратом представления измеримых функций в смысле сходимости почти всюду и в смысле φ-сходимости.

9. В заключение отметим, что для S-универсальности имеет место следующий аналог теоремы Д. Е. Меньшова [6] об универсальных тригонометрических рядах.

Теорема 9. *Если выполнено условие* (3), *то ряд* (2) *является суммой двух S-универсальных рядов по системе $\{\Phi_n(x)\}$.*

Пользуясь случаем, автор благодарит В. А. Андриенко за постоянное внимание и ценные советы.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
22 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Л. Ульянов, УМН, **27**, в. 2 (1972). [2] А. А. Талалян, УМН, **15**, в. 5 (1960). [3] А. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. н., **12**, № 3 (1959). [4] R. E. Zink, Proc. Am. Math. Soc., **21**, № 3 (1969). [5] С. В. Бочкарев, Матем. заметки, **4**, № 4 (1968). [6] Д. Е. Меньшов, Матем. сборн., **20**, № 2 (1947).