Идеальный газ в конкурсных задачах

В.ДРОЗДОВ

Молекулы идеального газа взаимодействуют друг с другом только при соударениях, происходящих по законам абсолютно упругого удара. Суммарный объем молекул идеального газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом, занимаемым газом.

Идеальный газ подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева (уравнению состояния идеального газа)

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}}RT ,$$

где p, V, T – давление, объем и абсолютная температура газа соответственно, m и M – масса и молярная масса газа, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) – универсальная (т.е. одинаковая для разных газов) газовая постоянная. Величина $\nu = \frac{m}{\mathrm{M}}$ называется количеством вещества и измеряется в молях. Эта величина, как и масса, аддитивна, т.е. суммируется, поэтому уравнение состояния для смеси n газов принимает вид

$$pV = (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)RT .$$

Молярная масса конкретного газа определяется по формуле

$$\mathrm{M} = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} ,$$

где M_r – определяемая по таблице Менделеева относительная молекулярная масса.

Закон сохранения энергии для тепловых процессов, или первое начало (первый закон) термодинамики, формулируется так: количество теплоты, подведенное к системе, равно сумме изменения внутренней энергии системы и работы, совершаемая системой над внешними телами, т.е.

$$Q = \Delta U + A .$$

Вот и вся краткая теория, необходимая для решения задач на идеальные газы, к чему и приступаем.

Задача 1. *Два сосуда, содержащие один и тот же газ, соединены трубкой с краном. Объемы сосудов V_1 и V_2, а давления в них p_1 и p_2. Каким будет давление газа после открытия крана соединительной трубки?*

Решение. Запишем уравнение состояния для газа в каждом сосуде до открытия крана, а затем – уравнение состояния газа в едином сосуде после открытия крана:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mathrm{M}}RT ,$$

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{\mathrm{M}}RT ,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{\mathrm{M}}RT .$$

Здесь m_1 и m_2 – массы газа в первом и втором сосудах соответственно, p – давление газа в едином сосуде. Сложив почленно первые два уравнения и сравнив новое уравнение с третьим, получим

$$p(V_1 + V_2) = p_1V_1 + p_2V_2 ,$$

откуда найдем искомое давление:

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} .$$

Эта задача показывает, что нет ничего страшного в том, что в системе уравнений неизвестных (p, m_1, m_2, M, T – всего пять) больше, чем уравнений (три). Ведь от нас не требуется невозможного – найти все неизвестные. Поэтому в такой ситуации не следует искать «недостающие» уравнения – их не существует.

Задача 2. *Газ, масса которого m_1, а молярная масса M_1, смешали с газом, масса которого m_2, а молярная масса M_2. Найдите молярную массу смеси.*

Решение. Так как количество вещества смеси газов равно

$$\nu = \frac{m}{\mathrm{M}} ,$$

то искомая молярная масса смеси равна

$$\mathrm{M} = \frac{m}{\nu} = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mathrm{M}_1} + \frac{m_2}{\mathrm{M}_2}} .$$

Отметим, что полученная формула легко обобщается на случай смеси n газов:

$$\mathrm{M} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\frac{m_1}{\mathrm{M}_1} + \frac{m_2}{\mathrm{M}_2} + \ldots + \frac{m_n}{\mathrm{M}_n}} .$$

Задача 3. *Вертикально расположенная трубка длиной l, открытая с обоих концов, наполовину погружена в сосуд с ртутью. Трубку закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина столбика ртути, оставшейся в трубке? Атмосферное давление уравновешивается столбом ртути высотой H.*

Рис. 1

Решение. Пусть длина столбика ртути, оставшейся в трубке, равна x (рис.1). Поскольку ртутный столбик находится в равновесии, то сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0 .$$

Здесь $m\vec{g}$ – сила тяжести столбика ртути, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы давления на столбик атмосферного и разреженного воздуха соответственно. Из векторного равенства вытекает скалярное:

$$F_1 = F_2 + mg .$$

Так как

$$F_1 = p_1S , \; F_2 = p_2S , \; m = \rho Sx ,$$

где S – площадь сечения трубки, ρ – плотность ртути, то получаем

$$p_1 = p_2 + \rho gx .$$

По условию задачи,

$$p_1 = \rho gH ,$$

тогда

$$p_2 = \rho g(H - x) .$$

В последнем уравнении два неизвестных: x и p_2. Значит, нужно еще одно уравнение. Его нам даст закон Бойля–Мариотта, записанный для воздуха в верхней части

трубки:

$$p_1 \frac{l}{2} S = p_2 (l - x) S .$$

Исключая из системы уравнений

$$p_2 = \rho g (H - x) ,$$

$$p_2 = \frac{\rho g H l}{2(l - x)}$$

неизвестное p_2, приходим к квадратному уравнению

$$2x^2 - 2(H + l)x + Hl = 0$$

с двумя положительными корнями:

$$x_{1,2} = \frac{H + l \pm \sqrt{H^2 + l^2}}{2} .$$

Какой из них выбрать? Очевидно, что $x < \frac{l}{2}$. Поэтому

$$x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2} .$$

Задача 4 (мехмат МГУ, 1988). *На рисунке 2 показан цикл, совершаемый над идеальным газом, причем участок 1–2 изображает изохорный процесс, участок 2–3 – изобарный. Температуры газа в точках 1 и 3 равны T_1 = = 300 К и T_3 = 400 К соответственно. Найдите температуру T_2 газа в точке 2. Масса газа не изменяется.*

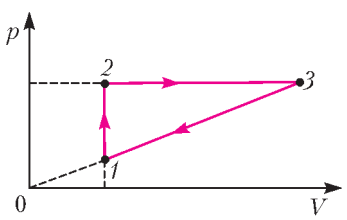

Рис. 2

Решение. Сначала запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для трех вершин треугольника:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 ,$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2 ,$$

$$p_3 V_3 = \nu R T_3 .$$

Пользуясь рисунком 2, уменьшаем индексы у величин p и V:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 ,$$

$$p_2 V_1 = \nu R T_2 ,$$

$$p_2 V_3 = \nu R T_3 .$$

Далее исключаем неизвестную величину ν, которую не требуется определять, и получаем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} ,$$

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_2} .$$

Осталось воспользоваться несколько скрытым условием задачи – точки 0, *1*, *3* лежат на одной прямой:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{V_3}{V_1} , \text{ или } \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_3}{V_1} .$$

Следовательно, левые части предыдущих двух уравнений равны. Тогда равны и правые части:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} ,$$

откуда находим

$$T_2 = \sqrt{T_1 T_3} = 346 \text{ К} .$$

Задача 5 (МГТУ им.Н.Э.Баумана). *Посередине лежащего на боку заполненного газом и запаянного цилиндрического сосуда длиной L = 1 м находится тонкий поршень массой m = 1 кг и площадью $S = 10$ см^2. Если сосуд поставить на основание, то поршень переместится на расстояние l = = 10 см. Каково было начальное давление p газа в сосуде? Трение между стенками сосуда и поршнем отсутствует.*

Решение. Рассмотрим сосуд в горизонтальном и вертикальном положениях (рис.3). Запишем закон Бойля–Мариотта для газа в каждом отсеке сосуда и условие механического равновесия поршня:

$$p_1 \left(\frac{L}{2} - l \right) S = p \frac{L}{2} S ,$$

$$p_2 \left(\frac{L}{2} + l \right) S = p \frac{L}{2} S ,$$

$$mg + p_2 S = p_1 S .$$

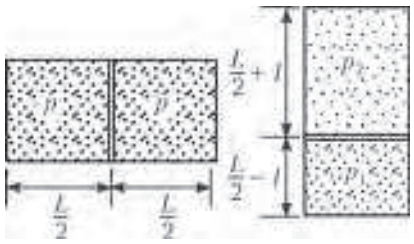

Рис. 3

Выразим из первого уравнения p_1, из второго – p_2 и подставим в третье уравнение. В результате из линейного уравнения найдем искомое неизвестное:

$$p = \frac{mg\left(L^2 - 4l^2\right)}{4lLS} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ Па} .$$

Задача 6. *Зимой в комнате был включен электронагреватель мощностью 1 кВт, который работал 1 час. Как изменилась внутренняя энергия воздуха в комнате?*

Решение. Окружающий нас воздух представляет собой смесь различных газов, но в основном это двухатомные газы кислород и азот. Поэтому внутренняя энергия воздуха равна

$$U = \frac{5}{2} \frac{m}{\text{M}} RT = \frac{5}{2} pV .$$

Объем комнаты V, естественно, постоянен. А что происходит с давлением p? Отметим, что реальное жилище – не наглухо изолированный от внешнего мира бункер. Как только включают нагреватель, давление в комнате слегка повышается по сравнению с атмосферным, и воздух через мельчайшие щелочки начинает выходить из комнаты. Давления внутри и вне тут же выравниваются, так что давление p остается постоянным. Но тогда постоянна и внутренняя энергия U, следовательно,

$$\Delta U = 0 .$$

Нагреватель же включили вовсе не для увеличения внутренней энергии воздуха, а чтобы в комнате стало теплее!

Задача 7 (физфак МГУ, 1977). *Идеальный газ медленно переводят из состояния с объемом V_1 = 32 л и давлением $p_1 = 4,1 \cdot 10^5$ Па в состояние с объемом V_2 = 9 л и давлением $p_2 = 15,5 \cdot 10^5$ Па так, что давление во время сжатия изменяется в зависимости от объема по линейному закону p = aV +b, где a и b – постоянные величины. При каком объеме температура газа в этом процессе будет наибольшей?*

Решение. По условию задачи имеем

$$p_1 = aV_1 + b ,$$

$$p_2 = aV_2 + b ,$$

$$p = aV + b .$$

Теперь последовательно исключаем величины b и a:

$$p - p_1 = a(V - V_1) ,$$

$$p_2 - p_1 = a(V_2 - V_1)$$

и получаем

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1}=\frac{V-V_1}{V_2-V_1}.$$

Из этого уравнения и из уравнения состояния

$$pV=\nu RT$$

легко выводится, что

$$T=\frac{(p_2-p_1)V^2+(p_1V_2-p_2V_1)V}{(V_2-V_1)\nu R},$$

т.е. зависимость температуры T от объема V представляет собой квадратичную функцию с отрицательным коэффициентом (при заданных значениях p_1, V_1, p_2, V_2) при старшем члене. Значит, наибольшее значение температуры достигается при

$$V=\frac{p_1V_2-p_2V_1}{2(p_1-p_2)}\approx 20{,}1\text{ л}.$$

Задача 8. *Некоторую массу m идеального газа с молярной массой M нагревают под поршнем так, что его температура, изменяясь пропорционального квадрату давления, возрастает от первоначального значения T_1 до конечного значения T_2. Определите работу, совершенную газом.*

Решение. Из уравнений

$$pV=\frac{m}{\mathrm{M}}RT,$$

$$T=\alpha p^2,$$

где $\alpha=\text{const}$, выражаем давление:

$$p=\frac{\mathrm{M}}{Rm\alpha}V=kV,\ \text{где } k=\text{const}.$$

Видим, что давление прямо пропорционально объему, т.е. непостоянно. В таком случае работа определяется с помощью интеграла:

$$A=\int_{V_1}^{V_2}p(V)\,dV.$$

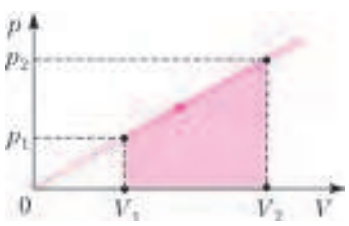

Рис. 4

Однако для линейных функций удобнее построить график в системе координат p, V (рис.4) и найти работу как площадь под графиком:

$$A=\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(p_1V_2-p_2V_1).$$

По закону Клапейрона–Менделеева,

$$p_1V_1=\frac{m}{\mathrm{M}}RT_1,\ \ p_2V_2=\frac{m}{\mathrm{M}}RT_2.$$

Кроме того,

$$p_1V_2-p_2V_1=kV_1V_2-kV_2V_1=0.$$

Следовательно,

$$A=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{mR}{2\mathrm{M}}(T_2-T_1).$$

Задача 9 (МФТИ, 1976). *В цилиндре под легким поршнем находится m = 14 г азота при T = 300 К. Какое количество теплоты необходимо ему сообщить при изотермическом увеличении объема на $\alpha=0{,}04$?*

Решение. По первому началу термодинамики,

$$Q=\Delta U+A.$$

Но в изотермическом процессе $U=\text{const}$, поэтому $\Delta U=0$. Значит,

$$Q=A.$$

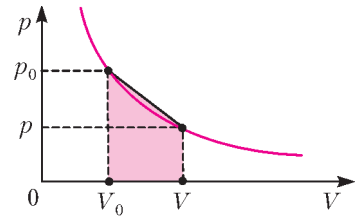

Рис. 5

При $T=\text{const}$ вычислить работу без интеграла, вообще говоря, нельзя. Однако, учитывая, что $\alpha\ll 1$, в первом приближении криволинейную трапецию можно заменить обычной, прямолинейной трапеции (рис.5). Тогда получим

$$Q=\left(\frac{p_0+p}{2}\right)(V-V_0).$$

Так как $V=V_0(1+\alpha)$, то

$$V-V_0=V_0\alpha.$$

Из уравнения $pV=p_0V_0$ выражаем p:

$$p=\frac{p_0V_0}{V}=\frac{p_0V_0}{V_0(1+\alpha)}\approx p_0(1-\alpha).$$

Следовательно,

$$Q=\left(\frac{p_0+p_0(1-\alpha)}{2}\right)V_0\alpha=p_0V_0\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{m}{\mathrm{M}}RT\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=48{,}8\text{ Дж}.$$

Интересно сравнить приведенное решение с решением, основанным на применении интеграла, т.е. строгим решением. В последнем случае

$$Q=A=\int_{V_1}^{V_2}p(V)\,dV=\int_{V_0}^{V_0(1+\alpha)}\frac{p_0V_0}{V}dV=$$

$$=p_0V_0\int_{V_0}^{V_0(1+\alpha)}\frac{1}{V}dV=\frac{m}{\mathrm{M}}RT\ln V\Big|_{V_0}^{V_0(1+\alpha)}=$$

$$=\frac{m}{\mathrm{M}}RT\ln(1+\alpha).$$

Разлагая натуральный логарифм в ряд:

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\ldots$$

и ограничиваясь тремя первыми членами, получим

$$Q=\frac{m}{\mathrm{M}}RT\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{3}\right).$$

Таким образом, относительная погрешность составляет всего

$$\frac{\alpha^2}{3}=5{,}3\cdot 10^{-4}.$$

Задача 10 (физфак МГУ, 1973). *Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа в цикле 1–2–3–4–1 (рис.6), если известны температуры T_1 и T_3 в точках 1 и 3 соответственно, причем эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.*

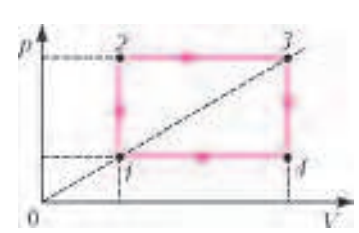

Рис. 6

Решение. Так как работа газа, совершенная им за цикл, равна площади фигу-

ры, ограниченной циклом (*только* в координатах p, V), то

$$A = (V_4 - V_1)(p_2 - p_1) = V_4p_2 - V_4p_1 - V_1p_2 + V_1p_1 =$$
$$= (V_1p_1 + V_3p_3) - (V_2p_2 + V_4p_4) =$$
$$= \nu RT_1 + \nu RT_3 - \nu RT_2 - \nu RT_4 = \nu R(T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

В системе уравнений

$$p_1V_1 = \nu RT_1,$$
$$p_2V_2 = \nu RT_2,$$
$$p_3V_3 = \nu RT_3,$$
$$p_4V_4 = \nu RT_4$$

уменьшаем индексы:

$$p_1V_1 = \nu RT_1,$$
$$p_2V_1 = \nu RT_2,$$
$$p_2V_3 = \nu RT_3,$$
$$p_1V_3 = \nu RT_4.$$

Так как точки *1* и *3* лежат на прямой, проходящей через начало координат, то

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{V_3}{V_1},$$

или (опять уменьшая индекс)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_3}{V_1}.$$

Из этого равенства, а также из второго и четвертого уравнений последней системы сразу вытекает

$$T_4 = T_2.$$

Теперь перемножим почленно первое и третье, а затем второе и четвертое уравнения системы:

$$p_1p_2V_1V_3 = (\nu R)^2 T_1T_3,$$
$$p_1p_2V_1V_3 = (\nu R)^2 T_2T_4.$$

Отсюда немедленно следует

$$T_2T_4 = T_1T_3, \text{ или } T_4 = T_2 = \sqrt{T_1T_3}.$$

Значит,

$$A = \nu R\left(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3}\right) = \nu R\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3}\right)^2.$$

Заметим, что здесь $\nu = 1$ моль. Если же просто опустить сомножитель ν, как единичный, то получится равенство неверной размерности.

Упражнения

1 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). За сколько циклов работы поршневого насоса с объемом цилиндра V_1 можно откачать газ из стеклянного баллона объемом V до давления p, если вначале давление в баллоне было равно атмосферному давлению p_0?

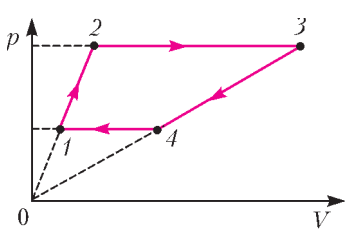

Рис. 7

2 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). Параметры идеального одноатомного газа, взятого в количестве $\nu = 3$ моль, изменились по циклу, изображенному на рисунке 7. Температуры газа в состояниях, отмеченных цифрами, равны $T_1 = 400$ К, $T_2 = 800$ К, $T_4 = 1200$ К. Определите работу, которую совершил газ за цикл.

3 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). Моль идеального газа медленно нагревают так, что он переходит из состояния (p_0, V_0) в состояние $(2p_0, 2V_0)$. Как при этом изменяется температура газа T в зависимости от его объема V, если зависимость давления газа от объема на графике изображается прямой линией? Определите также работу A, совершаемую газом в этом процессе.

4 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). Один моль идеального газа изменяет свое состояние по циклу, изображенному на рисунке 8. Процессы *4–1* и *2–3* – изохорные, процесс *3–4* – изобарный, *1–2* – процесс с линейной зависимостью давления от объема. Температуры в состояниях *1*, *2*, *3*, *4* равны T_1, T_2, T_3, T_4 соответственно. Какую работу совершает газ за один цикл?

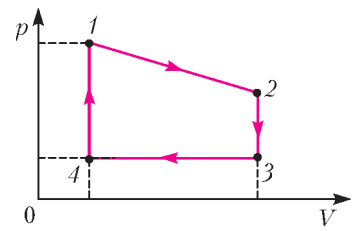

Рис. 8

5 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). В вертикальном цилиндре с площадью поперечного сечения S под поршнем, масса которого M, находится 1 моль идеального одноатомного газа. В некоторый момент времени под поршнем включается нагреватель, передающий газу за единицу времени количество теплоты q. Определите установившуюся скорость v движения поршня при условии, что давление газа над поршнем постоянно и равно p_0, а газ под поршнем теплоизолирован.

6 (физфак МГУ, 1971). Два одинаковых баллона соединены короткой трубкой, в которой имеется клапан давления, пропускающий газ из одного баллона в другой при разности давлений $\Delta p \geq 80$ см рт.ст. Один баллон наполнен газом, имеющим при температуре $T_1 = 290$ К давление $p = 760$ мм рт.ст., в другом баллоне – вакуум. Какое давление установится в баллонах, если их нагреть до температуры $T_2 = 382$ К?

7 (МФТИ, 1976). В герметичном сосуде объемом $V = 5{,}6$ л содержится воздух при давлении $p = 760$ мм рт.ст. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить количество теплоты $Q = 1430$ Дж? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V = 21$ Дж/(моль · К).

8 (МФТИ, 1979). В цилиндре под поршнем содержится $\nu = 0{,}5$ моль воздуха при температуре $T_0 = 300$ К. Во сколько раз увеличится объем газа при сообщении ему количества теплоты $Q = 13{,}2$ кДж? Молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна $C_p = 29{,}1$ Дж/(моль · К).

9 (МФТИ, 1981). С какой максимальной силой прижимается к телу человека медицинская банка, если диаметр ее отверстия $D = 4$ см? В момент прикладывания банки к телу воздух в ней прогрет до температуры $t = 80$ °С, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20$ °С. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Изменением объема воздуха в банке (из-за втягивания кожи) можно пренебречь.

10 (МФТИ, 1991). Моль идеального одноатомного газа расширяется сначала в изобарном процессе, а затем – в процессе с линейной зависимостью давления от объема (рис.9). Известно, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$, а прямая *2–3* проходит через начало координат. Найдите отношение объемов $\frac{V_2}{V_1}$, если количество теплоты Q_{12}, подведенное к газу на участке *1–2*, в четыре раза меньше работы A_{23}, совершенной газом на участке *2–3*.

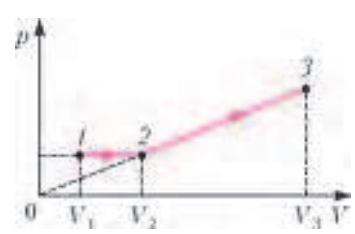

Рис. 9