И. Л. Гуревич, Плоская задача безотрывного обтекания мягкой оболочки тяжелой жидкостью,
Тр. сем. по краев. задачам, 1990, выпуск 24, 79–87

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б. Импульсно-гидродинамические схемы расчета взрыва на выброс шнуровых зарядов. — ФТПРПИ, 1973, № 4, с. 32—39.
2. Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. Новосибирск, 1977. — 264 с.
3. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О гидродинамическом взаимодействии шнуровых зарядов ВВ. — ПМТФ, 1975, № 5, с. 93—101.
4. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Определение выемки выброса при взрыве заглубленного шнурового заряда в двухслойной среде. — ПМТФ, 1978, № 2, с. 109—114.
5. Поляк Э. Б. О форме воронки выброса при взрыве вертикальных зарядов. — ФТПРПИ, 1974, № 3, с. 118—122.
6. Ильинский Н. Б., Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. Некоторые задачи о взрыве заглубленных зарядов. — Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1975, вып. 12, с. 63—75.
7. Ильинский Н. Б., Салимов Р. Б. Обратная задача теории взрыва. — Изв. вузов. — Математика, 1974, № 2, с. 51—57.
8. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. — ПМТФ, 1960, № 3, с. 152—157.
9. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций. — УМН, 1975, т. 30, вып. 4, с. 30—60.
10. Положий Г. Н. О движении граничных точек отображаемых областей. — УМН, 1952, т. 7, вып. 6, с. 203—205.
11. Виниченко А. А. Об одном аналоговом методе решения краевых задач теории взрыва. — Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1984, вып. 21, с. 40—49.

Доложено на семинаре 1 февраля 1983 г.

УДК 532.5

И. Л. Гуревич

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА БЕЗОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В [1] исследовалась плоская задача обтекания мягкой оболочки (или газового пузыря) невесомой несжимаемой идеальной жидкостью. Оболочка имела две оси симметрии и была кривой Ляпунова (ее форма должна определяться при решении задачи). В данной статье учитывается действие силы тяжести, параллельной или перпендикулярной к потоку (в первом случае циркуляция задается равной нулю, а во втором — неотрицательной). Это приводит к наличию лишь одной оси симметрии и к необходимости учитывать условие замкнутости оболочки. Кроме того, необходимо закрепить ее хотя бы в одной точке, которая оказывается угловой. Для неизвестной величины этого угла выводится уравнение, являющееся одновременно условием равновесия оболочки и условием ее замкнутости. Оно вместе с другим уравнением (относительно переменной кривизны оболочки) образует систему, и ее разрешимость доказывается с помощью принципа Лере — Шаудера.

Заметим, что случай течения невесомой жидкости с ненулевой циркуляцией рассматривался в [2], но не было учтено условие замкнутости (точка закрепления не считалась угловой).

1. Случай параллельности потока и силы тяжести

Рассмотрим сначала в плоскости $z=x+iy$ оболочку (замкнутую кривую Γ длиной $2L$, симметричную относительно оси x), закрепленную в точках $A(X,0)$ и $B(0,0)$, где $X>0$. Касательные в каждой из этих точек образуют между собой внутренние углы, равные соответственно 2α и 2β (α, $\beta\in(0,\pi/2)$), причем X и β неизвестны. Вектор скорости жидкости на бесконечности имеет координаты $(V_0, 0)$, а вектор ускорения силы тяжести равен $(-g, 0)$. Докажем существование бесциркуляционного обтекания такой оболочки при $\alpha<\pi/2$, а затем предельным переходом получим разрешимость задачи при $\alpha=\pi/2$ (когда имеется лишь одна точка закрепления B).

Введем обозначения: V — скорость; ρ_e, p_e, C_e — соответственно плотность, давление и константа Бернулли в движущейся жидкости; ρ_i, p_i, C_i — те же величины в неподвижной жидкости внутри оболочки; w — комплексный потенциал; s — дуговая абсцисса на верхней половине оболочки, $s(B)=0$, $s(A)=L$; $\Phi(s)$ — угол между касательной и осью x, $\Phi(0)=\beta$, $\Phi(L)=-\alpha$; $T=\mathrm{const}>0$ — сила натяжения оболочки; $\varphi_0=w(A)-w(B)$ ($\Phi(s)$, T, φ_0 неизвестны). Запишем условие равновесия элемента оболочки и уравнение Бернулли для обеих жидкостей

$$d\Phi/ds=(p_e-p_i)/T,\quad p_e+\rho_e V^2/2+\rho_e g x=C_e,\quad p_i+\rho_i g x=C_i. \tag{1}$$

Пусть верхней половине течения конформно соответствует верхний единичный полукруг в плоскости $\zeta=\zeta(z)=re^{i\sigma}$, причем $\zeta(\infty)=0$, $\zeta(0)=1$, $\zeta(X)=-1$. Тогда

$$\begin{gathered} w=-\varphi_0(\zeta+\zeta^{-1})/4,\quad dw/dz=V_0 e^{\omega(\zeta)},\quad \omega(e^{i\sigma})=\tau(\sigma)-i\theta(\sigma),\\ \omega(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots,\quad \operatorname{Im} a_j=0 \end{gathered} \tag{2}$$

(ряд для $\omega(\zeta)$ сходится в замкнутом полукруге, кроме точек $\zeta=\mp 1$, где $\omega\sim 2\alpha\pi^{-1}\ln(\zeta+1)$, $\omega\sim 2\beta\pi^{-1}\ln(\zeta-1)$).

В дальнейшем используются также следующие обозначения:

$$F_t[\tau,\theta]=\sin\sigma\Big[(\varkappa+1-t)e^{-\tau}+t\nu e^{-\tau}I^{-1}\int_0^\sigma \sin\sigma\cos\theta\, e^{-\tau}\,d\sigma+t e^{\tau}\Big],$$

$$H_t[\tau,\theta]=\left(\int_0^\pi F_t\,d\sigma\right)^{-1},\quad R^{\pm}[\tau,\theta]=\int_0^\pi \sin\sigma\sin\theta\, e^{\pm\tau}\,d\sigma,$$

$$P_t[\tau,\theta]=t\nu I^{-1}H_t\int_0^{\pi}\sin\sigma\sin\theta\, e^{-\tau}d\sigma\int_0^{\sigma}\sin\xi\cos\theta(\xi)e^{-\tau(\xi)}d\xi,$$

$$I[\tau]=\int_0^{\pi}\sin\sigma\, e^{-\tau}d\sigma,\quad S[\theta]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\theta(\xi)\frac{\sin\xi\, d\xi}{\cos\xi-\cos\sigma},$$

$$G(\beta)=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\alpha+\beta},$$

$\nu=2(p_e-p_i)Lg\rho_e^{-1}V_0^{-2}$, $\varkappa=2(C_i-C_e)\rho_e^{-1}V_0^{-2}$, $M=L\rho_e V_0^2(2IT)^{-1}$, где $t\in[0,1]$ — переменный параметр. Отметим, что $G(0)>0$, $G(\alpha)=0$, $G(\pi/2)<0$. Из (1), (2) легко получить

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}(e^{i\sigma})\right|=\frac{\varphi_0}{2}\sin\sigma,\quad \frac{dz(e^{i\sigma})}{d\sigma}=LI^{-1}\sin\sigma\, e^{-\omega},\quad \varphi_0=2LV_0I^{-1},\quad (3)$$

$$V(e^{i\sigma})=V_0e^{\tau},\quad \Phi(s)=\theta(\sigma),\quad \theta(0)=\beta,\quad \theta(\pi)=-\alpha,\quad \frac{d\theta}{d\sigma}=-MF_1[\tau,\theta].$$

Последние три соотношения представляют собой нелинейное краевое условие для $\omega(\zeta)$ при $\zeta=e^{i\sigma}$ $(0<\sigma<\pi)$. Имея в виду применение принципа Лере—Шаудера, заменим F_1 на F_t. Находя M и выражая τ через θ по формуле Гильберта, будем иметь

$$\frac{d\theta}{d\sigma}=-MF_t[\tau,\theta],\quad \theta(\pi)=-\alpha,\quad M=(\alpha+\beta)H_t[\tau,\theta],\quad \tau=S[\theta].\quad (4)$$

Пусть выполняется дополнительно условие $R^-[\tau,\theta]=0$. Тогда при любом $t\in[0,1]$, находя $\omega(\zeta)$, а затем $w(\zeta)$ и $z(\zeta)$ из (2), получаем решение задачи обтекания некоторой замкнутой симметричной относительно оси x кривой Γ_t длины $2L$, имеющей в точках A, B те же внутренние углы 2α, 2β $(\Gamma_1=\Gamma)$. Заметим, что повторный интеграл, входящий в P_t, равен $(I/L)^2A_t$, где A_t — площадь области, ограниченной Γ_t.

Умножим первое из уравнений (4) на $\sin\theta$ и проинтегрируем по $(0,\pi)$; с учетом выражения для M из (4) это дает

$$G(\beta)=P_t[\tau,\theta]+H_t[\tau,\theta]\{(\varkappa+1-t)R^-[\tau,\theta]+tR^+[\tau,\theta]\}.\quad (5)$$

Потребуем выполнения равенства

$$G(\beta)=P_t[\tau,\theta]\quad (6)$$

(легко показать, что при $t=1$ (6) есть условие равновесия системы сил тяжести, давления и реакций закрепления). Тогда, если $\varkappa\geqslant 0$, то из (5) и получаемых с помощью теории вычетов соотношений $R^+=R^-=-\pi a_1$ будет вытекать условие замкнутости Γ_t: $R^-[\tau,\theta]=0$. Таким образом, приходим к системе уравнений (4),

(6) относительно $\theta(\sigma)$, β. Ее разрешимость будет доказана при следующих условиях на исходные параметры:

$$\nu \geqslant 0, \quad \varkappa \geqslant 0, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < \pi/2, \tag{7}$$

которые в дальнейшем считаем выполненными.

Пусть $C_\delta[a, b]$ — пространство гельдеровых на $[a, b]$ с показателем δ функций, R — числовая ось, $E_\delta = C_\delta[0, \pi] \times R$. Пусть x, x_1, $x_2 \in R$, причем $x_1 < x_2$. Введем функцию $\lambda(x, x_1, x_2)$ следующим образом: $\lambda = x_1$ $(x < x_1)$, $\lambda = x$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$, $\lambda = x_2$ $(x > x_2)$. Пусть $u = (\theta, \beta) \in E_\delta$, $0 < \delta < 1$. Рассмотрим преобразование $W_t[u]$, определяемое ниже.

Сначала находим $f(\sigma) = \lambda(\theta, -\pi/2, \pi/2)$, затем $\tau(\sigma) = S[f]$, причем $\tau \in C_\delta[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $|\tau| < |\ln \sin \sigma| + c$. Находим $F_t[\tau, f] \geqslant 0$, $H_t[\tau, f] > 0$, $P_t[\tau, \theta]$, а затем $\beta_1 = G^{-1}[\lambda(P_t, G(\pi/2), G(0))]$, причем $\beta_1 \in [0, \pi/2]$. Наконец, получаем $M = (\alpha + \beta_1) H_t$ и $\theta_1 \in C_1[0, \pi]$ из (4), причем $\theta_1(0) = \beta_1$, $\theta_1(\pi) = -\alpha$. Положим $u_1 = (\theta_1, \beta_1) = W_t[u]$.

Лемма 1. *Пусть $u = W_t[u] \in E_\delta$, $0 < \beta < \pi/2$. Тогда $G(\pi/2) < P_t < G(0)$, $\theta_1 \in C_1[0, \pi]$, $d\theta/d\sigma \leqslant 0$, $-\pi/2 < -\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta < \pi/2$, пара (θ, β) удовлетворяет системе (4), (6), и соответствующая Γ_t — замкнутая выпуклая кривая.*

Лемма 2. *Оператор W_t вполне непрерывен по u в E_δ и равностепенно непрерывен по t в каждом шаре из E_δ.*

Доказательства обеих лемм достаточно просты, и мы их не приводим.

Получим априорные оценки решения u, удовлетворяющего условиям леммы 1.

1°. Так как $d\theta/d\sigma \leqslant 0$, то из представления

$$\tau(\sigma) = 2 \ln \left[\left(\cos \frac{\sigma}{2} \right)^{\alpha/\pi} \left(\sin \frac{\sigma}{2} \right)^{\beta/\pi} \right] - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \ln \frac{2}{|\cos \xi - \cos \sigma|} d\xi$$

вытекает $e^\tau \geqslant 2^{-1} \sin \sigma$, откуда $l < 2\pi$. Далее, справедливы неравенства (здесь и ниже c_j — абсолютные положительные постоянные).

$$\int_0^\sigma \sin \sigma e^{\pm \tau} d\sigma \geqslant c_1 \sigma^2 \exp(-c_2 \sigma^{-1/2}) = \mu(\sigma), \quad \int_\sigma^\pi \sin \sigma e^{\pm \tau} d\sigma \geqslant \mu(\pi - \sigma). \tag{8}$$

Для их доказательства используются неравенства Иенсена и Гёльдера, ограниченность оператора S в пространстве L_2 (теорема Рисса) и оценка $|\theta| < \pi/2$. Из (8), (4) получаются оценки $l > c_3$, $M < c_4$.

2°. Умножим первое из уравнений (4) на $\cos \theta$ и проинтегрируем по $(0, \pi)$; с учетом неравенства $e^\tau \geqslant 2^{-1}\sin\sigma$, теоремы о среднем значении и условия $\omega(0)=0$ будем иметь

$$\sin\alpha+\sin\beta < M[c_5(\varkappa+\nu+1)+\int_0^\pi e^\tau\cos\theta\, d\sigma] = M[c_5(\varkappa+\nu+1)+1],$$

откуда $M > c_6\alpha_0(\varkappa+\nu+1)^{-1}=M_0$.

С помощью этой оценки и (8) получим из (4): $-\pi/2+M_0\mu(\pi-\sigma)\leqslant\theta(\sigma)\leqslant\pi/2-M_0\mu(\sigma)$. Пусть $\mu_1(\sigma)=2^{-1}M_0[\mu(\pi-\sigma)-\mu(\sigma)]$. Имеем $\mu_1\in C_1[0,\pi]$, $|\mu_1|<c_7<\pi/2$, $|\theta-\mu_1|\leqslant\pi/2-c_8M_0$. Из первых двух оценок вытекает, что $S[\mu_1]<c_9|\ln\sin\sigma|+c_{10}$; отсюда и из третьей оценки с помощью теоремы Зигмунда ([3], с. 200) можно получить

$$\int_0^\pi (\sin\sigma\, e^\tau)^p d\sigma < N_0 = N_0(\alpha_0,\varkappa,\nu),\quad p=p(\alpha_0,\varkappa,\nu)>1. \tag{9}$$

Так как $M\leqslant c_4$, то применение неравенства Гёльдера с учетом (9) и оценки $2e^\tau\geqslant\sin\sigma$ дает $\|\theta\|_\delta<N$, где норма берется в $C_\delta[0,\pi]$, а δ и N зависят лишь от α_0, $\varkappa$, ν ($\delta\in(0,1)$).

3°. Последовательно получим оценки

$$0\leqslant P_t < A_t(l/L)^2\left(\int_0^\pi \sin\sigma\, e^{-\tau}d\sigma\int_0^\sigma \sin\xi\cos\theta(\xi)e^{-\tau(\xi)}d\xi\right)^{-1} =$$

$$=A_t\left(\int_0^L x(s)\,ds\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}X^2\operatorname{tg}\beta\right)\left(\int_0^X x\,dx\right)^{-1} = \operatorname{tg}\beta.$$

Вместе с (6) они дают $0\leqslant\beta_*<\beta\leqslant\alpha$, где β_* зависит лишь от α_0. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *В условиях леммы 1 справедливы оценки* $\|\theta\|_\delta<N$, $0<\beta_*<\beta\leqslant\alpha$, *причем* δ *и* N *зависят лишь от* α_0, γ, ν, *а* β_* — *лишь от* α_0.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (7). *Тогда система* (4), (6) *имеет хотя бы одно решение* $(\theta,\beta)\in E_\delta$, *причем* $\theta\in C_1[0,\pi]$, $d\theta/d\sigma\leqslant 0$, $0<\beta\leqslant\alpha$.

Для доказательства введем замкнутое подмножество $\Omega\subset E_\delta$: $\Omega=\{u=(\theta,\beta)\colon \|\theta\|_\delta\leqslant N,\ \beta_*\leqslant\beta\leqslant\pi/4+\alpha/2\}$. По лемме 3 уравнение $u=W_t[u]$ не имеет решений на $\partial\Omega$. Рассмотрим преобразование $W_0[u]=(\theta_1,\alpha)$, где

$$\theta_1(\sigma)=-\alpha+2\alpha l^{-1}\int_0^\sigma \sin\sigma\, e^{-\tau}d\sigma,\quad \tau=S[f]$$

(уравнение $u=W_0[u]$ соответствует обтеканию кривой Γ_0, состоящей из двух круговых дуг).

Заменим τ в выражении для θ_1 на $k\tau$ ($k\in[0, 1]$) и получим преобразование $U_k[u]$, причем $W_0=V_1$. Очевидно, уравнение $u=U_k[u]$ также не имеет решений на $\partial\Omega$. Заметим, что $U_0[u]=(-\alpha\cos\sigma, \alpha)$ лежит внутри Ω. Таким образом, степень вращения векторных полей $u-W_t[u]$ и $u-U_k[u]$ на $\partial\Omega$ при всех t и k равна 1 [4]. По теореме Лере — Шаудера каждое из этих уравнений имеет хотя бы одно решение внутри Ω. В частности, существует решение уравнения $u=W_1[u]$, удовлетворяющее системе (4), (6) и условиям $d\theta/d\sigma\leqslant 0$, $0<\beta\leqslant\alpha$.

Теорема 2. *Пусть выполены условия* $\nu\geqslant 0$, $\varkappa\geqslant 0$, $\alpha=\pi/2$. *Тогда система* (4), (6) *имеет хотя бы одно решение.*

Так как оценки $\|\theta\|_\delta<N$, $0<\beta\leqslant\pi/2$ не зависят от α при $\alpha\in[\alpha_0, \pi/2]$, а оператор W_t компактный, то из последовательности решений u_n при $\alpha_n\to\pi/2-0$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в E_δ к некоторому пределу u. Из непрерывности W_t вытекает, что u удовлетворяет (4), (6) при $\alpha=\pi/2$, и теорема доказана.

2. Случай ортогональности потока и силы тяжести

Рассмотрим в плоскости $z=x+iy$ оболочку (замкнутую кривую Γ длины $2L$, симметричную относительно оси y), закрепленную в точках $A(0, Y)$, $B(0, 0)$, где $Y>0$. Внутренние углы в этих точках равны 2α и 2β (α, $\beta\in(0, \pi/2)$), причем Y и β неизвестны. Векторы скорости на бесконечности и ускорения силы тяжести равны соответственно $(V_0, 0)$ и $(0, -g)$. Пусть T, ρ_e, p_e, C_e, ρ_i, p_i, C_i, V, $\Phi(s)$, $G(\beta)$ — те же величины, что и в п. 1, но теперь s — дуговая абсцисса на левой половине оболочки, $s(B)=0$, $s(A)=L$, $\Phi(0)=\pi/2+\beta$, $\Phi(L)=\pi/2-\alpha$ ($\Phi(s)$ и T неизвестны).

Пусть левой половине течения соответствует правый единичный полукруг в плоскости $\zeta=\zeta(z)=re^{i\sigma}$, причем $\zeta(\infty)=0$, $\zeta(0)=-i$, $\zeta(iY)=i$. Тогда

$$w=-\varphi_0\left(i\gamma\ln\zeta+\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}\right),\qquad \frac{dz}{d\zeta}=\frac{\varphi_0}{2V_0}\zeta^{-2}e^{-\omega(\zeta)}$$

$$\omega(e^{i\sigma})=\tau(\sigma)+i\theta(\sigma),\quad \omega(\zeta)=i(a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots),\ \operatorname{Im}a_k=0, \tag{10}$$

где $\varphi_0>0$ — неизвестное число, а параметр γ (безразмерная циркуляция) задается. Ряд для $\omega(\zeta)$ сходится в замкнутом полукруге, кроме точек $\zeta=\mp i$, где $\omega\sim(1-2\beta/\pi)\ln(\zeta+i)$, $\omega\sim(1-2\alpha/\pi)\ln(\zeta-i)$.

Введем следующие обозначения (при $t\in[0, 1]$):

$$\mu(\sigma)=\frac{d\theta}{d\sigma},\quad I[\tau]=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\tau}d\sigma,\quad D[\mu]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mu(\xi)\ln\frac{2}{|\sin\xi-\sin\sigma|}d\xi,$$

$$F_t[\tau,\theta]=(\varkappa+1-t)e^{-\tau}+t\,\nu I^{-1}e^{-\tau}\int\limits_{-\pi/2}^{\sigma}e^{-\tau}\cos(\theta+\sigma)\,d\sigma+t(\sin\sigma+\gamma)^2e^{\tau}$$

$$H_t[\tau,\theta]=\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}F_t\,d\sigma\right)^{-1},\quad R^-[\tau,\theta]=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\tau}\sin(\theta+\sigma)\,d\sigma,$$

$$R^+[\tau,\theta]=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\sigma+\gamma)^2e^{\tau}\sin(\theta+\sigma)\,d\sigma,$$

$$P_t[\tau,\theta]=\nu I^{-1}H_t\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\tau}\sin(\theta+\sigma)\,d\sigma\int\limits_{-\pi/2}^{\sigma}e^{-\tau(\xi)}\cos(\theta(\xi)+\xi)\,d\xi,$$

$$\nu=\frac{(\rho_e-\rho_i)Lg}{2\rho_eV_0^2},\quad \varkappa=\frac{C_i-C_e}{2\rho_eV_0^2},\quad M=\frac{2L\rho_eV_0^2}{IT}.$$

Из уравнений (1) и (10) имеем

$$\frac{dz}{d\sigma}=LI^{-1}e^{-\omega+i\sigma},\quad V(e^{i\sigma})=2V_0|\sin\sigma+\gamma|e^{\tau},\tag{11}$$

$$\Phi(s)=-\theta(\sigma)-\sigma+\frac{\pi}{2},\quad \theta\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\beta,$$

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+\alpha,\quad \mu(\sigma)=MF_1-1.$$

Как и в п. 1, заменим F_1 на F_t. Находя M и преобразуя формулу Гильберта, выражающую τ через θ, получим из (11)

$$\mu=MF_t[\tau,\theta]-1,\quad M=(\alpha+\beta)H_t[\tau,\theta],\quad \theta(\sigma)=\frac{\pi}{2}-\sigma+\int\limits_{-\pi/2}^{\sigma}\mu\,d\sigma,$$

$$\tau(\sigma)=D[\mu]+\frac{\pi-\alpha}{2\pi}\ln\frac{2}{1-\sin\sigma}+\frac{\pi-\beta}{2\pi}\ln\frac{2}{1+\sin\sigma}.\tag{12}$$

Умножим первое из уравнений (12) на $\sin(\theta+\sigma)$ и проинтегрируем по $(-\pi/2,\ \pi/2)$. С учетом второго уравнения это, как и в п. 1, дает (5). С помощью теории вычетов найдем $R^-=\pi a_1$, $R^+=\pi(\gamma-a_1/4)$. Теперь (5) можно придать вид $G(\beta)=K_t[\tau,\theta]+\pi a_1H_t[\tau,\theta](\varkappa+1-5t/4)$, $K_t=P_t+\pi t\gamma H_t$.

Потребуем выполнения равенства

$$G(\beta)=K_t[\tau,\theta]\tag{13}$$

(при $t=1$ оно равносильно условию равновесия сил, действующих на оболочку). Тогда если $\varkappa>1/4$, то $a_1=0$, то есть выполняется равенство $R^-=0$ — условие замкнутости кривой Γ_t (как и в п. 1, $\Gamma_1=\Gamma$, а повторный интеграл, входящий в P_t, равен $(l/L)^2 A_t$).

Таким образом, приходим к системе уравнений (12), (13) относительно $\mu(\sigma)$, β. Ее разрешимость будет доказана при выполнении условий

$$\varkappa>\varkappa_0(\alpha_0,\gamma,\nu)>1/4,$$

$$\nu\geqslant 0,\quad 0<\alpha_0\leqslant\alpha<\pi/2,\quad \gamma>0,\quad \gamma\neq 1 \tag{14}$$

(в отличие от п. 1 здесь не удается при произвольном $\varkappa\geqslant 0$ оценить M снизу). В дальнейшем эти условия считаем выполненными. Случай $\gamma=1$ требует отдельного, хотя и более простого, доказательства.

Пусть $\delta\in(0,\pi/2)$, $C(\delta)$ — пространство функций $\mu(\sigma)$, непрерывных на $(-\pi/2,\pi/2)$ и таких, что норма $\|\mu\|_\delta=\sup(|\mu(\sigma)|(\cos\sigma)^q)$ конечна, где $q=q(\delta)=1-2\delta/\pi$. Пусть R — числовая ось, $E(\delta)=C(\delta)\times R$, $u=(\mu,\beta)$, $\lambda(x,x_1,x_2)$ — введенная в п. 1 функция, $d(\delta)=\sup D[(\cos\sigma)^{-q}]$ ($d(0)=\infty$, $d(\pi/2)=\ln 4$), a и b — некоторые числа $(0<b<a<\alpha)$. Дадим описание преобразования $W_t[u]$, где $u\in E(b)$.

Находим $\beta'=\lambda(\beta,a,\pi/2)$, $\mu'=\sup(-1,\mu)$. Находим θ, τ из (12), заменяя β на β', μ на μ', после чего вводим $f(\sigma)=\lambda(\theta+\sigma,-\pi/2,\pi/2)$. Находим $F_t\geqslant 0$, $H_t>0$, K_t, заменяя $\theta+\sigma$ на $f(\sigma)$. Затем вводим $K_t'=\lambda(K_t,G(\pi/2),G(a))$ и из уравнения (13) получаем $\beta_1=G^{-1}(K_t')\in[a,\pi/2]$. Наконец, находим из (12) $M=(\alpha+\beta_1)H_t$ и $\mu_1=MF_t-1\geqslant -1$. Получим в итоге $(\mu_1,\beta_1)=W_t[u]$.

Лемма 3. *Пусть* $u=W_t[u]\in E(b)$, $a<\beta<\pi/2$. *Тогда* $G(\pi/2)<K_t<G(a)$, $-\pi/2+\alpha\leqslant\theta\leqslant\pi/2-\beta$, *пара* (μ,β) *удовлетворяет системе* (12), (13), *и соответствующая* Γ_t — *замкнутая выпуклая кривая.*

Лемма 4. *Оператор* W_t *переводит* $E(b)$ *в* $E(a)$ *и вполне непрерывен в* $E(b)$.

Доказательства обеих лемм опустим; отметим лишь, что при доказательстве компактности W_t используется неравенство $b<a$.

Получим априорные оценки решения u, удовлетворяющего условиям леммы 3. Введем обозначения $N(\nu,\delta)=4+8\nu+1/d(\delta)$, $h(\delta,\gamma,\nu)=d(\delta)(1+\gamma)^2\exp[(4+8\nu)d(\delta)+1]$ $(h\geqslant 256\,e\ln 4)$.

Лемма 5. *Пусть* $u=W_t[u]\in E(b)$, $0<\beta<\pi/2$, $\varkappa>h(b,\gamma,\nu)$. *Тогда*

$$\|\mu\|_b\neq N(\nu,b),\quad 0\leqslant K_t<\operatorname{tg}\beta+m(\beta,\gamma),\quad m(0,\gamma)=0\quad(\gamma\neq 1). \tag{15}$$

Для доказательства применяются неравенство Иенсена, равенство нулю интеграла от $\tau(\sigma)$ по $(-\pi/2,\pi/2)$, положительность оператора D, неравенства $\mu\geqslant -1$ и $0\leqslant P_t<\operatorname{tg}\beta$ (см. п. 1).

Из (13) и последнего неравенства в (15) вытекает $\beta_*<\beta\leqslant\alpha$, где $\beta_*\in(0,\alpha)$ и зависит лишь от α_0. Положим $a=\beta_*-\varepsilon$, $b=\beta_*-2\varepsilon$ $(\varepsilon\in(0,\beta_*/2))$.

Теорема 3. *Пусть выполнено (14) и* $\varkappa>h(\beta_*,\gamma,\nu)$. *Тогда* *система (12), (13) имеет хотя бы одно решение* $(\mu, \beta) \in E(b)$ *при достаточно малом* ε, *причем* $\mu \geqslant 1$, $0 < \beta \leqslant \alpha$.

Для доказательства введем $\Omega = \{u = (\mu, \beta): \ \|\mu\|_b \leqslant N(\nu, b)$, $\beta_* \leqslant \beta \leqslant \alpha/2 + \pi/4$. По лемме 5 уравнение $u = W_t[u]$ не имеет решений на $\partial\Omega$. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным при доказательстве теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* $\nu \geqslant 0$, $\alpha = \pi/2$, $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, $\varkappa > h(\beta_*, \gamma, \nu)$. *Тогда система (12), (13) имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство опирается на полную непрерывность оператора W_t и равномерность оценок $\|\mu\|_b < N(\nu, b)$, $0 < \beta < \pi/2$ при $\alpha \in [\alpha_0, \pi/2]$.

В заключение отметим, что случай чисто циркуляционного обтекания ($V_0 = 0$, $\varkappa = \infty$) приводится к уравнению

$$\mu = M'(e^{-\tau} - \nu' I^{-1} e^{-\tau} \int_{-\pi/2}^{\sigma} e^{-\tau} \cos(\theta + \sigma)\, d\sigma + \gamma' e^{\tau}) - 1,$$

где $\nu' = Lg(\rho_e - \rho_i)(C_i - C_e)^{-1}$, $\gamma' = 2\rho_e \Gamma'(C_i - C_e)^{-1}$, Γ' — циркуляция. Разрешимость этой задачи доказывается аналогично предыдущему при выполнении условий $\nu' \geqslant 0$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $0 < \gamma' < \gamma'_0(\nu', \alpha_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич И. Л. О разрешимости задачи обтекания газового пузыря плоским потоком жидкости. — ИВУЗ. Математика, 1986, № 7, с. 19—24.
2. Beyer K. Existenzbewies fur ein Randwertproblem mit freien Rand. — Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1966, Bd. 23, N. 1, S. 15—25.
3. Биркгоф Э., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., 1964. — 466 с.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956. — 392 с.

Доложено на семинаре 23 января 1986 г.

УДК 532.5

Н. Б. Ильинский, В. К. Краснов

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ВЗРЫВА НА ВЫБРОС ПО МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТВЕРДО-ЖИДКОСТНОЙ МОДЕЛИ

Разработке и исследованию методов решения осесимметричных задач обтекания в нелинейной постановке, а также задач взрыва на выброс по струйной гидродинамической модели посвя-