Ф. Ф. СУЛТАНБЕКОВ

О РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЯХ ТРЕУГОЛЬНИКА

В заметке предлагается альтернативное определение функции треугольника, названной $\widetilde{B}$-функцией. Его полезность иллюстрируется конструкцией некоторых $\widetilde{B}$-функций, для которых выполнен закон сокращения.

Пусть $\widetilde{B}$ — семейство непрерывных слева, невозрастающих функций $\alpha:(0, 1]\to R_+$, упорядоченное стандартным образом: $\alpha\leqslant\beta\Leftrightarrow\alpha(t)\leqslant\beta(t)$, $t\in(0, 1]$. Функция θ, тождественно равная нулю, является наименьшим элементом $\widetilde{B}$. Обычным образом определяется умножение функций из $\widetilde{B}$ на неотрицательные вещественные числа.

Ассоциативный, коммутативный закон композиции $\vee$ на $\widetilde{B}$, согласованный с порядком в $\widetilde{B}$, назовем *$\widetilde{B}$-функцией*, если θ нейтральный элемент относительно $\vee$. Аналогично работе [1], обозначений и терминологии которой мы придерживаемся, можно показать, что если S ассоциативный, коммутативный, согласованный с порядком в R_+ закон композиции на R_+ с нулевым нейтральным элементом и непрерывный справа, то есть $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0,\,\delta\downarrow 0} S(a+\varepsilon, b+\delta)=S(a, b)$, $a, b\in R_+$, то законы композиций на $\widetilde{B}$, заданные соотношениями

$$S(a, \beta)(t)=S(\alpha(t), \beta(t)),\ t\in(0, 1]$$

$$\vee_S(\alpha, \beta)(t)=\inf_{\lambda\in(0,1)} S\left(\frac{1}{\lambda}\alpha(t), \frac{1}{1-\lambda}\beta(t)\right),\ t\in(0, 1],$$

являются $\widetilde{B}$-функциями.

Пусть B — множество „хвостов“ функций распределения неотрицательных случайных величин. Тогда отображение $\varkappa: B\to\widetilde{B}$, $\varkappa(\xi)(t)=\inf\{x:\xi(x)<t\}$, $\xi\in B$, $t\in(0, 1]$ является изотонным, причем $\varkappa(\lambda_{\circ}\xi)=\lambda\varkappa(\xi)$, $\varkappa(\Delta)=\theta$, $\varkappa^{-1}(\alpha)(x)=\sup\{t:\alpha(t)\geqslant x\}$ $\xi, \Delta\in B$; $\alpha, \theta\in\widetilde{B}$; $\lambda\in R_+$, $x\in R$ (мы полагаем $\sup\{t:t\in\varnothing\}=0$).

Лемма 1. *Пусть μ — функция треугольника на B, ν—$\widetilde{B}$-функция. Тогда законы композиции*

$$\mu_\nu(\xi, \eta) = \varkappa^{-1}[\nu(\varkappa(\xi_0), \varkappa(\eta))], \ \xi, \eta \in B$$

$$\nu_\mu(\alpha, \beta) = \varkappa[\mu(\varkappa^{-1}(\alpha), \varkappa^{-1}(\beta)], \ \alpha, \beta \in \widetilde{B}$$

являются соответственно функцией треугольника и $\widetilde{B}$-функцией.

Доказательство довольно простое, и мы его опускаем.

Будем говорить, что функции треугольника μ соответствует $\widetilde{B}$-функция ν, если $\mu_\nu = \mu$.

Лемма 2. *Для любого $n = 1, 2, \ldots$ законы композиции на B*

$$\mu^n(\xi, \eta)(x) = \inf_{\lambda_1 \ldots \lambda_n \in [0, 1]} \max\{\xi(\lambda_1 \ldots \lambda_n x), \eta((1-\lambda_1)\ldots(1-\lambda_n)x)\}, \ x \in R$$

являются функциями треугольника на B. Более того, функции треугольника μ^n соответствует $\widetilde{B}$-функция

$$S_n(\alpha, \beta)(t) = (\alpha(t)^{\frac{1}{n}} + \beta(t)^{\frac{1}{n}})^n, \ \alpha, \beta \in \widetilde{B}, \ t \in (0, 1].$$

Доказательство. Достаточно доказать вторую часть леммы; первая будет следовать из леммы 1. Очевидно, функции треугольника $\mathrm{Max}(\xi, \eta)(x) = \max(\xi(x), \eta(x)), \xi, \eta \in B, x \in R$ соответствует $\widetilde{B}$-функция $\mathrm{Max}(\alpha, \beta)$. Заметим, что

$$\mu^n(\xi, \eta) = \inf_{\lambda \in (0, 1)} \mu^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda} \circ \xi, \ \frac{1}{1-\lambda} \circ \eta\right), \ n = 2, 3, \ldots$$

$$\mu^1(\xi, \eta) = \mu_0(\xi, \eta) = \inf_{\lambda \in (0, 1)} \mathrm{Max}\left\{\frac{1}{\lambda} \circ \xi, \ \frac{1}{1-\lambda} \circ \eta\right\}.$$

В силу изотонности отображения $\varkappa$

$$\varkappa(\mu^n(\xi, \eta)) = \inf_{\lambda \in (0, 1)} \varkappa\left[\mu^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda} \circ \xi, \ \frac{1}{1-\lambda} \circ \eta\right)\right], \ n = 2, 3, \ldots$$

$$\varkappa(\mu^1(\xi, \eta)) = \inf_{\lambda \in (0, 1)} \mathrm{Max}\left\{\frac{1}{\lambda}\varkappa(\xi), \ \frac{1}{1-\lambda}\varkappa(\eta)\right\}, \ \xi, \eta \in B.$$

Функции $\varphi_1(\lambda) = \max\{a/\lambda, \ b/1-\lambda\}$, $\varphi_{n+1}(\lambda) = [(a/\lambda)^{1/n} + (b/1-\lambda)^{1/n}]^n$ $a, b \in R_+$, $\lambda \in (0, 1)$, $n = 1, 2\ldots$ достигают минимума в точках $\lambda_1 = a/a + b$, $\lambda_{n+1} = a^{1/n+1}/a^{1/n+1} + b^{1/n+1}$ соответственно. Отсюда

$$\inf_{\lambda \in (0, 1)} \varphi_1(\lambda) = a + b, \ \inf_{\lambda \in (0, 1)} \varphi_{n+1}(\lambda) = (a^{1/n+1} + b^{1/n+1})^{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots$$

и индукция по n завершает доказательство.

Определение. Функция треугольника μ называется *регулярной*, если для любых $\xi, \eta, \zeta \in B$ имеет место

$$\mu(\xi, \eta) = \mu(\xi, \zeta) \Rightarrow \eta = \zeta.$$

Аналогично определяется регулярность $\widetilde{B}$-функций.

Теорема. *Для любого $n = 1, 2, \ldots$ функции треугольника μ^n, определенные в лемме 2, регулярны.*

Доказательство следует из регулярности $\widetilde{B}$-функций S_n и очевидного утверждения: если функции треугольника μ соответствует $\widetilde{B}$-функция ν, то регулярность одной из них влечет регулярность другой и обратно.

Замечание. Проведенные рассуждения можно применить и к мультипликативным законам композиции [2]. В частности, справедливо

Предложение. Пусть π_0 — мультипликативный закон в B, заданный соотношением

$$\pi_0(\xi, \eta)(x) = \inf_{0<q<\infty} \max\left\{\xi\left(\frac{x}{q}\right),\ \eta(q)\right\},\ \xi, \eta \in B,\ x \in R.$$

Тогда ему соответствует закон τ_0 в $\widetilde{B}$

$$\tau_0(\alpha, \beta)(t) = \alpha(t)\beta(t),\ \alpha, \beta \in \widetilde{B},\ t \in (0, 1].$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $x \in R_+$ и $y \in R_+$ такого, что $\eta(y) \geqslant \xi(x)$, $\eta(y+0) \leqslant \xi(x)$, имеет место $\pi_0(\xi, \eta)(xy) = \xi(x)$.

Для любого $q \in (0, \infty)$ имеем: $\pi_0(\xi, \eta)(xy) \leqslant \max\{\xi(xy/q), \eta(q)\}$. Возьмем последовательность чисел q_n, сходящуюся к y справа. Тогда $\pi_0(\xi, \eta)(xy) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \max\{\xi(xy/q_n), \eta(q_n)\} = \max\{\xi(x-0), \eta(y+0)\} = \xi(x)$. Обратно для любого ε найдется такое q_ε, что $\pi_0(\xi, \eta)(xy) > \max\{\xi(xy/q_\varepsilon), \eta(q_\varepsilon)\} - \varepsilon$. Если $q_\varepsilon \geqslant y$, то $\xi(xy/q_\varepsilon) \geqslant \xi(x)$; если же $q_\varepsilon < y$, то $\eta(q_\varepsilon) \geqslant \eta(y) \geqslant \xi(x)$. В силу произвольности ε $\pi_0(\xi, \eta)(xy) \geqslant \xi(x)$, что и доказывает предложение.

Можно показать, что мультипликативный закон π_T (T — любая t-функция) дистрибутивен относительно μ_0. Тогда, в силу регулярности μ_0, (B, μ_0, π_T) может быть вложена в случайное нормированное кольцо с законами композиции μ_0 и π_T. Частный случай для закона π_0 рассмотрен в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерстнев А. Н. О вероятностном обобщении метрических пространств. — Учен. зап. Казанского университета. Вып. 124, кн. 2. Казань, 1964, с. 3—11.

2. Матвейчук М. С. О кольцах со случайной нормой. — Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 10—11. Казань, Изд-во КГУ, 1974, с. 43—50.

3. Sherwood H., Taylor M. Some PM structures on the set of distribution functions. — Rev. roum. math. pures et appl., 19, № 10, 1974, p. 1251—1260.