Л. В. Келдыш, Людмила Келдыш. Открытое отображение трехмерного куба на четырехмерный куб,
Матем. просв., 1958, выпуск 3, 259–264

НОВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ [1])

1. Людмила Келдыш. *Открытое отображение трехмерного куба на четырехмерный куб.*

Пусть даны два множества (геометрические фигуры) X и Y и непрерывное отображение f [2]) множества X на множество Y (так что каждая точка множества Y является образом хотя бы одной точки из X); тогда говорят, что Y является *непрерывным образом* множества X и пишут: $Y=f(X)$. Известно, что вид и свойства множества Y могут сильно отличаться от вида и свойств множества X. В частности, весьма разнообразны могут быть «пути», т. е. непрерывные образы отрезка. Кривая Пеано осуществляет непрерывное отображение отрезка на квадрат [3]). Аналогично можно построить непрерывное отображение отрезка на куб, квадрата на куб и вообще p-мерного куба на q-мерный, где p и q — любые целые положительные числа [4]).

Структура множества Y зависит от структуры множества X и от свойств отображения f. Поэтому важно изучить различные типы непрерывных отображений и выяснить, какие типы множеств Y могут возникать в результате непрерывного отображения f определенного типа заданного множества X. Простейшим типом непрерывного отображения является гомеоморфное отображение, т. е. взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение X на Y. Очень многие свойства множества X являются *инвариантами* гомеоморфного отображения [5]), т. е. сохраняются у множества Y. В частности, *открытое* в X множество [6]) при гомеоморфном отображении переходит в множество, открытое в Y; *размерность* [7]) Y такая же, как размерность X, и т. д. Отсюда следует, что нельзя гомеоморфно отобразить отрезок на квадрат или на куб, квадрат на куб, p-мерный куб на q-мерный, если $p \neq q$. Известно,

---

[1]) См. также статью В. И. Арнольда на стр. 41—61 наст. выпуска.

[2]) См., например, статью В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича [4] (напечатанную в вып. 2 и 3 «Математического просвещения»). В дальнейшем мы будем неоднократно ссылаться на эту статью, указывая только номер и страницы выпуска «Матем. просв.».

[3]) См. [4], стр. 23 наст. выпуска.

[4]) *Одномерным* кубом считается отрезок, *двумерным* — квадрат; p-мерный куб есть топологическое произведение p отрезков (см. [4], стр. 39 наст. выпуска).

[5]) См. [4], стр. 7 и второго выпуска.

[6]) См. [4], стр. 12 наст. выпуска.

[7]) Там же, стр. 29.

что при непрерывном отображении отрезка на квадрат или квадрата на куб должны склеиваться между собой не менее чем по три точки.

Большую роль играют *открытые отображения*, т. е. такие непрерывные отображения, при которых множества, открытые в X, переходят в множества, открытые в Y. Всякое гомеоморфное отображение открыто. Открытым отображением является также проектирование на плоскость открытого множества в трехмерном пространстве. Однако весьма немногие отображения, при которых склеиваются по крайней мере две точки, являются открытыми. Например, непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ оси Ox на отрезок $[0,1]$ оси Oy, которое определяется обычной непрерывной функцией $y=f(x)$, открыто только в том случае, когда функция f либо монотонна, либо имеет в каждой точке максимума значение 1 и в каждой точке минимума значение 0. Непрерывное же отображение, изображенное на рис. 1, не является открытым, так как, например, открытый интервал (a, b) переходит в полуинтервал (c, d), содержащий точку d, который не является открытым множеством отрезка $[0,1]$ оси Oy.

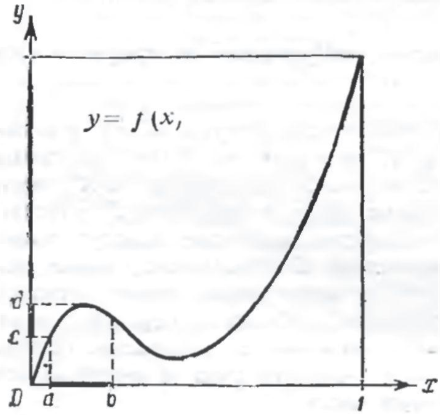

Рис. 1.

Легко доказывается, что открытым образом (т. е. результатом открытого отображения) отрезка может быть только простая дуга. Большее разнообразие представляют собой открытые образы квадрата. Здесь могут получаться определенные типы континуумов размерности 1 или 2. Отобразить открыто квадрат на куб или вообще на множество размерности больше двух невозможно.

Вообще долгое время было неизвестно: можно ли открыто отобразить континуум X на континуум Y большей размерности, т. е. повысить размерность при открытом отображении. Этот вопрос был впервые решен в 1937 г. А. Н. Колмогоровым [3], который построил одномерный континуум X и его открытое отображение на некоторый двумерный континуум Y. Вслед за тем как советскими, так и зарубежными учеными был построен ряд примеров открытых отображений, повышающих размерность. Однако до настоящего времени в математической литературе не было описано ни одного примера открытого отображения куба на континуум размерности больше трех. П. С. Александров поставил вопрос: можно ли открыто отобразить трехмерный куб на куб размерности больше трех, и высказал предположение, что такое отображение невозможно, так же как в случае квадрата.

Однако неожиданно здесь положение оказалось совершенно иным, чем в случае отрезка или квадрата. Оказалось, что *существует открытое отображение трехмерного куба на четырехмерный куб.*

Решение этого вопроса оказалось связано с изучением другого специального вида непрерывных отображений — так называемых *монотонных отображений*, т. е. таких, что полный прообраз[1]) $f^{-1}(y)$ любой

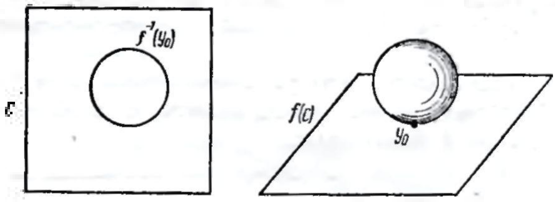

Рис. 2.

точки континуума Y связен[2]). При монотонном отображении отрезка прообразы точек суть либо точки, либо отрезки, и непрерывное отображение сводится к стягиванию этих отрезков-прообразов в точки. Образ отрезка при таком отображении есть простая дуга. Если при монотонном отображении квадрата C прообраз $f^{-1}(y_0)$ некоторой точки ограничивает открытое множество [например, $f^{-1}(y_0)$ есть окружность], то, стягивая $f^{-1}(y_0)$ в точку y_0, мы преобразуем квадрат C в сумму

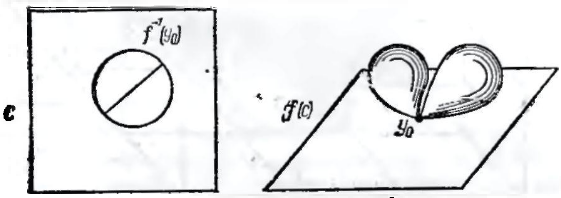

Рис. 3.

квадрата и сферы-«пузыря» (или нескольких, даже, возможно, бесконечного числа сфер), соединенных в этой точке (рис. 2 и 3, где *а* — прообраз, а *б* — образ). Известно, что монотонный образ квадрата либо имеет размерность меньше двух, либо гомеоморфен квадрату, сфере или «кактоиду», т. е. двумерному континууму, который получается из квадрата образованием таких «пузырей» (возможно, один на другом) в конечном или бесконечном множестве. Следовательно,

---

[1]) См. [4], стр. 13 наст. выпуска.

[2]) Этим свойством обладают отображения отрезка оси Ox на отрезок оси Oy, задаваемые монотонной функцией.

нельзя монотонно отобразить квадрат на куб. Известно, однако, что куб *можно* монотонно отобразить на континуум Y любой размерности. Но до сих пор не было известно: можно ли монотонно отобразить трехмерный куб на четырехмерный куб?

Полученное мной доказательство существования открытого отображения трехмерного куба на четырехмерный состоит из двух частей:

сначала [1] строится монотонное, но не открытое отображение трехмерного куба на четырехмерный, удовлетворяющее некоторым условиям,

затем [2] доказывается, что удовлетворяющее этим условиям монотонное отображение можно преобразовать в отображение, которое является открытым и монотонным.

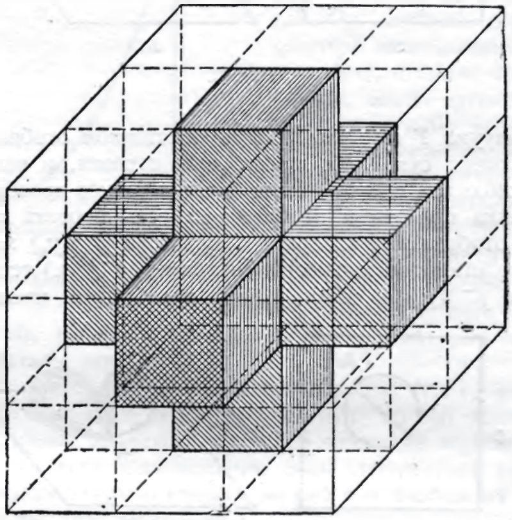

Рис. 4.

Для построения монотонного отображения трехмерного куба C_3 на четырехмерный куб C_4, в C_3 строится континуум X такой, что $C \setminus X$ есть сумма двух непересекающихся областей U_1 и U_2, и строится монотонное отображение континуума X на трехмерный куб.

Для построения X куб C_3 разбивается шестью плоскостями, параллельными его граням, на 27 равных кубов — кубов первого ранга. Затем берется «крест», состоящий из семи этих кубов: центрального и тех, которые имеют с ним общую грань (рис. 4). Этот «крест» обозначим U_{11}. Затем в каждом из оставшихся 20 кубов строим такой же «крест», но выбрасываем затем все те кубы этих крестов, которые пересекаются с большим крестом. Фигуру, состоящую из всех оставшихся частей малых крестов, обозначим U_{21} (рис. 5). Разность $C_3 \setminus U_{11} \setminus U_{21}$ есть сумма кубов второго ранга, где каждый куб первого ранга есть сумма 27 кубов второго ранга. В каждом из оставшихся в $C_3 \setminus U_{11} \setminus U_{21}$ кубов второго ранга строим такой же «крест» из кубов третьего ранга; затем выбрасываем из этих крестов все кубы, пересекающиеся с U_{21}. Сумму U_{11} и всех оставшихся крестов третьего ранга обозначим U_{12}. Затем продолжаем аналогичное построение в кубах третьего ранга и, добавляя к U_{21} оставшиеся части крестов, не пересекающиеся с U_{11}, получим U_{22}. По построению, U_{12} и U_{22}

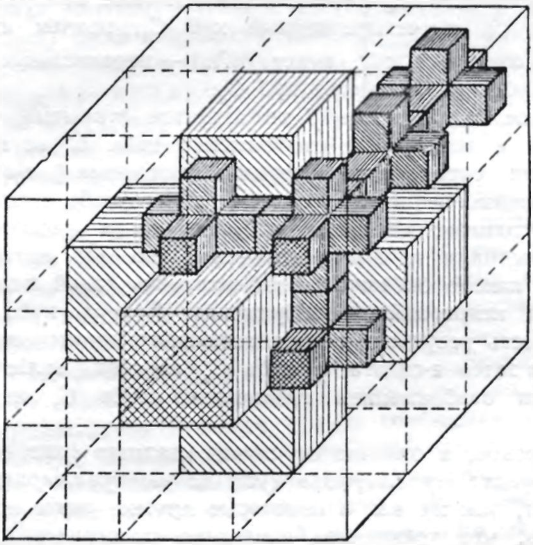

Рис. 5.

связны и не пересекаются. Продолжая далее такое же построение и прибавляя попеременно полученные части «крестов» то к сумме кубов, содержащей U_{11}, то к сумме кубов, содержащей U_{21}, получим две последовательности сумм кубов:

$$U_{11} \subset U_{12} \subset U_{13} \subset \ldots \subset U_{1n} \subset \ldots,$$
$$U_{21} \subset U_{22} \subset U_{23} \subset \ldots \subset U_{2n} \subset \ldots,$$

причем U_{1n} и U_{2n} связны и не пересекаются.

Обозначаем через U_1 *внутренность* суммы всех U_{1n}, а через U_2 — внутренность суммы всех U_{2n} и полагаем:

$$X = C_3 \setminus U_1 \setminus U_2.$$

Континуум X можно монотонно отобразить на куб, стянув в точку каждую часть X, лежащую на некотором кубе, являющемся центральным в некотором из наших «крестов», и стянув в отрезки части X, лежащие на боковых кубах «крестов» (так, что, например, часть X, лежащая на самом большом «кресте», отобразится на «крест», состоящий из шести отрезков, пересекающихся в центре куба).

После этого мы строим в каждой области U_1 и U_2 бесконечное множество аналогичных непересекающихся между собой континуумов X_n $(n=1, 2, \ldots)$ и для каждого из них — монотонное отображение f_n на куб.

Совокупность всех f_n определяет монотонное отображение f трехмерного куба C_3 на четырехмерный куб C_4, причем на каждом X_n отображение совпадает с f_n и все $f(X_n)$ — параллельные между собой трехмерные кубы, разбивающие куб C_4.

Построенное отображение f не является открытым. Чтобы получить открытое и монотонное отображение куба C_3 на куб C_4, нужно еще произвести определенным образом построенный ε-*сдвиг* куба C_4 на себя. Непрерывное отображение φ какого-либо континуума в себя называется ε-сдвигом, если для любой точки x расстояние от x до $\varphi(x)$ не превосходит ε. Мы доказываем, что для нашего отображения f можно, каково бы ни было ε, построить такой ε-сдвиг φ куба C_4 на себя, что непрерывное отображение $F=\varphi f$ куба C_3 на куб C_4, которое есть результат последовательного применения сначала отображения f, а затем ε-сдвига φ куба C_4 на себя, является открытым и монотонным отображением трехмерного куба C_3 на четырехмерный куб C_4.

Таким образом, в отличие от случая квадрата *существует открытое отображение трехмерного куба на четырехмерный куб.*

Этот факт, так же как и некоторые другие, ранее известные, указывает на то, что трехмерное евклидово пространство имеет значительно более сложную внутреннюю структуру, чем плоскость. Структура эта далеко еще не изучена, и задача о ее дальнейшем исследовании ставит перед геометрией ряд увлекательных вопросов.

Литература

1. Людмила Келдыш, Монотонное отображение куба на куб большей размерности, Матем. сборник 41 (83), вып. 2, 1952, стр. 149. Краткое сообщение; ДАН СССР 103, № 6, 1955.
2. Людмила Келдыш, Преобразование монотонных неприводимых отображений в монотонно открытые и монотонно открытые отображения куба, повышающие размерность, Матем. сборник (печатается). Краткое сообщение; ДАН СССР 114, № 3, 1957, стр. 472—475.
3. A. Kolmogoroff, Über offene Abbildungen, Ann. of Math. 38, 1937, стр. 36—38.
4. В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, Очерк основных идей топологии, «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 3—34 и вып. 3, стр. 5—40.

Л. В. Келдыш