Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

K. Lai, S. V. Vostokov, Explicit pairing and class field theory of multidimensional complete fields,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 4, 95–114

https://www.mathnet.ru/eng/aa1064

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.84
May 19, 2025, 05:09:25

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 4

ЯВНОЕ СПАРИВАНИЕ И ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ КЛАССОВ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛНЫХ ПОЛЕЙ

© К. Ф. Лай, С. В. Востоков

Пусть K — многомерное полное поле. Исследуется структура топологической K-группы Милнора $K_*^{\mathrm{top}}(K)$, строится спаривание в явной форме между $K_*^{\mathrm{top}}(K)$ и мультипликативной группой K^*, и в качестве приложения задаются закон взаимности и теория полей классов поля K.

§0. Введение

Теория K-групп играет исключительно важную роль в арифметике полей. В этой статье мы изучаем K-группы многомерного полного поля, строим явное спаривание между его топологической K-группой и группой ненулевых элементов поля и строим теорию полей классов.

Дадим, во-первых, краткое описание n-мерных локальных полей. Под одномерным локальным полем мы понимаем конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ или поля рядов Лорана от одной переменной над конечным полем. Для $n > 1$ полным дискретно-нормированным полем K называется n-мерное локальное поле, поле вычетов которого $\overline{K}$ является $(n-1)$-мерным локальным полем. Поле вычетов одномерного поля называется последним полем вычетов. Последнее поле вычетов многомерного локального поля конечно.

В теории полей классов n-мерного локального поля роль мультипликативной группы поля K играет n-я K-группа Милнора $K_n^M(K)$, или после факторизации группа $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ (так называемая топологическая K-группа Паршина). Центральную роль во всей теории играет гомоморфизм норменного вычета (или символ норменного вычета, или отображение взаимности)

$$\Psi : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K).$$

Ключевые слова: K-группы, многомерное полное поле, теория полей классов, отображение взаимности.

Работа была выполнена при поддержке РФФИ № 97-01-00058-а.

Высшая теория полей классов была создана в конце 70-х годов А. Н. Паршиным [П1–П3] и К. Като [K1]. Подход Като базировался на глубоком изучении когомологий Галуа для полных дискретно-нормированных полей и их связей с K-теорией. Из этой теории K. Kato и S. Saito [KS, KZ] получили значительное число глобальных результатов для многообразий над локальными полями и арифметических схем (см. также [R]). А. Н. Паршин получил высшую теорию полей классов в характеристике p, вводя некоторый явный символ. Этот символ обобщает спаривание Артина–Шрайера–Витта одномерной локальной теории полей классов. Вместе с формулой для ручного символа это дает явную конструкцию закона взаимности в характеристике p. В то же самое время его подход дал явное описание топологической K-группы в характеристике p.

С другой стороны, когда поле K содержит p^M-е корни из единицы, можно выразить теорию полей классов для абелевых расширений показателя p^M в терминах обобщенного спаривания Гильберта. Следуя идеям И. Р. Шафаревича [Ш], Востоков выполнил эту программу для одномерных локальных полей и для двумерных локальных полей [B1, B3]. Напомним главную теорему локальной теории полей классов в этой конструкции применительно к одномерному локальному полю K, содержащему группу μ_M всех p^M-х корней из единицы. Предположим, что мы явно построили билинейное невырожденное спаривание

$$\langle , \rangle : K^*/K^{*p^M} \times K^*/K^{*p^M} \to \mu_M$$

со следующим норменным свойством: $\langle \alpha, \beta \rangle = 1 \iff \alpha$ — норма из $K(\sqrt[p^M]{\beta})$, тогда верна следующая теорема.

Теорема (см. [B1, §7]). *Пусть H — подгруппа конечного индекса в K^*, содержащая K^{*p^M}, и пусть $H^\perp$ — ортогональное дополнение к H относительно спаривания $\langle , \rangle$. Тогда $H^\perp$ — норменная подгруппа в расширении $K(\sqrt[p^M]{H})/K$.*

Другая конструкция отображения взаимности была найдена Фесенко [Ф1–2]. Его подход базируется на обобщении аксиоматического метода Нейкирха (см. [N]) теории полей классов и явной формулы Востокова для символа Гильберта. Он исследовал также случай, когда последнее поле вычетов k удовлетворяет условию $[k : k^p] < \infty$ (см. [F3]). В этом случае он построил так называемую p-теорию полей классов для всех абелевых p-расширений данного поля. Если мы опускаем предположение о том, что последнее поле вычетов конечно, мы говорим просто, что K есть полное многомерное поле, и считаем, что последнее поле вычетов k удовлетворяет условию $[k : k^p] < \infty$. Для таких полей мы имеем следующую классификационную теорему.

Теорема (Паршин–Жуков, [П1, Ж]). *Пусть* $K = K^{(n)}$ *— n-мерное полное поле* $K^{(n-1)}, \dots, K^{(0)} = F$ *— поля вычетов. В случае, когда* $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} F = p$, *обозначим через* $k_0 \hookrightarrow K$ *— поле отношений кольца векторов Витта* $W(F)$ *поля* F.

(1) *Если* $\operatorname{char} K = \operatorname{char} F$, *то*

$$K \cong F((t_1)) \dots ((t_n)).$$

(2) *Если* $\operatorname{char} K^{(m)} = p$, $\operatorname{char} K^{(m+1)} = 0$, $1 \le m \le n-1$, *то* K *является конечным вполне разветвленным расширением „стандартного" поля вида:*

$$k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_m\}\}((t_{m+2})) \dots ((t_n)),$$

где k *— конечное расширение поля* k_0.

(3) *Если* $\operatorname{char} K^{(1)} = 0$, $\operatorname{char} K^{(0)} = p$, *тогда* $K \simeq k((t_2)) \dots ((t_n))$, *где* k *— поле отношений кольца векторов Витта* $W(K^{(0)})$.

(4) *Существует конечное расширение* K'/K *такое, что* K' *— стандартное и* $K' = K(a)$, *где* a *— алгебраический элемент над* k_0.

Структура топологических K-групп, явное спаривание и теория полей классов n-мерных полных полей изучались Востоковым [В4] в случае, когда $\operatorname{char} K = 0$ и $\operatorname{char} \overline{K} = p$. В этой статье мы переносим эти результаты на общий случай. В §1 мы даем основные определения для полных полей, которые мы изучаем здесь. В следующем параграфе мы проверяем некоторые результаты об арифметике этих полей, в частности о группе главных единиц и о группе примарных элементов. В §3 мы доказываем некоторые свойства топологических K-групп n-мерных полных полей. Мы строим явное спаривание в §4 и проверяем норменное свойство этого спаривания в §5, наконец, в §6 строится теория полей классов.

Мы искренне благодарны И. Б. Жукову за помощь.

§1. Определения

Рассмотрим цепочку полей, $K^{(n)} = K, K^{(n-1)}, \dots, K^{(1)}, K^{(0)}$, где $K^{(i)}$ — полное дискретно-нормированное поле с полем вычетов $K^{(i-1)}, i = 1, \dots, n-1$. Если $K^{(0)}$ — конечное поле, то говорим, что K — *n-мерное локальное поле*, если же $K^{(0)}$ предполагается лишь совершенным, то говорим, что K — *n-мерное полное поле*. Поле $K^{(n-1)}$ называется *первым полем вычетов* и обозначается также через $\overline{K}$. $K^{(0)}$ называется *последним полем вычетов*.

Пусть t_n — простой элемент относительно дискретного нормирования поля $K = K^{(n)}$; t_{n-1} — единица в $K^{(n)}$, класс вычетов которой является простым элементом поля $K^{(n-1)}$;…; t_1 — единица в $K^{(n)}, K^{(n-1)}, \dots, K^{(2)}$, которая становится простым элементом в предпоследнем поле вычетов $K^{(1)}$. Набор $(t_1, \dots, t_n)$ называется *системой локальных параметров в* K. Каждая система локальных параметров определяет нормирование ранга n на K

$$\overline{v}_K = \overline{v} = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) : K \to \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\},$$

где $\overline{v}(0) = \infty$, и для $a \neq 0$

$$v^{(i)}(a) = v_{K^{(i)}}\big(\overline{a t_n^{-v^{(n)}(a)} \dots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(a)}}\big) \quad \text{для } 1 \le i \le n \le n-1;$$
$$v^{(n)}(a) = v_{K^{(n)}}(a).$$

(Здесь черта означает взятие образа в $K^{(i)}$). Группа $\mathbb{Z}^n$ предполагается лексикографически упорядоченной в следующем смысле:

$$\overline{r}_1 = (r_1^{(1)}, \dots, r_1^{(n)}) < \overline{r}_2 = (r_2^{(1)}, \dots, r_2^{(n)}),$$

значит,

$$r_1^{(m)} < r_2^{(m)}, \quad r_1^{(m+1)} = r_2^{(m+1)}, \quad \dots, \quad r_1^{(n)} = r_2^{(n)}$$

для некоторого $m \le n$.

Нормирование $\overline{v}$, конечно, зависит от выбора локальных параметров. Однако для другой системы локальных параметров получаем эквивалентное нормирование. Тем самым мы можем определить кольцо нормирования. А именно элементы $a \in K$, удовлетворяющие условию $\overline{v}(a) \ge 0$, образуют кольцо $\mathfrak{o}_K = \mathfrak{o}$. Единственный максимальный идеал этого кольца есть

$$\mathfrak{M}_K = \{a \in \mathfrak{o}_K : \overline{v}(a) > 0\},$$

группа единиц есть $\mathfrak{o}_K^* = \{a \in \mathfrak{o}_K : \overline{v}(a) = 0\}$, а группой главных единиц является $V_K = 1+\mathfrak{M}_K$. Пусть $\mathcal{R}$ обозначает подгруппу в K^*, состоящую из представителей Тейхмюллера всех ненулевых элементов последнего поля вычетов. Имеем

$$K^* = \langle t_n \rangle \times \dots \times \langle t_1 \rangle \times V_K \times \mathcal{R}.$$

На поле $F((X))$ рядов Лорана от переменной X с коэффициентами в F определим нормирование:

$$w(0) = +\infty, \quad w\Big(X^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\Big) = k, \quad a_n \in F, \quad a_0 \neq 0.$$

$F((X))$ — полное дискретно-нормированное поле относительно w, и его кольцом нормирования является кольцо $F[[X]]$ всех формальных степенных рядов $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, $a_n \in F$. Поле $F((X))$ и его поле вычетов F имеют одинаковые характеристики.

Пусть F — полное поле относительно дискретного нормирования $v : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ и $\overline{F}$ — его поле вычетов. Положим

$$F\{\{X\}\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n \; : \; a_n \in F, v(a_n) \geq c > -\infty, \lim_{n \to -\infty} v(a_n) = \infty \right\}.$$

Пусть

$$v'\Big(\sum a_n X^n\Big) = \min_n v(a_n).$$

Тогда $F\{\{X\}\}$ — полное поле относительно дискретного нормирования v' и $\overline{F}((\overline{X}))$ — его поле вычетов. Размерность $F((X))$ (соответственно $F\{\{X\}\}$) на единицу больше, чем у F.

Мы будем рассматривать случай неравных характеристик. Предположим, что для некоторого целого m, $1 \leq m \leq n$, характеристика поля $K^{(m)}$ равна 0, а поля $K^{(m-1)}$ равна p. Мы говорим, что K неравной характеристики поле. Согласно структурной теореме (см. [Ж]), существует n-мерное полное поле F нулевой характеристики такое, что его поле вычетов имеет характеристику p, K является полем рядов Лорана от переменных $t_{m+1}, \dots, t_n$ с коэффициентами в F, т.е.

$$K = F((t_{m+1}))\dots((t_n)),$$

и мы имеем следующее разложение для группы обратимых элементов,

$$K^* = \langle t_{m+1} \rangle \dots \langle t_n \rangle \cdot F^* \cdot \mathcal{U}_K,$$

где $\mathcal{U}_K$ — подгруппа $1 + t_{m+1}\mathcal{M}_K$ группы единиц поля K. Более того, $V_K = V_F \cdot \mathcal{U}_K$.

Пусть $\mathfrak{o}_0$ — кольцо векторов Витта от совершенного последнего поля вычетов $K^{(0)}$, k_0 — поле частных кольца $\mathfrak{o}_0$ и Δ — автоморфизм Фробениуса в k_0. Оператор Картье на пополнении максимального неразветвленного расширения $\mathfrak{o}_0$ обозначим через $\wp(\alpha) = \alpha^\Delta - \alpha$. Запись

$$\alpha \equiv \beta \mod (\wp, p^M)$$

в кольце $\mathfrak{o}_0$ означает, что $\alpha = \beta + \wp(\gamma) + p^M(\gamma')$ для некоторых γ, γ' из $\mathfrak{o}_0$. Оператор Фробениуса Δ продолжается на ряды с коэффициентами в $\mathfrak{o}_0$ с помощью

$$(\Sigma a_{(r_1,\ldots,r_i)} X_1^{r_1} \ldots X_i^{r_i})^\Delta := \Sigma a^\Delta_{(r_1,\ldots,r_i)} X_1^{r_1 p} \ldots X_i^{r_i p}.$$

Для ряда $\underline{\alpha}$ из $\mathfrak{o}_0\{\{X_1\}\}\ldots\{\{X_{i-1}\}\}((X_i))$, $1 \le i \le n$, определим

$$\ell(\underline{\alpha}) = \frac{1}{p} \log \underline{\alpha}^p / \underline{\alpha}^\Delta;$$

а для ряда $\underline{\beta}$ из $X_i \mathfrak{o}_0\{\{X_1\}\}\ldots\{\{X_{i-1}\}\}[[X_i]]$, $1 \le i \le n$, определим функцию Артина–Хассе:

$$E(\underline{\beta}) = \exp\left(\sum_{r=0}^{\infty} \underline{\beta}^{\Delta^r} / p^r\right).$$

Подставим $X_1 = t_1, \ldots$ в эти выражения, тогда получим элементы

$$\alpha = \ell(\underline{\alpha})|_{X_1=t_1,\ldots,X_i=t_i}, \qquad \beta = E(\underline{\beta})|_{X_1=t_1,\ldots,X_i=t_i}$$

в группе K^* и $1 + \mathcal{M}_K$ соответственно.

§2.1. Группа $\mathcal{U}_K$

Предложение 1. *$\mathcal{U}_K$ - свободная p-делимая группа.*

Доказательство. Если $u \in \mathcal{U}_K$, то можем написать $u = 1 + a$, где $a \in t_{m+1}\mathcal{M}_K$. Ясно, что для каждого положительного целого k имеем $a^k/k \in t^k_{m+1}\mathcal{M}_K$. Тогда $\log u = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a^k/k$ сходится к элементу в $t_{m+1}\mathcal{M}_K$. Действительно, логарифмическая функция

$$\log : \mathcal{U}_K \to t_{m+1}\mathcal{M}_K$$

определяет изоморфизм, для которого в качестве обратной функции имеем экспоненциальное отображение $\exp a = \sum_{k=0}^{\infty} a^k/k!$. Теперь для u из $\mathcal{U}_K$ положим $\varepsilon = \exp(\frac{1}{p}\log u)$. Ясно, что $\varepsilon^p = u$. Значит, $\mathcal{U}_K$ — p-делима. Наконец, из изоморфизма $\mathcal{U}_K \approx t_{m+1}\mathcal{M}_K$, задаваемого log, следует, что $\mathcal{U}_K$ не имеет p-кручения. Ясно, что $\mathcal{U}_K$ не имеет кручения взаимно-простого с p. Это завершает доказательство.

Пусть ζ — первообразный корень p^M-й степени из 1, содержащийся в поле K, и пусть $\underline{\zeta}(X_1,\dots,X_n)$ — ряд в $\mathfrak{o}_0\{\{X_1\}\}\dots\{\{X_n\}\}$ такой, что $\underline{\zeta}(t_1,\dots,t_n) = \zeta$. Пусть $\underline{s}(X_1,\dots,X_n) = \underline{\zeta}^{p^M} - 1$. Положим $s = \underline{s}(t_1,\dots,t_n)$.

Предложение 2. *Ряды ζ и s не имеют локальных параметров $t_{m+1},\dots,t_n$.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда можем записать ряд $\underline{\zeta}(X_1,\dots,X_n)$ в виде $\underline{a}(X_1,\dots,X_m)\underline{\varepsilon}(X_1,\dots,X_n)$, где $a = \underline{a}(t_1,\dots,t_m) \in F$ и $\varepsilon = \underline{\varepsilon}(t_1,\dots,t_n) \in \mathcal{U}_K$. Это значит, что $\zeta = a\varepsilon$. Тогда $a^{p^M} = \varepsilon^{-p^M} \in \mathcal{U}_K$. По предложению 1 группа $\mathcal{U}_K$ — бесконечно p-делимая группа; но группа F^* не имеет бесконечно p-делимых элементов. Поэтому $a^{p^M} = 1 = \varepsilon^{-p^M}$. Однако это противоречит тому, что $\mathcal{U}_K$ не имеет кручения. Доказательство закончено. •

§2.2. Примарные элементы

Элемент ω в дискретно-нормированном поле K называется p^M-примарным, если расширение $K(\sqrt[p^M]{\omega})/K$ неразветвлено (см. [В3, §1.2]). Группу p^M-примарных элементов в K обозначим через Ω.

Предложение 3. *Возьмем ряд s из предложения 2.*

(1) *Для любого a из $\mathfrak{o}_0$ элемент*

$$\omega(a) = E(as)|_{X_1=t_1,\dots,X_n=t_n}$$

является p^M-примарным.

(2) *Произвольный p^M-примарный элемент ω из K может быть представлен в виде $\omega(a)$ при некотором a из $\mathfrak{o}_0$.*

(3) *Элемент $\omega(a)$ не зависит от разложения ζ в ряд по локальным параметрам $t_1,\dots,t_n$.*

(4) *$\omega(a) \in K^{*p^M}$ тогда и только тогда, когда $a \equiv \wp(a_0) \mod p^M$ при некотором $a_0 \in \mathfrak{o}_0$.*

Так как группа главных единиц из K равна группе главных единиц поля F, умноженной на p-делимую группу $\mathcal{U}_K$, то p^M-примарные элементы поля K принадлежат полю F с точностью до p^M-х степеней. Это позволяет свести доказательство предложения к полю F; для этого поля результат был доказан в теореме 3.1 из [В4].

§3. Топологические K-группы

Пусть $K_m^M(K)$ — m-я K-группа Милнора. Напомним топологию Паршина на K. Рассмотрим набор T топологий на $K_m^M(K)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) каноническая проекция

$$\Psi : K^* \times \dots \times K^* \to K_m^M(K),$$
$$\Psi(x_1, \dots, x_m) = \{x_1, \dots, x_m\}$$

секвенциально непрерывна по каждому аргументу относительно топологии $\tau \in T$ и топологии на K^*;

(b) если $x_n \to x$, $y_n \to y$ относительно топологии $\tau \in T$, то $x_n + y_n \to x + y$ и $-x_n \to -x$ в топологии τ.

Набор T непустой, так как он содержит слабейшую топологию. Обозначим через τ_0 наименьшую верхнюю границу множества T. Отсюда следует немедленно, что топология τ_0 удовлетворяет условиям (a) и (b) выше, поэтому τ_0 — сильнейшая топология, удовлетворяющая этим условиям.

Обозначим через $\Lambda_m(K)$ пересечение всех окрестностей нуля в $K_m^M(K)$. Назовем группу

$$K_m^M(K)/\Lambda_m(K)$$

m-й топологической K-группой поля K и обозначим ее через $K_m^{\mathrm{top}}(K)$.

Введем некоторые обозначения для этого параграфа. Пусть K — n-мерное полное поле как §1. Пусть ε, η — главные единицы в K; пишем $\varepsilon > \eta$, если $\overline{v}_K(\varepsilon - 1) > \overline{v}_K(\eta - 1)$. Для α, β из $K_r^{\mathrm{top}}(K)$ пишем $\alpha \sim \beta$, если $\alpha = \beta + \gamma$ при некотором бесконечно p-делимом элементе γ из $K_r^{\mathrm{top}}(K)$.

Предложение 4. *Если K — n-мерное полное поле характеристики неравной p, тогда $K_r^{\mathrm{top}}(K)$ — бесконечно p-делимая, если $r \geq n + 2$.*

Доказательство. Случай 1. Предположим, что характеристика поля K равна 0, а характеристика его поля вычетов $\overline{K}$ равна p (т.е. $m = n$). Так как любой элемент из K^* можем записать в виде $\Theta t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \varepsilon$, где $\theta \in \mathcal{R}$, а ε — главная единица, то любой символ в r-й K-группе есть сумма символов следующих типов:

$$\{\Theta, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}, \quad \Theta \in \mathcal{R}, \ \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K^*,$$
$$\{t_1, \dots, t_i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-i}\}, \quad 0 \leq i \leq n, \ \varepsilon_j \text{ — главная единица.}$$

Из $\mathcal{R} = \mathcal{R}^p$ следует, что $\{\Theta, \alpha_2, \dots, \alpha_r\} \sim 0$. Проверим индукцией, что $\{t_1, \dots, t_i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-i}\} \sim 0$. Начнем с $i = n$. Пусть $\varepsilon_1 = 1 + \beta_1$, $\varepsilon_2 = 1 + \beta_2$, где $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{M}_K$. Тогда имеем

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = -\{1 + \beta_1\beta_2(1+\beta_1)^{-1}, \beta_2(1+\beta_1)\}.$$

Отсюда следует, что $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ есть сумма символов следующих типов:

$$\begin{aligned}
&\{t_j, \varepsilon'_j\}, \quad 1 \le j \le n;\\
&\{\Theta, \alpha\}, \quad \Theta \in \mathcal{R}, \ \alpha \in K^*;\\
&\{\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}\}, \text{ где } \varepsilon_1^{(1)} > \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Ясно, что $\{\Theta, \alpha\} \sim 0$ и $\{t_1, \dots, t_n, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-r}\} = 0$; $\{t_j, \varepsilon'_j\} = \{t_1, \dots, t_n, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-r}, t_j, \varepsilon'_j\} = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\{t_1, \dots, t_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-n}\}\\
&\qquad = \{t_1, \dots, t_n, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{r-n}\} \cdot \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\\
&\qquad \sim \{t_1, \dots, t_n, \varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{r-n}\}.
\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность $\varepsilon_1^{(k)}$ такую, что $\varepsilon_1^{(k)} \to 1$, когда $j \to \infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} \{t_1, \dots, t_n, \varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{r-n}\} \sim 0$$

в топологии $K_r^{\mathrm{top}}(K)$. Это заканчивает доказательство для индукционного шага $i = n$. •

Случай 2. Предположим, что $K = F((t_{m+1}))\dots((t_n))$, где F — m-мерное полное поле нулевой характеристики с полем вычетов $\overline{F}$ характеристики p. Любой элемент из K^* можно записать с точностью до бесконечно p-делимого элемента в виде $\alpha = t_{m+1}^{a_{m+1}} \dots t_n^{a_n} x$, где $x \in F^*$. Тогда произвольный символ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ можно выразить в виде суммы символов типа $\{t_1, \dots, t_i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-i}\}$, где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-i}$ — главные единицы из F. Рассуждения, аналогичные случаю 1, дают наш результат.

Предложение 5. *Пусть K — n-мерное поле, как выше.*

(a) *Если $\zeta_p \notin K$, то $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$ — бесконечно p-делимая группа.*

(b) *Если $\zeta_{p^M} \in K$ и $\zeta_{p^{M+1}} \notin K$, то $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$ порождена $\{t_1, \dots, t_n, \omega(a)\}$, $a \in \mathfrak{o}_0$, по модулю подгруппы бесконечно p-делимых элементов.*

Доказательство. Как и в предложении 4, можно показать, что для любого элемента α в $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$ имеем

$$\alpha \sim \{t_1, \ldots, t_n, \varepsilon\},$$

где ε — главная единица из K, и по предложению 1 можем считать, что $\varepsilon \in F$.

Пусть $\zeta_p \notin F \subset K$. Тогда из арифметики полного m-мерного поля F следует, что

$$\varepsilon = \prod (1 - \Theta_{\underline{i}} t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m})^{c_{\underline{i}}} \bmod F^{*p},$$

где $\Theta_{\underline{i}} \in \mathcal{R}$, $c_{\underline{i}} \in \mathbb{Z} \bmod p$, $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_m)$ — пробегает множество наборов $\underline{i}$ таких, что $\underline{i} > 0$ и $p \nmid \underline{i}$ (см. [B4, §3]). Как и в лемме 5.2 из [B4], показываем, что

$$\{t_1, \ldots, t_m, \ldots, t_n,\ 1 - \Theta_{\underline{i}} t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m}\} = 0.$$

Поэтому в топологической группе $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$ имеем

$$\Big\{t_1, \ldots, t_n, \prod_{\underline{i}} (1 - \Theta_{\underline{i}} t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m})^{c_{\underline{i}}}\Big\} = 0.$$

Это заканчивает доказательство п. (а).

Предположим теперь, что $\zeta_{p^M} \in K$ и $\zeta_{p^{M+1}} \notin K$. Тогда для $\alpha \in K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$ имеем $\alpha \sim \{t_1, \ldots, t_n, \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in F$. Можем теперь написать

$$\varepsilon = \prod_{\underline{i}} (1 - \Theta_{\underline{i}} t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m})^{c_{\underline{i}}} \cdot \omega(a) \bmod F^{*p},$$

где $\omega(a)$ — примарный элемент. Те же аргументы, что и выше, дают п. (в). •

§4. Явное спаривание

В этом параграфе мы строим явное спаривание $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ и K^*. Предположим, что K содержит первообразный корень p^M-й степени из 1, скажем, ζ. Выберем ряд $\underline{\zeta}$ от переменных $X_1, \ldots, X_n$ такой, что $\underline{\zeta}(t_1, \ldots, t_n) = \zeta$. Положим $\underline{s} = \underline{\zeta}^{p^M} - 1$. Для произвольного $\alpha \in K^*$ выберем ряд $\underline{\alpha}$ от переменных $X_1, \ldots, X_n$, такой что $\underline{\alpha}(t_1, \ldots, t_n) = \alpha$ в K. Для $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ из K^* положим

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{i-1}}{p^{n-i+1}} \ell(\underline{\alpha}_i) \frac{d\underline{\alpha}_1}{\underline{\alpha}_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\underline{\alpha}_{i-1}}{\underline{\alpha}_{i-1}} \wedge \frac{d\underline{\alpha}_{i+1}^{\Delta}}{\underline{\alpha}_{i+1}^{\Delta}} \wedge \cdots \wedge \frac{d\underline{\alpha}_{n+1}^{\Delta}}{\underline{\alpha}_{n+1}^{\Delta}}$$

и

$$\gamma_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \operatorname{res} \frac{\varphi}{\underline{s}} \bmod (\wp, p^M). \tag{4.1}$$

Предложение 6.

(a) $\gamma_K(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ *не зависит от выбора локальных параметров* $t_1,\ldots,t_n$ *из* K *и рядов* $\underline{\alpha}_i$, $\underline{\zeta}$. *Таким образом, получаем корректно определенное отображение*

$$\gamma_K : K^* \times \cdots \times K^* \to \mathfrak{o}_0 \bmod (\wp, p^M).$$

(b) γ_K *— мультипликативна, кососимметрична, пропорциональна и удовлетворяет соотношению Стейнберга.*

Доказательство. П. (b) проверяется точно так же, как предложение 4.1 в [B4]. Остается проверить п. (a). Во-первых, нам нужна лемма. •

Лемма 7. *Если по меньшей мере* $m+2$ *аргумента отображения* γ_K *лежат в группе* $F^*\mathcal{U}_K$, *то*

$$\gamma_K(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}) \equiv 0 \mod (\wp, p^M).$$

Доказательство. Используя кососимметричность, можем считать, что первые $m+2$-аргумента принадлежат $F^*\mathcal{U}_K$. Более того, применяя p-делимость группы $\mathcal{U}_K$, можем сказать, что аргументы $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+2} \in F^*$. Ясно, что γ_K индуцирует отображение

$$\gamma'_K : K^{\text{top}}_{m+2}(K) \times K^* \cdots \times K^* \to W(K^{(0)}) \bmod (\wp, p^M).$$

Но так как $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+2} \in F^*$, то мы должны иметь $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+2}\} \in K^{\text{top}}_{m+2}(F)$.

Известно, что для n-мерного полного поля $(n+2)$-я топологическая K-группа Милнора тривиальна (см. [П3] или [B4]). Значит, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+2}\} = 0$ и, таким образом, $\gamma'_K(\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+2}\},\{\alpha_{m+3},\ldots,\alpha_{m+1}\})$ — тривиальна. Лемма доказана. •

В качестве следствия из доказательства леммы и из арифметики поля K (см. §2) можем считать, используя мультипликативность, кососимметричность и пропорциональность, что первые $m+1$ аргументы из γ_K лежат в группе F^*, а остальные аргументы являются локальными параметрами поля K, над F, т.е. имеем отображение

$$\gamma_K(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1},\ldots,t_{m+2},\ldots,t_{n+1}) \to W(K^{(0)}) \bmod (\wp, p^M),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in F^*$. Из определения γ_K и выше доказанной леммы видим, что

$$\gamma_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}, t_{m+2}, \ldots, t_{n+1} \equiv \gamma_F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}) \mod (\wp, p^M).$$

Но для поля F корректность γ_F была доказана в предложении 4.1 и 4.3 работы [B4]. Отсюда следует, что отображение γ_K корректно определено для K. Предложение доказано. •

Мы готовы приступить теперь к нашей главной теореме. Пусть K — полное n-мерное поле, содержащее группу p^M-х корней из единицы.

Теорема 8. *Отображение γ_K (в предложении 6) индуцирует для $p \neq 2$ корректно определенное невырожденное непрерывное спаривание*

$$\langle , \rangle_M : K_n^{\mathrm{top}}(K)/p^M K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*/(K^*)^{p^M} \to \Omega/\Omega \cap (K^*)^{p^M},$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_M = \omega(\gamma_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)), \tag{4.2}$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in K_n^{\mathrm{top}}(K), \beta \in K^*$, и ω определен в предложении 3.

Доказательство. Из предложений 6 и 3 следует, что $\langle , \rangle_M$ — корректно определено.

Остается проверить невырожденность. Чтобы не вдаваться в технические детали, дадим доказательство для двумерного полного поля. Если $\mathrm{char}\, K = 0$, $\mathrm{char}\, \overline{K} = p$, то доказательство невырожденности аналогично доказательству, данному в [B3, §4].

Пусть теперь $K = K^{(2)}$, $K^{(1)}$, $K^{(0)}$ и $\mathrm{char}\, K^{(2)} = \mathrm{char}\, K^{(1)} = 0$, а поле вычетов $K^{(0)}$ — совершенное поле $\mathrm{char}\, p > 0$. Тогда $K = F((t_2))$, где $F = K^{(1)}$. По предложению 1 имеем $\mathcal{U}_K = \mathcal{U}_K^{p^M}$. Таким образом, для нашего спаривания достаточно рассмотреть группу $\langle t_2 \rangle F^*$ вместо K^*.

Проверим, во-первых, невырожденность $\langle , \rangle_M$ по второму аргументу. Действительно, достаточно проверить следующее утверждение:

(A) если $\beta \in K^*$ и $\beta \notin (K^*)^p$, то можно найти элемент $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\} \in K_2^{\mathrm{top}}(K) \bmod p$ такой, что

$$\gamma_K(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \not\equiv 0 \mod (\wp, p).$$

Из вышедоказанного имеем

$$\beta = t_2^b \cdot x,$$

где $x \in F^*$. Если $(b,p) = 1$, то из инвариантности спаривания γ_K относительно выбора локальных параметров (см. предложение 2) можно считать, что $\beta = t_2 \mod (K^*)^p$. Тогда в качестве символа α из $K_2^{\mathrm{top}}(K)$ возьмем $\alpha = \{\omega(a), t_1\}$, где $\omega(a)$ — p-примарный элемент в поле F (см. теорему 1). Из формулы для отображения γ_K получим $\gamma_K(\omega(a), t_1, t_2) = 0$, и, подбирая $a \in W(K^{(0)})$, мы получаем утверждение (А). Если это так, то $\beta \in F^* \mod (K^*)^p$.

В первом случае, так как $\alpha \in K_2^{\mathrm{top}}(K)$, то берем $\{\omega(a), t_2\}$, и, как и выше, имеем $\gamma_K(\omega(a), t_2, t_1) = -a$. Во втором случае имеем две возможности: или $\beta \equiv \omega(a) \mod (F^*)^p$ и в таком случае в качестве α берем $\{t_1, t_2\}$; или $\beta \equiv 1+\Theta t_1^b \mod t_1^{b+1}$, $(p,b) = 1$, где $\Theta \in W(K^{(0)})$. Пусть $e = v_F(p)$. Тогда в этом случае в качестве α берем $\{\beta', t_2\}$, где $\beta' = 1 + \Theta' t_1^{b'}$, $b' = \frac{pe}{p-1} - b$. Легко показать, что

$$\beta \equiv E(\Theta t_1^b) \mod t_1^{b+1},$$
$$\beta' \equiv E(\Theta t_1^{b'}) \mod t_1^{b'+1}.$$

Вычисление с помощью формулы (4.1) для γ_K дает нам в этом случае

$$\gamma_K(\beta', t_2, \beta) \equiv -b\Theta\Theta' c_*^{-p} \mod (\wp, p), \tag{4.3}$$

где имеем

$$\underline{\zeta} = 1 + c_* X^{\frac{e}{p-1}} + \dots$$

Так как Θ' произвольный элемент из $W(K^{(0)})^*$, то можно выбрать Θ так, что $\Theta\Theta' \not\equiv 0 \mod (\wp, p)$, и мы получаем условие (А).

Поэтому невырожденность спаривания по второму аргументу проверена.

Для доказательства невырожденности спаривания по первому аргументу достаточно показать:

(В) если α — элемент группы $K_2^{\mathrm{top}}(K)$, который не делится на p, то можно найти $\beta \in K^*$ такой, что

$$\gamma_K(\alpha; \beta) \not\equiv 0 \mod (\wp, p).$$

Нам нужна лемма.

Лемма 9. *Элемент* $\alpha \in K_2^{\mathrm{top}}(K) \bmod p^M K_2^{\mathrm{top}}(K)$ *можно представить в виде*

$$\alpha \equiv c\{t_1, t_2\} + \{t_1, \omega(a)\} + \{t_2, \eta\} \mod p^M K_2^{\mathrm{top}}(K),$$

где $\omega(a)$ — p^M*-примарный элемент в* F, η — *главная единица в* F *и* $c \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Используя предложение 2, можем написать

$$\alpha = c\{t_1, t_2\} + \{t_1, \varepsilon\} + \{t_2, \eta\} \bmod p^M K_2^{\mathrm{top}}(K), \tag{4.4}$$

где ε, η — главные единицы поля F.

Заметим, что единица ε поля F может быть представлена с точностью до p^M-х степеней в виде

$$\varepsilon = \prod_{(i,p)=1} (1 - \Theta_i t_1^i)^{a_i} \omega(a), \quad a_i \in \mathbb{Z}_p,$$

где элементы Θ_i принадлежат мультипликативной системе представителей Тейхмюллера $\mathcal{R}$ совершенного поля $K^{(0)}$ в кольце векторов Витта $W(K^{(0)})$.

Ясно, что

$$\{t_1, 1 - \Theta_i t_1^i\} \equiv 0 \mod p^M K_2^{\mathrm{top}}(F).$$

Поэтому, используя топологию $K_2^{\mathrm{top}}(F)$, мы получим

$$\{t_1, \varepsilon\} \equiv \{t, \omega(a)\} \mod p^M K_2^{\mathrm{top}}(F),$$

и лемма доказана.

Закончим доказательство условия (B). Пусть α имеет вид

$$\alpha \equiv c\{t_1, t_2\} + \{t_1, \omega(a)\} + \{t_2, \eta\} \mod p^M K_2^{\mathrm{top}}(K). \tag{4.5}$$

Если $(c, p) = 1$, то в качестве элемента β можно взять p^M-примарный элемент $\omega(a)$, где $a \not\equiv 0 \mod (\wp, p)$. Вычисляя, с помощью формулы (4.1) получаем

$$\gamma_K(t_1, t_2, \omega(a)) \equiv a \not\equiv 0 \mod (\wp, p),$$
$$\gamma_K(t_1, \varepsilon, \omega(a)) \equiv \gamma_K(t_1, \eta, \omega(a)) \equiv 0 \mod (\wp, p).$$

Отсюда получаем

$$\gamma_K(\alpha,\beta) \not\equiv 0 \mod (\wp, p^M).$$

Пусть теперь c делится на p. Тогда для символа $\{t_1, \omega(a)\}$ в представлении (4.5) мы можем считать, что элемент $a \not\equiv 0 \mod (\wp, p^M)$, тогда возьмем в качестве элемента β локальный параметр t_2. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}\gamma_K(\alpha;\beta) &= \gamma_K(t_1,\omega(a),t_2) + \gamma_K(t_2,\eta,t_2)\\ &= \gamma_K(t_1,\omega(a),t_2) = -a \not\equiv 0 \mod (\wp,p).\end{aligned}$$

Наконец, если $(c,p) = p$ и $a \equiv 0 \mod (\wp, p)$ в представлении (4.5), то

$$\{t_1,\omega(a)\} \equiv 0 \mod pK_2^{\mathrm{top}}(K)$$

(см. предложение 3), откуда следует, что $\alpha \equiv \{t_2,\eta\} \mod pK_2^{\mathrm{top}}(K)$. Если $\eta \equiv \omega(a) \mod (F^*)^p$ и $a \neq 0 \mod (\wp,p)$, то в качестве β возьмем t_1 и получим

$$\gamma_K(\alpha;\beta) = \gamma_K(t_2,\omega(a),t_1) \equiv a \not\equiv 0 \mod (\wp,p).$$

Если

$$\eta \equiv 1 + \Theta t_1^a \mod t_1^{a+1}, \quad (a,p) = 1, \ \Theta \in \mathcal{R},$$

то единица η может быть записана в виде

$$\eta \equiv E(\Theta t_1^a) \mod t_1^{a+1},$$

а тогда в качестве β возьмем

$$\beta = E(\Theta' t_1^{a'}), \quad a' = \frac{pe}{p-1} - a,$$

где $e = v_p(p)$. Тогда, как и выше, получаем

$$\gamma_K(t_1,\eta,\beta) \equiv \Theta\Theta' \mod (\wp,p).$$

Выбирая Θ' из $\mathcal{R}$ так, чтобы $\Theta\Theta' \not\equiv 0 \mod (\wp,p)$, получаем утверждение (B). Тем самым доказательство невырожденности в теореме 8 закончено. •

§5. Норменное свойство спаривания

Говорим, что спаривание $\langle , \rangle_M$ *имеет норменное свойство*, если выполнено следующее условие: $\langle \alpha, \beta\rangle_M = 1$ тогда и только тогда, когда α — норма из $K_n^{\mathrm{top}}(K(\sqrt[p^M]{\beta}))$, и это выполнено для каждой пары в $K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*$. Мы проверим норменное свойство только для 2-мерных полных полей, так как мы используем следующую лемму Суслина (см. [Су, следствие 20.7]), которая была доказана лишь для K_2^M-групп Милнора.

Лемма (Суслин). *Пусть α, β, γ — элементы из K^*.*

(1) *Символ $\{\alpha, \beta\}$ — норма из группы Милнора $K_2^M(K(\sqrt[m]{\gamma}))$ тогда и только тогда, когда символ $\{\alpha, \gamma\}$ — норма из $K_2^M(K(\sqrt[m]{\beta}))$.*

(2) *Если $\{\alpha, \beta\}$ — норма из группы $K_2^M(K(\sqrt[m]{\gamma_i}))$, $i = 1, 2$, то $\{\alpha, \beta\}$ — норма также и из $K_2^M(K(\sqrt[m]{\gamma_1\gamma_2}))$.*

Поэтому мы рассмотрим следующий случай

$$K = F((t_2)),$$

где F — одномерное полное поле, $\mathrm{char}\, F = 0$, $\mathrm{char}\, \overline{F} = p > 0$.

Говорим, что элемент $\alpha \in K_2^{\mathrm{top}}(K)$ *ортогонален* элементу $\beta \in K^*$ (пишем $\alpha \perp \beta$), если

$$\langle \alpha, \beta \rangle_M \equiv 1 \mod (\Omega \cap (K^*)^{p^M}).$$

Замечание. Если $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, то ортогональность эквивалентна условию

$$\gamma_K(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \equiv 0 \mod (\wp, p^M).$$

Произвольный элемент группы $K_2^{\mathrm{top}}(K)$ можно представить в виде

$$\alpha = c\{t_1, t_2\} + \{t_1, \omega(a)\} + \{t_2, \eta\} \bmod p^M K_2^{\mathrm{top}}(K), \tag{5.1}$$

где $\omega(a)$ — p^M-примарный элемент в F, η — главная единица в F.

Лемма 10. *Символ $\{t, \omega(a)\}$ ортогонален любой единице β из K, и он является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(K(\sqrt[p^M]{\beta}))$, т.е. $\gamma_K(t, \omega(a), \beta) \equiv 0 \mod (\wp, p^M)$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 11. *Пусть α — элемент $K_2^{\mathrm{top}}(K)$ и пусть t_2 — простой элемент поля K. Тогда спаривание $\langle\alpha, t_2\rangle_M$ имеет норменное свойство.*

Доказательство. Представим α в виде (5.1). Элемент $c\{t_1,t_2\} - \{\eta,t_2\}$, очевидно, является нормой из $K_2^{\mathrm{top}}(K(\sqrt[p^M]{t_2}))$, и он ортогонален t_2, так как $\gamma_K(t_1^c\eta^{-1},t_2,t_2) \equiv 0 \mod (\wp,p^M)$. Значит, спаривание $\langle\alpha,t_2\rangle_M$ обладает норменным свойством тогда и только тогда, когда норменное свойство выполнено для спаривания $\langle\{t_1,\omega(a)\},t_2\rangle_M$. Из формулы (4.2) для $\langle,\rangle_M$ следует, что $\{t_1,\omega(a)\}$ ортогонален t_2 тогда и только тогда, когда $a \equiv 0 \mod (\wp,p^M)$. Это равносильно тому, что $\omega(a) \in \Omega \cap (K^*)^{p^M}$ (по определению 3), а также тому, что $\{t_1,t_2\}$ — норма из $K_2^{\mathrm{top}}(K(\sqrt[p^M]{\omega(a)}))$. Остается применить лемму Суслина.

Следующая лемма проверяется точно так же, как и лемма 23, 24 из [В3, §7]. •

Лемма 12. *Пусть ε,η — главные единицы в F. Тогда спаривание $\langle\{t_1^c\varepsilon,t_2\},\eta\rangle_M$ имеет норменное свойство.*

Лемма 13. *Пусть α — элемент из $K_2^{\mathrm{top}}(F)$, а β — главная единица в K. Тогда $\langle\alpha,\beta\rangle_M$ обладает норменным свойством.*

Доказательство. Согласно предложению 1, можем считать, что β — главная единица в F. Представим α в виде (5.1). Ясно, что $\{t_1,\omega(a)\} \perp \beta$. Известно, что $\{t_1,\beta\}$ — норма из $K_2^{\mathrm{top}}(K(\sqrt[p^M]{\omega(a)}))$, так как расширение $K(\sqrt[p^M]{\omega(a)})/K$ абсолютно неразветвлено, а β — главная единица в F. Поэтому мы можем рассматривать следующую ситуацию: $\alpha = \{t_1^c\eta^{-1},t_2\}$, β, где η и β — главные единицы из F. Наша лемма следует теперь из лемм 11 и 12. •

Теорема 14. *Пусть K — двумерное полное поле, содержащее группу p-х корней из единицы. Тогда спаривание $\langle,\rangle_1$ обладает норменным свойством.*

Доказательство. Пусть β — элемент из K^*. Тогда β по модулю p-х степеней является либо единицей, либо степенью t_2, которая взаимно-проста с p. В первом случае применяем лемму 11, а во втором случае можно считать, что β — простой элемент (по модулю p-х степеней и меняя степень в случае необходимости), и далее применяем лемму 13. •

§6. Теория полей классов

Пусть Ω_0 — конечная подгруппа группы p^M-примарных элементов в K. Пусть N — открытая подгруппа из $K_2^{\mathrm{top}}(K) \bmod p^M K_2^{\mathrm{top}}(K)$. Говорим, что подгруппа $N' = N_{\Omega_0}^{\perp} \subset K^*$, соответствующая подгруппе Ω_0, является аннулятором N

относительно спаривания $\langle , \rangle_M$, если

(1) для каждого элемента $\alpha \in N$ и каждого элемента $\beta \in N'$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_M \in \Omega \cap K^{*p^M};$$

(2) для любого элемента $x \in K_2^{\text{top}}(K)$, $x \equiv 0 \mod p^M K_2^{\text{top}}(K)$, $x \notin N$, и любого элемента $\beta \in N'$ имеем

$$\langle x, \beta \rangle_M \in \Omega_0.$$

Теорема 15. *Пусть Ω_0 — конечная подгруппа в Ω. Пусть N — открытая подгруппа конечного p-индекса в $K_2^{\text{top}}(K)$, содержащая $p^M K_2^{\text{top}}(K)$. Тогда $N' = N^{\perp}_{\Omega_0}$ является конечной подгруппой по $\mathrm{mod}(K^*)^{p^M}$ и поле $L = K(\sqrt[p^M]{N'})$ — поле классов для подгруппы N, т.е. L — конечное абелево p-расширение, для которого N — норменная группа в $K_2^{\text{top}}(K(\sqrt[p^M]{N'}))$.*

Доказательство.

(1) Покажем, во-первых, что N' конечная. Для каждого элемента β из группы N' рассмотрим отображение

$$f_\beta : K_2^{\text{top}}(K) \to \Omega_0, \quad \alpha \mapsto f_\beta(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle_M.$$

Из свойств спаривания $\langle , \rangle_M$ следует, что f_β — гомоморфизм, а из определения группы N' видим, что

$$N \subset \operatorname{Ker} f_\beta.$$

Поэтому множество

$$H = \{ f_\beta \mid \beta \in N' \}$$

является подгруппой в группе

$$\mathrm{Hom}(K_2^{\text{top}}(K)/N, \Omega_0/\Omega_0 \cap (K^*)^{p^M}).$$

Последняя группа конечна, поэтому H тоже конечная группа.

(2) Второе утверждение теоремы немедленно следует из норменного свойства спаривания $\langle , \rangle$. Теорема доказана. •

Список литературы

[Б] Беккер Б. М., *Теория полей классов многомерных полных полей с квазиконечным полем вычетов*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **3** (1995), 128–134.

[В1] Востоков С. В., *Явная форма закона взаимности*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **42** (1978), № 6, 1288–1321.

[В2] Востоков С. В., *Символ Гильберта в дискретно нормированном поле*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **94** (1979), 50–69.

[В3] Востоков С. В., *Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **49** (1985), № 2, 283–308.

[В4] Востоков С. В., *Спаривание на K-группах многомерных полных полей*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **3** (1995), 140–184.

[ВФ] Востоков С. В., Фесенко И. Б., *О кручении в высших функторах Милнора многомерных локальных полей*, Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей, № 1, ЛГУ, Л., 1986, сс. 75–87.

[Ж] Жуков И. Б., *Структурная теорема для полных полей*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **3** (1995), 215–234.

[ЖМ] Жуков И. Б., Мадунц А. И., *Многомерные полные поля; топология и другие основные понятия*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **3** (1995), 4–46.

[М] Мадунц А. И., *О сходимости рядов над локальными полями*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **3** (1995), 260–282.

[П1] Паршин А. Н., *Поля классов и алгебраическая K-теория*, Успехи мат. наук **30** (1975), № 1, 253–254.

[П2] Паршин А. Н., *Абелевы накрытия арифметических схем*, Докл. АН СССР **243** (1978), № 4, 855–858.

[П3] Паршин А. Н., *Локальная теория полей классов*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 143–170.

[Су] Суслин А. А., *Алгебраическая K-теория и гомоморфизм норменного вычета*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достижения, т. 25, ВИНИТИ, М., 1984, сс. 115–207.

[Ф1] Фесенко И. Б., *Теория полей классов многомерных локальных полей нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики*, Алгебра и анализ **3** (1991), № 3, 165–196.

[Ш] Шафаревич И. Р., *Общий закон взаимности*, Мат. сб. **26(68)** (1950), № 1, 113–146.

[E] Epp H., *Eliminating wild ramification*, Invent. Math. **19** (1973), 235–249.

[F2] Fesenko I. B., *On class field theory of multidimensional local fields of positive characteristic*, Algebraic K-Theory (A. A. Suslin, ed.), Adv. Soviet Math., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 103–127.

[F3] Fesenko I. B., *Abelian local p-class field theory*, Math. Ann. **301** (1995), 561–586.

[FV] Fesenko I. B., Vostokov S. V., *Local fields and their extensions*, Transl. Math. Monogr., vol. 121, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[K1] Kato K., *A generalization of local class field theory by using K-groups*. I, II, III, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. **26** (1979), 303–376; **27** (1980), 603–683; **29** (1982), 31–43.

[K2] Kato K., *Generalized class field theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990), Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991, pp. 419–428.

[KS] Kato K., Saito S., *Two dimensional class field theory*, Galois Groups and their Representations (Nagoya, 1981), Adv. Stud. Pure Math., vol. 2, North-Holland, Amsterdam–New York, 1983, pp. 103–152.

[N] Neukirch J., *Class field theory*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 280, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1986.

[R] Raskind W., *Abelian class field theory of arithmetic schemes*, K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with Quadratic Forms and Division Algebras (Santa Barbara, CA, 1992), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 85–187.

Поступило 15 октября 1998 г.