



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ан. А. Мучник, Об основных структурах дескрип-
тивной теории алгоритмов,
Докл. АН СССР, 1985, том 285, номер 2, 280–283

<https://www.mathnet.ru/dan8885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

14 мая 2025 г., 02:49:44



ЛИТЕРАТУРА

1. Ross G., Fiddy M.A., Nieto-Vesperinas M. In: Inverse scattering problems in optik. N.Y.: Springer-Verlag, 1980, p. 15–71. 2. Ферверда Х.А. В кн.: Обратные задачи в оптике. М. Машиностроение, 1984, с. 21–47. 3. Абликов В.К., Авдеевский В.С., Бабаев Ю.Н. и др. – ДАН, 1983, т. 271, № 6, с. 1377–1386. 4. Клибанов М.В., Волостников В.Г., Котляр В.В. – ДАН, 1985, 279, № 6, с. 1348–1351. 5. Степанов В.Н. – Сиб. матем. журн., 1984, т. 25, № 1, с. 133–145. 6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с. 7. Fright W.R., Bates R.H.T. – Optik, 1982, vol. 62, № 3, p. 219–227. 8. Алексеев Г.В. – ЖВМиМФ, 1982, т. 22, № 3, с. 663–670.

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Ан.А. МУЧНИК

ОБ ОСНОВНЫХ СТРУКТУРАХ ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 25 IX 1984)

Вопрос о том, что составляет предмет изучения теории алгоритмов, каковы основные методы доказательства в этой теории, ставился давно (см., например, [1, 2]). В связи с этим часто обсуждалось также явление релятивизуемости. В настоящей работе сделана попытка частично ответить на сформулированные вопросы и привести математические утверждения, подтверждающие предлагаемые ответы. При этом мы будем затрагивать только дескриптивную, качественную, теорию алгоритмов, оставляя в стороне метрическую, количественную, теорию алгоритмов (теорию сложности).

Рядом авторов высказывалась точка зрения, согласно которой теория алгоритмов есть теория одного, универсального, алгоритма (см. [2]). Приводимая ниже теорема 1 является точным математическим подтверждением этого тезиса.

В соответствии с тем, что в теории алгоритмов принципиальным является рассмотрение частичных функций, мы также будем рассматривать структуры (алгебраические системы) с частичными операциями, специально этого не оговаривая. Через f_x будем обозначать функцию $\lambda y f(x, y)$, т.е. одноместную функцию, получаемую фиксацией первого аргумента в $f(x, y)$.

Пусть $F(x, y)$ – некоторая главная (гёделева) универсальная функция (см. [3]). Тогда пару $\langle N; F \rangle$ назовем вычислительной структурой.

Т е о р е м а 1. *Все вычислительные структуры изоморфны.*

Заметим, что в теореме 1, конечно, не обязательно требовать, чтобы носителем структуры был натуральный ряд N . В качестве такового можно взять любой ансамбль конструктивных объектов (см. [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $\langle N; F \rangle, \langle N; G \rangle$ – две вычислительные структуры. Утверждение теоремы состоит в существовании такой биекции $h: N \rightarrow N$, что

$$F(x, y) = z \iff G(h(x), h(y)) = h(z).$$

Иначе говоря, при всяком x из N должно быть выполнено

$$F_x = h^{-1} \circ G_{h(x)} \circ h.$$

Пусть имеется произвольная вычислимая биекция h . Тогда функция H , для которой $H_x = h^{-1} \circ G_x \circ h$, будет главной универсальной функцией. Согласно теореме Роджерса об изоморфизме гёделевых (главных) нумераций (см. [4]), найдется такая вычислимая биекция k , что $F_x = H_{k(x)}$ при всех x . Другими словами, $F_x = h^{-1} \circ G_{k(x)} \circ h$. Мы используем теорему о неподвижной точке для того, чтобы получить k , совпадающее с h .

Чтобы применение теоремы о неподвижной точке стало действительно возможным, мы уточним конструкцию из теоремы Роджерса так, чтобы биекция k строилась по всякой вычислимой функции h (не обязательно биекции). Если при этом h — биекция, то k будет обладать требуемыми свойствами.

П о с т р о е н и е k по h . Легко видеть, что по h можно эффективно построить некоторую функцию i , которая окажется обратной к h , если h была биекцией. Так как F и G — главные нумерации, можно найти всюду определенные вычислимые функции u и v , для которых

$$F_{u(x)} = i \circ G_x \circ h, \quad G_{v(x)} = h \circ F_x \circ i.$$

Построим вычислимую биекцию k , для которой из $k(m) = n$ следует, что либо $F_n = i \circ G_m \circ h$, либо $G_m = h \circ F_n \circ i$ (если h — биекция, то i и h взаимно обратны и оба равенства эквивалентны). Биекция k , как и в теореме Роджерса, строится по шагам. На четных шагах мы определяем $k(m)$ для некоторого m , еще не попавшего в область определения k . На нечетных шагах мы определяем $k^{-1}(n)$ для некоторого n , еще не попавшего в область значений k . Именно, $k(m)$ мы принимаем равным $u(m)$, если $u(m)$ не встречается среди уже определенных значений функции k ; если же это не так, то отыскиваем такое n , которое не встречается среди этих значений и для которого $F_n = F_{u(m)}$. Это можно сделать, так как по любому номеру функции в главной нумерации можно эффективно указать сколько угодно номеров той же функции. Аналогичным образом $k^{-1}(n)$ определяется как $v(n)$ или любое другое m , для которого $G_m = G_{v(n)}$ и на котором k еще не определена. Итак, биекция k построена.

Если исходная функция h была биекцией, то $i = h^{-1}$, $F_{k(m)} = h^{-1} \circ G_m \circ h$, что нам и требовалось. Теперь применение теоремы о неподвижной точке завершает доказательство теоремы 1.

Естественно возникает вопрос: что будет, если в теореме 1 вместо вычислимости рассматривать относительную вычислимость? Оказывается, все структуры, отвечающие одному и тому же оракулу (или эквивалентным оракулам), изоморфны. Иначе говоря, сама теория 1 релятивизуема.

Назовем **А-вычислительной структурой** структуру, определение которой получается из определения вычислительной структуры заменой вычислимости на вычислимость с оракулом A .

Можно показать, что при невычислимом A A -вычислительная структура не изоморфна и даже не элементарно эквивалентна вычислительной структуре (без оракула).

Пусть Φ — некоторое свойство структур рассмотренной сигнатуры (с единственной двуместной частичной функцией; мы рассматриваем лишь свойства, устойчивые относительно изоморфизма структур). Тогда в силу теоремы 1 для каждого оракула A либо Φ истинно для всех A -вычислительных структур, либо Φ ложно для них всех. Тем самым возникают три возможности:

- (1) Φ истинно для A -вычислительных структур при любом A ;
- (2) Φ ложно для A -вычислительных структур при любом A ;
- (3) Φ истинно для одних A -вычислительных структур и ложно для других, с другим A .

В случаях (1) и (2) Φ естественно назвать релятивизуемо истинным или релятивизуемо ложным свойством, а в случае (3) — нерелятивизуемым. Оказывается, либо большинство естественных утверждений теории алгоритмов относится к релятивизуемым свойствам. Мы увидим сейчас, что можно без апелляции к понятию вычислимости отделить релятивизуемо истинные утверждения от релятивизуемо ложных. Для этого нам понадобится Игра, которую мы сейчас определим.

Игра. В игре участвуют 2 игрока — Природа (Π) и Математик (M). Каждый из игроков постепенно строит свою структуру вида $\langle N; F \rangle$, где F — частичная функция $N \times N$ в N . (При этом вместо N можно взять любое счетное множество. Строение натурального ряда не используется.) В начале игры $F = \emptyset$ на каждом шаге происходит доопределение функций в конечном числе точек. Изменить определенные раньше значения функций нельзя. Игроки делают ходы по очереди. Таким образом, правила хода всегда одни и те же, возможные ходы не зависят от ходов противника. Различие между конкретными играми определяется функцией выигрыша (эта функция, как мы увидим, соответствует тому свойству, истинность которого хочет установить Математик). Пусть фиксировано свойство Φ структур рассматриваемого класса. Тогда в Φ -игре выигрывает Природа, если она построила такую функцию ν , а Математик — такую функцию μ , что:

(ВП1) Φ ложна в $\langle N; \nu \rangle$;

(ВП2) существует такое число ϵ , что ν_ϵ всюду определена и для любого x выполнено $\mu_x = \nu_{\nu_\epsilon(x)}$.

Как мы видим, от свойства Φ зависит только условие (ВП1), но оно не зависит от μ . Условие (ВП2) означает, что нумерация одноместных функций, построенная Математиком, сводится к нумерации одноместных функций, построенной Природой, причем сама сводящая функция также построена Природой.

Следующее утверждение позволяет отделить релятивизуемо истинные утверждения от релятивизуемо ложных в терминах описанной игры: *если Φ релятивизуемо истинно, то существует выигрышная стратегия для M ; если Φ релятивизуемо ложно, то существует выигрышная стратегия для Π .*

Это утверждение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Имеют место следующие эквивалентности (B — произвольное множество натуральных чисел; $B \leq_{\mathcal{T}} A$ означает разрешимость B относительно A):*

(а) *(свойство Φ выполнено для всех A -вычислительных структур, для которых $B \leq_{\mathcal{T}} A$) \Leftrightarrow (существует выигрышная стратегия для M в Φ -игре, вычислимая относительно B);*

(б) *(свойство Φ ложно для всех A -вычислительных структур, для которых $B \leq_{\mathcal{T}} A$) \Leftrightarrow (существует выигрышная стратегия для Π в Φ -игре, вычислимая относительно B).*

Доказательство теоремы 2 будет дано для разрешимого B ; его релятивизация на случай произвольного B проходит обычным образом. Рассмотрим следующую вычислимую стратегию (которой могут пользоваться и M , и Π). "Наблюдайте за игрой противника. Стройте себе главную универсальную функцию для функций, вычислимых относительно игры противника (точнее, относительно функции $n \mapsto n$ -й ход противника)."

Руководствуясь этой стратегией, Π добьется выполнения условия (ВП2), так как построенная M функция будет, разумеется, вычислимой относительно действий M . Поэтому верно (б, \Rightarrow). Если подобную стратегию использует M , то Π , не желая нарушить условия (ВП2), обязана строить главную универсальную функцию для X -вычислимых функций, где X — игра Π , рассматриваемая как оракул (X -вычислимость этой функции очевидна, а главность обеспечивается условием (ВП2), так как M строит главную X -вычислимую функцию). Поэтому выполнено (а, \Rightarrow).

Обратные импликации доказываются так.

(б, \Leftarrow). Если Φ не выполнено для главных универсальных A -вычислимых функций, то M может обыграть любую вычислимую стратегию Π , строя у себя главную универсальную A -вычислимую функцию: так как стратегия Π вычислима, то построенная ею функция будет A -вычислимой и главной для A -вычислимых функций в силу условия (ВП2) (более точно, M должен действовать так, чтобы его действия также были A -вычислимы; это, очевидно, возможно).

(а, \Leftarrow). Аналогичным образом, если при каком-то A свойство Φ выполнено, то Π обыгрывает любую вычислимую стратегию M , строя главную универсальную A -вычислимую функцию.

Теорема 2 доказана.

В приведенном ниже следствии слова "... для всех достаточно больших A " означают "существует такое множество $B \subset \mathbb{N}$, что... для всех $A \subset \mathbb{N}$, для которых $B \leq_T A$ ".

С л е д с т в и е. *Имеют место следующие эквивалентности: (свойство Φ выполнено для A -вычислительных структур при достаточно больших A) \Leftrightarrow (существует выигрышная стратегия для M в Φ -игре); (свойство Φ ложно для A -вычислительных структур при достаточно больших A) \Leftrightarrow (существует выигрышная стратегия для Π в Φ -игре).*

Отметим, что отсюда и из теоремы о детерминированности борелевских игр вытекает следующий результат (Мартин): если Φ — борелевское свойство, то либо Φ , либо отрицание Φ выполнено для всех A -вычислительных структур при достаточно больших A .

Теорема 2 дает схему доказательства релятивизируемой истинности некоторого свойства: нужно построить вычислимую выигрышную стратегию для M в Φ -игре. Анализ обычных доказательств теории алгоритмов показывает, что большинство их легко укладывается в эту схему, причем основную часть доказательства составляет описание стратегии и проверка того, что она выигрышная; вычислимость ее устанавливается легко.

Научный совет по комплексной проблеме
"Кибернетика"
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 XII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972. 624 с.
2. Успенский В.А., Семенов А.Л. В кн.: Алгоритмы в современной математике и ее приложениях. Новосибирск, 1982, п. 1. с. 99–342.
3. Успенский В.А. Лекции о вычислимых функциях. М., 1960. 492 с.
4. Rogers H. jr. — J. Symbolic Logic, 1958, vol. 23, № 3, p. 331–341.