1976 г. сентябрь — октябрь *т. XXXI, вып. 5 (191)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Посвящается П. С. Александрову
по случаю его восьмидесятилетия

УДК 513.83

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ

А. Дольд[1])

0. Введение. Пусть P, Q — непустые компактные связные полиэдры с базисными точками $\mathrm{pt} \in P$, $\mathrm{pt} \in Q$. Для непрерывного отображения h: $P \times Q \to P \times Q$ отображения h_P: $P \to P$, h_Q: $Q \to Q$, называемые *гранями* отображения h, определяются соотношениями $h_P(x) = \mathrm{proj}_1(h(x, \mathrm{pt}))$, $h_Q(y) = \mathrm{proj}_2(h(\mathrm{pt}, y))$. Можно поставить вопрос о том, насколько связаны свойства неподвижной точки для h и для h_P, h_Q. Примеры показывают, что прямой связи, вообще говоря, нет. Картина, однако, меняется, если принять во внимание также итерации отображений. Изучение примеров привело меня к мысли, что индекс $I(h)$ может быть выражен через $I(h_P^j)$ и $I((h^i)_Q)^j$, где $i, j = 1, 2, \ldots$, но пока доказать эту гипотезу мне не удалось. В настоящей заметке показывается (2.1), (2.2), что для одного нетривиального класса отображений h (или пространств Q) имеем $I(h) = I(h_P) \cdot I((h^m)_Q)$, где m — наименьшее натуральное число в отрезке $[1, \dim P]$ такое, что характеристическая рациональная функция $(h^m)_Q$ нетривиальна (или $I(h) = I(h_P)$, если такого m не существует). Доказательства, как по существу и все формулировки, алгебраические.

1. Предварительные сведения. Обозначения. Мы рассматриваем конечномерные градуированные (анти)-коммутативные связные алгебры X над полем k. Итак, $X = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$, $\dim(X_j) < \infty$ для всех j, $X_j = 0$ для достаточно больших j, $X_0 = k$; перестановочный закон есть $xy = (-1)^{|x||y|}yx$, где $|x|$ есть степень x (так что $x \in X_{|x|}$). Имеем инъекцию ι: $k = X_0 \to X$ и проекцию (= *аугментацию*) π: $X \to X_0 = k$ градуированных алгебр ($\iota_0 = \mathrm{id}$, $\pi_0 = \mathrm{id}$, $\pi_j = 0$ при $j > 0$) с $\pi\iota = \mathrm{id}$. *Аугментационный идеал* $X = \ker(\pi)$ состоит из $\{X_1, X_2, \ldots\}$.

Типичным примером такой алгебры служит когомологическая алгебра $X = H^*(P; k)$ компактного связного полиэдра $P \neq \varnothing$. Отображение полиэдра P на точку pt и вложение базисной точки $\mathrm{pt} \to P$ индуцируют, переходом

[1]) A. Dold, Fixed-point properties of product spaces (ФРГ, Гейдельбергский университет). Перевод с английского выполнен А. А. Мальцевым.

к когомологиям, инъекцию $k \to X$ и аугментацию $X \to k$ алгебры $X = H^*(P; k)$.

Если X и Y — алгебры указанного выше вида, то тот же вид имеет их тензорное произведение $X \otimes Y = X \otimes_k Y$, с $(X \otimes Y)_j = \oplus_i X_i \otimes Y_{j-1}$ и умножением $(x \otimes y)\cdot(x' \otimes y') = (-1)^{|y|\,|x'|}(xx') \otimes (yy')$ для любых $x, x' \in X$; $y, y' \in Y$. Инъекции ι и проекции π для X и Y можно употребить для определения инъекций

$$X = X \otimes k \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\iota} X \otimes Y \xleftarrow{\iota\otimes\mathrm{id}} k \otimes Y = Y \tag{1.1}$$

и проекций

$$X = X \otimes k \xleftarrow{\mathrm{id}\otimes\pi} X \otimes Y \xrightarrow{\pi\otimes\mathrm{id}} k \otimes Y = Y. \tag{1.2}$$

В частности, мы можем (и будем) рассматривать X и Y как подалгебры в $X \otimes Y$. В наших геометрических примерах, где $X = H^*(P; k)$, $Y = H^*(Q; k)$, мы имеем $H^*(P \times Q; k) \cong X \otimes Y$ по теореме Кюннета. Инъекции (1.1) и проекции (1.2) индуцированы геометрическими проекциями $P \leftarrow P \times Q \to Q$ и включениями $P = P \times \mathrm{pt} \to P \times Q \leftarrow \mathrm{pt} \times Q = Q$.

Для k-линейного отображения α: $X \to X$ градуированных векторных пространств (т. е. для $\alpha = \{\alpha_j\colon X_j \to X_j\}_j$) его лефшецевский след $L(\alpha) \in k$ определяется как

$$L(\alpha) = \sum_j (-1)^j \operatorname{tr}(\alpha_j\colon X_j \to X_j). \tag{1.3}$$

Он наследует знакомые свойства обычного следа. Например, если $X \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\gamma} X$ суть градуированные отображения градуированных k-векторных пространств степени, соответственно, d и $-d$ (т. е. $\beta_j\colon X_j \to Y_{j+d}$ и $\gamma_j\colon Y_j \to X_{j-d}$), то

$$L(\gamma\beta) = (-1)^d L(\beta\gamma). \tag{1.4}$$

В нашем геометрическом примере $X = H^*(P; k)$ лефшецевский след отображения $\alpha = f^*\colon X \to X$, порожденного непрерывным отображением $f\colon P \to P$, совпадает с хопфовским индексом неподвижных точек: $L(\alpha) = I(f)$ по теореме Лефшеца — Хопфа о неподвижной точке [1]).

Если α: $X \to X$ и σ: $Y \to Y$ — оба нулевой степени, то нулевую степень имеет также $\alpha \otimes \beta$: $X \otimes Y \to X \otimes Y$, и мы имеем

$$L(\alpha \otimes \beta) = (L\alpha)(L\beta). \tag{1.5}$$

Геометрически получаем $I(f \times g) = (If)(Ig)$ для отображений $f\colon P \to P$, $g\colon Q \to Q$. Как объяснялось во введении, целью этой заметки является изучение $I(h\colon P \times Q \to P \times Q)$ в случае, когда h *не* есть произведение отображений. Алгебраически это означает изучение лефшецевского следа $L\varphi$ эндоморфизмов алгебр φ: $X \otimes Y \to X \otimes Y$, не имеющих вида $\alpha \otimes \beta$.

2. Результаты и доказательства. Пусть X, Y суть k-алгебры, как в п. 1, и пусть φ: $X \otimes Y \to X \otimes Y$ — гомоморфизм алгебр. Пусть φ_X: $X \to X$, соответственно, φ_Y: $Y \to Y$ — композиции φ, соответственно, с инъекцией (1.1) и проекцией (1.2), так что, например, φ_X: $X \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\iota} X \otimes Y \xrightarrow{\varphi} X \otimes Y \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\pi} Y$. Эти гомоморфизмы называются иногда также *гранями* гомоморфизма φ.

---

[1]) Ср. раздел VII.6 в книге A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer, Heidelberg, 1972.

(2.1) Предложение. *Если для некоторого натурального $m > 0$ для гомоморфизма алгебр φ: $X \otimes Y \to X \otimes Y$ имеем $\varphi^j Y \subset X$ при $1 \leqslant j < m$ и $\varphi^m Y \subset Y$, то*

$$L\varphi = L(\varphi_X)(L(\varphi^m)_Y).$$

(2.2) Предложение. *Если для некоторого натурального $m > 0$ для гомоморфизма алгебр φ: $X \otimes Y \to X \otimes Y$ имеем $\varphi^j Y \subset X$ при $1 \leqslant j \leqslant m$ и $\varphi(y)\varphi^2(y) \ldots \varphi^m(y) = 0$ для всех $y \in \tilde{Y}$ (т. е. для всех y положительной размерности), то $L\varphi = L(\varphi_X)$.*

(2.3) Замечание. Условия на φ в (2.1) и (2.2), конечно, очень ограничительны. Тем не менее, как мы увидим в п. 3, для некоторых известных алгебр Y они всегда удовлетворены (для всех φ).

Доказательства. Пусть T есть k-базис в Y, и пусть $1 \in T$. Тогда T есть также X-базис в $X \otimes Y$. Имеется единственный k-гомоморфизм $(\varphi_{st}\colon X \to X)_{s \in T,\, t \in T}$ такой, что

$$\varphi(x \otimes t) = \sum_{s \in T} \varphi_{st}(x) \otimes s \text{ при } x \in X. \tag{2.4}$$

Степень φ_{st} равна $|t| - |s|$. Очевидно, лефшецевский след гомоморфизма φ есть

$$L\varphi = \sum_{t \in T} (-1)^{|t|} L(\varphi_{tt}). \tag{2.5}$$

Докажем теперь такую лемму.

(2.6) Лемма. *Если $\varphi^j Y \subset X$ при $1 \leqslant j < m$, то $L(\varphi_{tt})$ совпадает с лефшецевским следом отображения $X \to X$, заданного соотношением $x \mapsto \varphi_{t1}(x \cdot \varphi^j(t))$ при $1 \leqslant j < m$.*

Доказательство леммы. Индукция по j. При $j = 1$ вычисления дают

$$\varphi(x \otimes t) = \varphi(x \otimes 1)\varphi(1 \otimes t) = \Big(\sum_s \varphi_{s1}(x) \otimes s\Big)(\varphi(t) \otimes 1) = \\ = \sum_s (-1)^{|s|\,|t|} \varphi_{s1}(x)\varphi(t) \otimes s,$$

так что

$$\varphi_{tt}(x) = (-1)^{|t|} \varphi_{t1}(x)\varphi(t).$$

По (1.4) имеем

$$L(\varphi_{tt}) = L[x \mapsto \varphi_{t1}(x\varphi(t))],$$

что и требовалось. Пусть теперь $j > 1$. Снова вычисляя, имеем

$$\varphi(x \cdot \varphi^{j-1}(t) \otimes 1) = \varphi(x \otimes 1)\varphi(\varphi^{j-1}(t) \otimes 1) = \\ = \Big(\sum_s \varphi_{s1}(x) \otimes s\Big)(\varphi^j(t) \otimes 1) = \\ = \sum_s (-1)^{|s|\,|t|} \varphi_{s1}(x)\varphi^j(t) \otimes s,$$

следовательно,

$$\varphi_{t1}(x\varphi^{j-1}(t)) = (-1)^{|t|} \varphi_{t1}(x)\varphi^j(t). \tag{2.7}$$

Пользуясь (1.4), завершаем индукцию:

$$L[x \mapsto \varphi_{t1}(x \cdot \varphi^{j-1}(t))] = L[x \mapsto \varphi_{t1}(x \cdot \varphi^j(t))].$$

Доказательство предложения (2.1). Если $m=1$, то

$$\varphi(x\otimes t)=\varphi(x\otimes 1)\,\varphi(1\otimes t)=\Big(\sum_s \varphi_{s1}(x)\otimes s\Big)\,(1\otimes\varphi(t))=\sum_t \varphi_{s1}(x)\otimes s\cdot\varphi(t).$$

Если $s\neq 1$, то $|s|>0$, и потому $|s\cdot\varphi(t)|=|s|+|t|>|t|$, так что эти слагаемые не войдут в $\varphi_{tt}(x)$. Но остающееся слагаемое $\varphi_{11}(x)\otimes\varphi(t)$ равно $\varphi_X(x)\otimes\varphi_Y(t)$, откуда, по (2.5) и (1.5), получаем $L\varphi=L(\varphi_X)\cdot L(\varphi_Y)$.

Если $m>1$, то

$$\varphi(x\cdot\varphi^{m-1}(t)\otimes 1)=\varphi(x\otimes 1)\,\varphi(\varphi^{m-1}(t)\otimes 1)=$$
$$=\Big(\sum_s \varphi_{s1}(x)\otimes s\Big)(1\otimes\varphi^m(t))=\sum_s \varphi_{s1}(x)\otimes s\cdot\varphi^m(t).$$

Как и раньше, слагаемые с $s\neq 1$ не входят в $\varphi_{t1}(x\cdot\varphi^{m-1}(t))$, а остающееся слагаемое $\varphi_{11}(x)\otimes\varphi^m(t)$ равно $\varphi_X(x)\otimes(\varphi^m)_Y(t)$. Следовательно,

$$\sum_t (-1)^{|t|}L\,[x\mapsto\varphi_{t1}(x\cdot\varphi^{m-1}(t))]=L(\varphi_X\otimes(\varphi^m)_Y)=(L\varphi_X)\cdot(L(\varphi^m)_Y).$$

Левая часть этого равенства, по лемме (2.6) и по (2.5), равна $L\varphi$.

Доказательство предложения (2.2). По (2.5) достаточно показать, что $L(\varphi_{tt})=0$ при $t\neq 1$, поскольку $\varphi_{11}=\varphi_X$. В силу леммы (2.6) мы знаем, что $L(\varphi_{tt})$ совпадает с $L(\psi_t)$, где $\psi_t(x)=\varphi_{t1}(x\cdot\varphi^m(t))$, и знаем, что $\varphi(t)\cdot\varphi^2(t)\ldots\varphi^m(t)=0$. Мы сейчас покажем, что ψ_t нильпотентно при $t\neq 1$; в частности, $L(\psi_t)=0$. Действительно, r-кратная итерация ψ_t, где $r\leqslant m$, дает

$$(\psi_t)^r(x)=\pm(\varphi_{t1})^r(x\cdot\varphi^m(t)\cdot\varphi^{m-1}(t)\ldots\varphi^{m-r+1}(t)),$$

что доказывается индукцией по r с использованием (2.7). При $r=m$ правая часть равна нулю.

3. Примеры. Приложения. Обобщения.

(3.1) Усеченные полиномиальные алгебры. Пусть V — конечно-порожденное градуированное векторное пространство над полем k, а SV — соответствующая симметрическая алгебра. Другими словами, если $\{u_1,\ldots,u_n\}$ — базис в V, то SV есть полиномиальная алгебра $k[u_1,\ldots,u_n]$. Пусть I — аугментационный идеал, порожденный $u_1,\ldots,u_n$, и пусть $S^rV=SV/I^{r+1}$, где $r\in\mathbf{N}$; таким образом, S^rV есть полиномиальная алгебра от $u_1,\ldots,u_n$ усеченная на высоте $r+1$. Мы предполагаем, что V градуировано *четными положительными степенями*; тогда $Y=S^rV$ есть конечномерная градуированная (четными степенями) коммутативная связная k-алгебра. Мы увидим, что с помощью (2.1) и (2.2) можно вычислить лефшецевский след $L\varphi$ для всех X и φ: $X\otimes Y\to X\otimes Y$, если только $r+1$ не кратно характеристике поля k.

Для начала предположим, что V *сконцентрировано в одной степени* d, т. е. что $|v|=d$ для всех $v\in V$, и $d\equiv 0 \bmod 2$. Общий случай можно рассмотреть по-существу тем же методом, вычисляя по модулю членов более высокой фильтрации (ср. (3.4)). Для каждого $v\in V$, $v\neq 0$ имеем $v^{r+1}=0$ и $v^r\neq 0$ в Y. Если φ: $X\otimes Y\to X\otimes Y$ — некоторый гомоморфизм алгебр, как в п. 2, то $\varphi(1\otimes v)=v_1\otimes 1\otimes 1\otimes v_2$ с $v_1\in X$ и $v_2\in V$, так что $0=\varphi(1\otimes v^{r+1})=\varphi(1\otimes v)^{r+1}=(v_1\otimes 1\otimes 1\otimes v_2)^{r+1}$. В разложении бинома

каждый член должен быть равным нулю (по соображениям степени); в частности, $(r+1)(v_1)\otimes(v_2)^r=0$. Если $\mathrm{char}(k)$ не делит $r+1$, то отсюда вытекает, что либо $v_1=0$, либо $v_2^r=0$. Поскольку $v_2\in V$, имеем $[v_2^r=0\Longleftrightarrow v_2=0]$. Объединяя, видим, что для каждого $v\in V$ имеем либо $v_1=0$, либо $v_2=0$. Более того, этот выбор должен быть всегда одинаковым, поскольку из $v, w\in V$ с $v_1\neq 0$ и $w_2\neq 0$ вытекало бы $vw^r=0$, в то время как $\varphi(1\otimes vw^r)=v_1\otimes w_2^r\neq 0$. Другими словами, или $\varphi(V)\subset X$, или $\varphi(V)\subset V\subset Y$. Поскольку V порождает алгебру Y, это доказывает

(3.2) Предложение. *Если $Y=S^rV$ есть усеченная полиномиальная алгебра, как выше (все образующие которой имеют одну и ту же четную степень и $\mathrm{char}(k)$ не делит $r+1$), то для любой алгебры X (описанного в п. 1 типа) и любого гомоморфизма алгебр $\varphi\colon X\otimes Y\to X\otimes Y$ имеем $\varphi Y\subset X$ или $\varphi Y\subset Y$, и потому также $\varphi^jY\subset X$ или $\varphi^jY\subset Y$ для каждого $j\in\mathbf{N}$.*

В частности, предложения (2.1) и (2.2) всегда применимы к φ. Например, если $Y=S^rV$ порождается *единственным* элементом u, т. е. если $Y=k[u]/u^{r+1}$ с $|u|=0 \bmod 2$, то лефшецевский след каждого $\psi\colon Y\to Y$ имеет вид $1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^r$. Следовательно, лефшецевский след каждого $\varphi\colon X\otimes Y\to X\otimes Y$ имеет форму $L\varphi=(L\varphi_X)(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^r)$.

(3.3) Геометрически усеченные полиномиальные алгебры могут быть реализованы как когомологические алгебры симметрических степеней букетов сфер. Точнее, если $S_1, S_2, \ldots, S_m$ — четномерные сферы, и $V=\widetilde{H}^*(S_1\vee S_2\vee\ldots\vee S_m;k)$, $\mathrm{char}(k)=0$, то

$$H^*(SP^r(S_1\vee S_2\vee\ldots\vee S_m\,|;k)\cong S^rV,$$

что доказывается известными соображениями «эквивариантности». В частности, $H^*(SP^r(S^{2n});\ k)\cong k[u]/u^{r+1}$ с $|u|=2n$. Аналогично, $H^*(P_r\mathbf{C};k)$ и $H^*(P_r\mathbf{H};k)$ имеют ту же форму. Согласно замечанию после предложения (3.3), если $P\neq\varnothing$ — произвольный компактный связный полиэдр, и $Q=SP^r(S^{2n})$, либо $Q=P_r\mathbf{C}$, либо $Q=P_r\mathbf{H}$, то индекс неподвижной точки любого отображения $h\colon P\times Q\to P\times Q$ имеет вид

$$I(h)=I(h_P)\cdot I((h^j)_Q)=I(h_P)(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^r),$$

где $h_P\colon P\to P$, $h_Q\colon Q\to Q$ суть грани h, а $\lambda\in\mathbf{Z}$ есть либо нуль, либо первая не исчезающая «степень» h^j. В частности, *каждое конечное произведение пространств $SP^{2r}(S^{2n})$* обладает свойством неповижной точки.

(3.4) Вычисления по модулю более высоких членов. Всякая связная градуированная алгебра X, как в п. 1, может быть профильтрована степенями своего аугментационного идеала:

$$X\supset\widetilde{X}\supset\widetilde{X}^2\supset\ldots\supset\widetilde{X}^N=0.$$

Можно образовать (би)-градуированную алгебру θX, ассоциированную с этой фильтрацией,

$$(\theta X)_n=\oplus_i(\theta_iX_n),\quad\text{где}\quad\theta_iX=\widetilde{X}^i/\widetilde{X}^{i+1}.$$

Тогда $\theta(X \otimes Y) = (\theta X) \otimes (\theta Y)$. Гомоморфизм алгебр α: $X \to X$ индуцирует гомоморфизм $\theta\alpha$: $\theta X \to \theta X$, и обычная аддитивность следа на короткой точной последовательности дает $L\alpha = L(\theta\alpha)$.

Это позволяет распространить предложения (2.1) и (2.2) на более общий случай (детали оставлены читателю): вместо $\varphi^j Y \subset X$, соответственно, $\varphi^j Y \subset \subset Y$, достаточно предполагать, что $(\theta\varphi^j)(\theta Y) \subset \theta X$ или, соответственно, $(\theta\varphi^j)(\theta Y) \subset \theta Y$. Поскольку $\theta_1 Y$ порождает θY, это в свою очередь будет выполняться, если, соответственно, $(\theta_1 \varphi^j)(\theta_1 Y) \subset \theta_1 X$ или $(\theta_1\varphi^j)(\theta_1 Y) \subset \theta_1 Y$.

В качестве иллюстрации рассмотрим снова усеченную полиномиальную алгебру $S^r V = SV/I^{r+1}$, как в (3.1), где V градуирована четными положительными степенями, но *не обязательно сконцентрирована в одной размерности*. Теперь уже нельзя утверждать, что $\varphi Y \subset X$ или $\varphi Y \subset Y$. Доказательство не проходит, поскольку $\varphi(1 \otimes v)$ может теперь иметь смешанные члены:

$$\varphi(1 \otimes v) = v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2 + \sum_{\mu} x_\mu \otimes y_\mu.$$

Но смешанные члены $x_\mu \otimes y_\mu$ имеют высокую фильтрацию. Они исчезают в θ и, как раньше, можно заключить (рассматривая $\varphi(1 \otimes v^{r+1})$ и $\varphi(1 \otimes vw^r)$), что $(\theta\varphi)(\theta Y) \subset \theta X$ или $(\theta\varphi)(\theta Y) \subset \theta Y$. Другими словами, что либо $v_1 = 0$ для всех $v \in V$, либо $v_2 = 0$ для всех $v \in V$. Например, если V имеет базис $\{u_1, \ldots, u_n\}$ такой, что $|u_p| \neq |u_q|$ при $p \neq q$, то лефшецевский след любого φ: $X \otimes Y \to X \otimes Y$ имеет вид

$$L\varphi = (L\varphi_X)\Big(\sum_{|\nu| \leqslant r} \lambda_1^{\nu_1}\lambda_2^{\nu_2} \ldots \lambda_n^{\nu_n}\Big)$$

для подходящих $\lambda_i \in k$; суммирование здесь проходит по всем $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ таким, что $\sum_{i=1}^{n} \nu_i \leqslant r$.