R. S. Ismagilov, On extensions of current groups and their representations,
*Algebra i Analiz*, 1994, Volume 6, Issue 1, 159–171

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 1



# О РАСШИРЕНИЯХ ГРУПП ТОКОВ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Р. С. Исмагилов

В работе рассматриваются группы гладких отображений многообразия в группу Ли. Изучаются представления некоторых ее накрывающих в пространстве Фока. Рассмотрены также нецентральные абелевы расширения и их представления.

## Введение

Пусть $X$ — связное бесконечно-дифференцируемое многообразие размерности $n < \infty$, $K$ — компактная полупростая группа Ли; через $e$ обозначается нейтральный элемент в $K$. Пусть $G = C_0^\infty(X, K)$ — группа всех $C^\infty$-отображений $g\colon X \to K$ таких, что $g(x) = e$ вне некоторого компакта (в случае некомпактного $X$); если $X$ компактно, пишем $C^\infty(X, K)$. Группу $G$ называют группой гладких токов. В случае $X = S^1$ ее унитарные проективные представления изучались во многих работах; отметим лишь книгу [1]. Случай $n \geqslant 2$ рассматривался в [2–4].

В предлагаемой статье вводится несложная модификация конструкции из [2–4]. Это приводит, в частности, к представлениям универсальной накрывающей $\widetilde{G}$ группы $G$. Указывается ограничение представления на центр группы $\widetilde{G}$, отождествляемый с фундаментальной группой $\pi_1(G)$. В некоторых случаях (например, для $X = S^2$, $K = SU_2$) построенное представление группы $\widetilde{G}$ оказывается точным. В общем случае получается точное представление некоторой (вообще говоря, не универсальной) накрывающей $\widetilde{G}_0$ группы $G$. Исследуются условия неприводимости.

Далее рассматриваются некоторые абелевы (нецентральные) расширения упомянутой группы $\widetilde{G}_0$ и их представления. Эти расширения — это слабое подражание известному расширению Микельсона–Фаддеева ([1], гл. 4). Рассматриваемые расширения реализуются посредством унитарных представлений; для расширений Микельсона–Фаддеева такая реализация не построена, и, возможно, она не существует. Исследуется неприводимость представлений.

Конструкция указанных абелевых расширений и их представлений основана на простой общей процедуре, позволяющей по данной динамической системе (в которой в качестве „времени“ выступает некоторая группа) построить представление некоторого абелева расширения этой группы.

## §1. Представления универсальной накрывающей группы токов

**1.1. Представления групп в пространстве Фока** $\operatorname{Exp} H$. Напомним известную конструкцию (см. [5,6]). Пусть $H$ — комплексное гильбертово пространство, $G$ — топологическая группа, $\pi$ — ее унитарное представление в $H$. Пусть дано непрерывное отображение $r\colon G \to H$, удовлетворяющее условию

$$r(g_1 g_2) = r(g_1) + \pi(g_1) r(g_2)$$

(такое отображение называется коциклом). Рассмотрим пространство Фока $\operatorname{Exp} H = \bigoplus H^k$, где $H^k$ означает симметрическую степень пространства $H$. Векторы

$$\operatorname{Exp} x = 1 \oplus \frac{x}{1!} \oplus \frac{x}{2!} \oplus \dots, \qquad (x \in H),$$

образуют полный набор в $\operatorname{Exp} H$ и $(\operatorname{Exp} x, \operatorname{Exp} y) = e^{(x,y)}$ при $x, y \in H$. В пространстве $\operatorname{Exp} H$ определены унитарные операторы $T(g)$, $g \in G$, равенством

$$T(g) \operatorname{Exp} x = e^{-(x, \pi(g^{-1}) r(g)) - \frac{1}{2}|r(g)|^2} \operatorname{Exp}(\pi(g)x + r(g)), \qquad (g \in G, x \in H).$$

Они образуют проективное представление группы $G$; точнее,

$$T(g_1)T(g_2) = e^{-if(g_1, g_2)} T(g_1 g_2), \tag{1}$$

$$f(g_1, g_2) = \operatorname{Im}(r(g_1^{-1}), r(g_2)). \tag{2}$$

В случае тривиальности коцикла (2) получаем обычное (не проективное) представление.

**1.2. Представления группы токов** $G = C_0^\infty(X, K)$. Применим сказанное к группе токов. Мы несколько обобщим конструкцию, изложенную в [2–4]. Пусть $k$ — алгебра Ли группы $K$, $k_{\mathbb{C}}$ — ее комплексификация. На $k$ имеется положительно-определенное $K$-инвариантное скалярное произведение. Пусть $E^1 = E^1(X, K)$ означает пространство гладких 1-форм с компактными носителями со значениями в $k$, $E^1_{\mathbb{C}} = E^1(X, k_{\mathbb{C}})$ — его комплексификация. Построим в $E^1_{\mathbb{C}}$ скалярное произведение. С этой целью возьмем риманову метрику $r$ на $X$, положительную функцию $\rho \in C^\infty(X)$ и положим

$$(\alpha, \beta) = \int_X \operatorname{Tr}(\alpha(x)(\beta(x))^*)\rho(x)\,dx, \qquad (\alpha, \beta \in E^1), \tag{3}$$

где $dx$ — мера, порожденная римановой метрикой $r$. (Поясним, что $(\beta(x))^*$ — это оператор из $k$ в касательное пространство $V(x)$ в точке $x \in X$, сопряженный к оператору $\beta(x)\colon V(x) \to k$ относительно скалярных произведений в $k$ и $V(x)$; $\mathrm{Tr}$ означает след оператора в $k$). Скалярное произведение (3) продолжается до эрмитова скалярного произведения в $E^1_{\mathbb{C}}$; через $H$ обозначим гильбертово пространство, полученное из $E^1_{\mathbb{C}}$ пополнением. Группа $G = C_0^\infty(X, K)$ действует в $E^1$ (и, следовательно, также в $H$) по формуле

$$(\pi(g)\alpha)(x) = \mathrm{ad}_{g(x)}\,\alpha(x), \qquad g \in G,\ \ \alpha \in E^1. \tag{4}$$

Отображение $g \to dg \cdot g^{-1}$ из $G$ в $E^1$ является коциклом; можно считать, что он принимает значения в $H$. Для краткости введем обозначение $dg \cdot g^{-1} = \overset{\bullet}{g}$, $g \in G$. Построим коциклы (со значениями в $H$), имеющие более общий вид. С этой целью выберем в каждом касательном пространстве $V(x)$ линейные операторы $a(x)$, $b(x)$; предполагается, что они гладко зависят от точки $x \in X$. Для любой 1-формы $\alpha$ определена 1-форма $\alpha \circ a$ по формуле $(\alpha \circ a)(\xi) = \alpha(x)(a(x)\xi)$, $\xi \in V(x)$. Аналогично определяется $\alpha \circ b$. Ясно, что вектор-функция

$$r(g) = \overset{\bullet}{g} \circ a + i\overset{\bullet}{g} \circ b \tag{5}$$

является коциклом со значениями в $E^1_{\mathbb{C}}$ (а также в $H$). Имея представление (4) и коцикл (5), построим, следуя общей схеме из п. 1, проективное представление $T$ группы $G$. Соответствующая ему функция (2) имеет вид (мы опускаем очевидные вычисления и приводим лишь окончательную формулу):

$$f(g_1, g_2) = ((g_1^{-1})^\bullet \circ s, \overset{\bullet}{g}_2), \tag{6}$$
$$(s(x) = a(x)(b(x))^* - b(x)(a(x))^*). \tag{7}$$

Заметим, что $(s(x))^* = -s(x)$. Запишем эту формулу иначе. Начиная с этого места предположим, что $X$ ориентировано. Зафиксируем положительную форму объема $v^n$ на $X$, порождающую указанную выше меру $dx$. Существует единственная внешняя $(n-2)$-форма $\omega^{n-2}$, удовлетворяющая условию

$$\langle \varphi \circ s, \psi \rangle \rho v^n = \varphi \wedge \psi \wedge \omega^{n-2} \tag{8}$$

для любых вещественных 1-форм $\varphi$, $\psi$; здесь $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение в $V(x)$, порожденное римановой метрикой. Отсюда

$$f(g_1, g_2) = \int_X ((g_1^{-1})^\bullet \wedge g_2) \wedge \omega^{n-2}. \tag{9}$$

(Поясним, что $((g_1^{-1})^\bullet \wedge g_2)$ — это вещественная 2-форма, полученная из скалярного произведения в $k$ и внешнего произведения вещественных 1-форм).

Обратимся к алгебре Ли группы $G$. Она отождествляется с пространством $j = C_0^\infty(X, k)$, состоящим из гладких функций $a\colon X \to k$ с компактным носителем; скобка Ли задается поточечно. Построенное сейчас представление группы $G$ приводит проективному представлению алгебры Ли $j$, определенному на плотном линейном подмножестве из $\operatorname{Exp} H$. Соответствующий 2-коцикл на $j$ имеет вид

$$f_0(a_1, a_2) = 2 \int_X (da_1 \wedge da_2) \wedge \omega^{n-2}, \qquad (a_1, a_2 \in j). \tag{10}$$

**1.3. Случай замкнутой формы $\omega^{n-2}$.** Предположим, что $d\omega^{n-2} = 0$, $X$ компактно и ориентируемо. Ясно, что интеграл (10) обращается в нуль. Изучим групповой 2-коцикл (9). Для этого рассмотрим универсальное накрытие $p\colon \widetilde{G} \to G$; его ядро — это фундаментальная группа $\Gamma = \pi_1(G)$. „Подняв“ функцию (9) на $\widetilde{G}$, получаем 2-коцикл

$$F(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2) = f(g_1, g_2), \qquad (\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in G,\ g_i = p(\widetilde{g}_i)). \tag{11}$$

Докажем, что этот коцикл тривиален, т.е. может быть записан в виде

$$F(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2) = M(\widetilde{g}_1) + M(\widetilde{g}_2) - M(\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2); \tag{12}$$

мы найдем явный вид функции $M(\widetilde{g})$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. (В случае конечномерных групп Ли тривиальность 2-коцикла на универсальной накрывающей немедленно вытекает из равенства нулю соответствующего 2-коцикла на алгебре Ли. Однако, имея сейчас дело с бесконечномерными группами, мы соблюдем должную осторожность).

Предварительно введем на алгебре Ли $k$ трилинейную форму $([x, y], z)$. Она кососимметрична и $K$-инвариантна. Тем самым, она порождает на группе $K$ замкнутую 3-форму $\tau^3$, инвариантную относительно правых и левых сдвигов.

Теперь построим функцию $M\colon \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ следующим образом. Возьмем элемент $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Он определяется элементом $g \in G$ и гомотопическим классом путей в $G$, ведущих из $e$ в $g$. Выберем некоторый гладкий путь $\{g(s), 0 \leqslant s \leqslant r\}$ из этого класса, $g(0) = e$, $g(r) = g$. Определим отображение $\Phi\colon X \times (0,1) \to K$ формулой $\Phi(x, s) = g(s)(x)$. На $X \times (0,1)$ возникает 3-форма $\Phi^* \tau^3$. Она представима в виде $a^3 + b^2 \wedge ds$; $a^3$, $b^2$ это формы на $X$ (их степени равны 3 и 2 соответственно), зависящие от параметра $s \in (0, r)$. Положим

$$\beta_{\widetilde{g}}^2 = \int_0^r b^2\, ds. \tag{13}$$

Определим функцию $M\colon \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ формулой

$$M(\widetilde{g}) = \frac{1}{6} \int\limits_X \beta_{\widetilde{g}}^2 \wedge \omega^{n-2}. \tag{14}$$

Ясно, что эту формулу можно также записать в виде

$$M(\widetilde{g}) = \frac{1}{6} \int\limits_{X \times (0,r)} \Phi^* \tau^3 \wedge \pi^* \omega^{n-2}, \tag{15}$$

где $\pi\colon X \times (0,1) \to X$ — проекция на $X$. Покажем, что этот интеграл не зависит от выбора пути $g(s)$, $0 \leqslant s \leqslant r$, задающего элемент $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Для этого (а также для дальнейших целей) применим следующую формулу из книги [7], с. 130. Пусть $W$, $Z$ — гладкие многообразия и $\varphi_t\colon W \to Z$ — однопараметрическое гладкое семейство отображений. Через $\xi_t$ обозначается поле касательных векторов к $\varphi_t$. Пусть, наконец, дано семейство $(k+1)$-форм $\sigma_t$ на $Z$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* \sigma_t = \varphi_t^* \left( \frac{d\sigma_t}{dt} \right) + \varphi_t^*(\xi_t \rfloor d\sigma_t) + d\varphi_t^*(\xi_t \rfloor \sigma_t). \tag{16}$$

Здесь второе слагаемое — это $(k+1)$-форма на $W$, принимающая на векторных полях $\eta_1, \ldots, \eta_{k+1}$ значение $(d\sigma_t(\xi_t, (d\varphi_t)\eta_1, \ldots, (d\varphi_t)(\eta_{k+1}))$; аналогичный смысл имеет третье слагаемое.

Вернемся к интегралу (15). Возьмем гладкое семейство путей $g_t(s)$, соединяющих точки $e$, $g$. Используя равенство (16), получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{X \times (0,1)} \Phi_t^* \tau^3 \wedge \pi^* \omega^{n-2} = \int\limits_{X \times (0,1)} d(\Phi_t^*(\xi_t \rfloor \tau^3)) \wedge \pi^* \omega^{n-2}.$$

Последний интеграл равен нулю, ибо подынтегральная форма точна. Отсюда вытекает, что величина (15) не зависит от выбора пути, представляющего элемент $\widetilde{g}$. Итак, построена функция $M(\widetilde{g})$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Покажем, что кограница этой функции совпадает с коциклом (11).

**Теорема 1.** *Функции* (11), (14) *связаны соотношением* (12).

(Напомним, что многообразие $X$ предполагается компактным и ориентированным).

**Доказательство.** Зафиксируем стягиваемую окрестность единицы $U_0 \subset K$. Форма $\tau^3$ точна в $U_0$; зафиксируем такую 2-форму $\tau^2$ в $U_0$, что $\tau^3 = d\tau^2$.

**Лемма 1.** *В некоторой окрестности единицы группы* $G = C^\infty(X, K)$ *справедливо равенство*

$$((g_1^{-1})^\bullet \wedge \overset{\bullet}{g}_2) = \frac{1}{6}(g_1^*\tau^2 + g_2^*\tau^2 - (g_1g_2)^*\tau^2) + \psi(g_1, g_2),$$

*где* $\psi(g_1, g_2)$ *— точная* 2*-форма на* $X$.

Для доказательства леммы будем считать, что $K$-группа матриц и скалярное произведение в $k$ имеет вид $\operatorname{Tr}(AB)$, $(A \in k,\ B \in k)$. Легко проверить, что $(g^{-1})^\bullet = -\operatorname{ad}_{g^{-1}} \overset{\bullet}{g}$, $d\overset{\bullet}{g} = -\overset{\bullet}{g} \wedge \overset{\bullet}{g}$, $g^*\tau^3 = 2\operatorname{Tr}(\overset{\bullet}{g} \wedge \overset{\bullet}{g} \wedge \overset{\bullet}{g})$. (Поясним, что если $\alpha$, $\beta$ — две дифференциальные формы с матричными значениями, то форма $\alpha \wedge \beta$ определяется при помощи внешнего умножения числовых внешних форм и обычного умножения матриц). Используя эти равенства, без труда получаем формулу

$$d((g_1^{-1})^\bullet \wedge \overset{\bullet}{g}_2) = \frac{1}{6}(g_1^*\tau^3 + g_2^*\tau^3 - (g_1g_2)^*\tau^3).$$

Отсюда следует, что форма

$$((g_1^{-1})^\bullet \wedge \overset{\bullet}{g}_2) - \frac{1}{6}(g_1^*\tau^2 + g_2^*\tau^2 - (g_1g_2)^*\tau^2) \tag{17}$$

замкнута для любых $g_1$, $g_2$, взятых из некоторой окрестности единицы в $G$. Эта форма является обратным образом некоторой формы $\alpha^2$ на $U_0 \times U_0$ при отображении $X \to U_0 \times U_0$ вида $x \to (g_1(x), g_2(x))$. В силу замкнутости обратного образа для любых $g_1$, $g_2$ сама форма $\alpha^2$ замкнута и, следовательно, точна. Тем самым форма (17) также точна. Лемма доказана.

Пусть $U \subset G$ — окрестность единицы, указанная в лемме 1. Определим функцию $S\colon U \to \mathbb{R}$ формулой

$$S(g) = \frac{1}{6}\int_X g^*\tau^2 \wedge \omega^{n-2}, \qquad g \in U.$$

Из леммы 1 и формулы (9) ясно, что 2-коцикл (9) тривилизуется в окрестности единицы группы $G$ по формуле

$$f(g_1, g_2) = S(g_1) + S(g_2) - S(g_1g_2).$$

Тем самым 2-коцикл (11) тривиален на $\widetilde{G}$ „в целом“, т.е.

$$F(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2) = R(\widetilde{g}_1)R(\widetilde{g}_2) - R(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2)$$

для некоторой функции $R\colon \widetilde{G} \to \mathbb{R}$. Остается показать, что функции $R(\widetilde{g})$ и $M(\widetilde{g})$ совпадают. Для этого возьмем гладкий путь $\{\widetilde{g}_t\} \subset \widetilde{G}$, $\widetilde{g}_0 = \widetilde{e}$; (здесь $\widetilde{e}$— нейтральный элемент группы $\widetilde{G}$). Используя формулу (16), получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R(\widetilde{g}_t) &= \lim_{u\to t}(u-t)^{-1}(R(\widetilde{g}_u) - R(\widetilde{g}_t))\\ &= \lim_{u\to t}(u-t)^{-1}(R(\widetilde{g}_u\widetilde{g}_t^{-1}) - F(\widetilde{g}_u\widetilde{g}_t^{-1}, \widetilde{g}_t))\\ &= \lim_{u\to t}(u-t)^{-1}(S(g_u g_t^{-1}) - F(\widetilde{g}_u\widetilde{g}_t^{-1}, \widetilde{g}_t))\\ &= \frac{d}{du}S(g_u g_t^{-1})|_{u=t} - \frac{d}{du}\int_X ((g_t g_u^{-1})^{\bullet} \wedge \overset{\bullet}{g}_t) \wedge \omega^{n-2}|_{u=t}, \qquad (g_t = p(\widetilde{g}_t)).\end{aligned}$$

Применяя формулу (16), находим, что первое слагаемое полученной суммы равно нулю. При вычислении второго слагаемого возникает $k$-значная функция

$$\xi(t) = (\frac{d}{dt}g_t)\cdot g_t^{-1}. \tag{18}$$

В результате получаем равенство

$$\frac{d}{dt}R(\widetilde{g}_t) = \int_X \mathrm{Tr}(d\xi(t) \wedge \overset{\bullet}{g}_t) \wedge \omega^{n-2}.$$

Используя равенство $d(\xi(t) \wedge \overset{\bullet}{g}_t) = d\xi(t) \wedge \overset{\bullet}{g}_t - \xi(t)\overset{\bullet}{g}_t \wedge \overset{\bullet}{g}_t$, получаем окончательно

$$\frac{d}{dt}R(\widetilde{g}_t) = \int_X \mathrm{Tr}(\xi(t)\overset{\bullet}{g}_t \wedge \overset{\bullet}{g}_t) \wedge \omega^{n-2}. \tag{19}$$

С другой стороны, из формул (15), (16), (18) находим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M(\widetilde{g}_t) &= \frac{1}{6}\int_X \left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor \Phi^*\tau^3\right) \wedge \omega^{n-2},\\ \Phi^*\tau^3 &= 2\,\mathrm{Tr}(d\Phi\cdot\Phi^{-1} \wedge d\Phi\cdot\Phi^{-1} \wedge d\Phi\cdot\Phi^{-1})\\ &= 2\,\mathrm{Tr}((\xi(t)dt + \overset{\bullet}{g}_t) \wedge (\xi(t)dt + \overset{\bullet}{g}_t) \wedge (\xi(t)dt + \overset{\bullet}{g}_t))\\ &= 2\,\mathrm{Tr}(\overset{\bullet}{g}_t \wedge \overset{\bullet}{g}_t \wedge \overset{\bullet}{g}_t) + 6\,\mathrm{Tr}(\xi(t) \wedge \overset{\bullet}{g}_t \wedge \overset{\bullet}{g}_t) \wedge dt;\end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{d}{dt}M(\widetilde{g}_t) = \int_X \mathrm{Tr}(\xi(t)\overset{\bullet}{g}_t \wedge \overset{\bullet}{g}_t) \wedge \omega^{n-2}.$$

Сравнивая это с (19) и учитывая равенство $M(\widetilde{e}) = R(\widetilde{e}) = 0$, получаем, что $M(\widetilde{g}) = R(\widetilde{g})$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Теорема доказана.

Доказанная теорема приводит к обычному (не проективному) представлению универсальной накрывающей $\widetilde{G}$; оно выражается через проективное представление $T$ группы $G$ по формуле

$$\widetilde{T}(\widetilde{g}) = e^{iM(\widetilde{g})}T(g), \qquad g = p(\widetilde{g}),\ \widetilde{g} \in \widetilde{G}. \tag{20}$$

**1.4. Ограничение представления $\widetilde{T}$ на группу $\Gamma = \pi_1(G)$.** Фундаментальная группа $\Gamma = \pi_1(G)$ вкладывается в $\widetilde{G}$ в качестве центральной подгруппы; условимся отождествлять $\Gamma$ с ее образом при этом вложении. Из формулы (20) следует, что ограничение представления $\widetilde{T}$ на $\Gamma$ имеет вид

$$\widetilde{T}(\gamma) = e^{iM(\gamma)}, \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Величина $M(\gamma)$ легко выражается через топологические величины. Для этого определим отображение $\theta\colon \Gamma \to H^2(X, \mathbb{R})$, полагая, что $\theta(\gamma)$ есть класс когомологий формы $\beta^2_\gamma$, введенной выше по формуле (13). Тогда из (14) получаем

$$M(\gamma) = \frac{1}{6}\langle\theta(\gamma), [\omega^{n-2}]\rangle,$$

где элемент $[\omega^{n-2}] \in H^{n-2}(X, \mathbb{R})$ соответствует форме $\omega^{n-2}$, а $\langle,\rangle$ означает естественное спаривание; (напомним, что $X$ компактно и ориентировано).

Для дальнейшего понадобится группа $\widetilde{G}_0 = \widetilde{G}/\operatorname{Ker}\theta$. Получили накрытие (вообще говоря, не универсальное) $p_0\colon \widetilde{G}_0 \to G$, ядром которого является аддитивная группа $\theta(\Gamma) \subset H^2(X, \mathbb{R})$. Ясно, что при соответствующем выборе формы $\omega^{n-2}$ (точнее, элемента $[\omega^{n-2}]$) получаем точное представление $\widetilde{T}$ группы $\widetilde{G}_0$.

Отметим, что иногда $\widetilde{G} = \widetilde{G}_0$. Вот простейший пример: $\dim X = 2$, $K = SU_2$, $\Gamma = \mathbb{Z}$. В этом случае получаем точное унитарное представление универсальной накрывающей группы токов.

**1.5. Подпредставление $T_0$; условия неприводимости и попарной неэквивалентности.** Напомним, что мы построили проективное представление $T$ группы $G$, исходя из римановой метрики $r$, положительной функции $\rho \in C^\infty(X)$ и гладких полей линейных операторов $a(x)$, $b(x)$, действующих в касательных пространствах $V(x)$, $x \in X$. Вообще говоря, $T$ приводимо. Чтобы выделить из него неприводимую часть, введем в пространстве $E^1_{\mathbb{C}}$ линейный оператор $D$ вида $(D\alpha)(\xi) = (\alpha\circ a)\xi + i(\alpha\circ b)(\xi)$, $\xi \in V(x)$. Он продолжается по непрерывности на гильбертово пространство $H = \overline{E^1_{\mathbb{C}}}$. Рассмотрим подпространство $H_0 = \overline{D(H)}$. Ясно, что оно инвариантно относительно присоединенного представления (4) группы $G$; кроме того, в этом подпространстве лежат значения коцикла (5). Тем самым подпространство $\operatorname{Exp} H_0$ инвариантно относительно $T$. Ограничив $T$ на $\operatorname{Exp} H_0$, получаем представление $T_0$.

Неприводимость представлений $T_0$, а также их попарная неэквивалентность (при разных $r$ $\rho$, $a$, $b$) исследуется так же, как это сделано в [2–4] при $a = I$, $b = 0$. Ограничимся кратким перечислением результатов; для простоты рассмотрим лишь случай $a = I$.

1. Если $n \geqslant 3$, то $T_0$ неприводимо. 2. Если $n = 2$, то $T_0$ неприводимо при условии $\rho(x) \det(I + b(x)b^*(x))^{-\frac{1}{2}} \leqslant \ell/32$, где $\ell$ — наибольшая из длин корней алгебры Ли $k$. 3. Представления, построенные по разным функциям $\rho_1$, $\rho_2$ (с одинаковыми $r$, $a$) не эквивалентны. Последний результат можно усилить, варьируя также $r$, $a$; мы не останавливаемся на этом.

Ясно, что если оператор $a(x) + ib(x)$, действующий в пространстве $V(x) \otimes \mathbb{C}$, обратим для почти всех $x \in X$ (относительно лебеговой меры в $X$), то $T = T_0$.

**1.6. Пример: группа токов на римановой поверхности.** Пусть $X$ — компактная риманова поверхность. Пусть риманова метрика на $X$ согласована с комплексной структурой (т.е. для любого голоморфного локального параметра $z = x+iy$ векторные поля $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ ортогональны в любой точке). Введем поля операторов $a(x)$, $b(x)$ из п. 1.2 следующим образом: положим $a(x) = I$ для всех $x$, а в качестве $b(x)$ возьмем оператор умножения на $-i$ в касательном пространстве $V(x)$. Тогда указанное в п. 1.5 подпространство $D(E^1_{\mathbb{C}})$ состоит из $k_{\mathbb{C}}$-значных форм типа $(1,0)$, т.е. из форм вида $A(z)\,dz$ (в локальных координатах). Пополнение этого подпространства по гильбертовой норме обозначим через $H(1,0)$. Получили представление (проективное) группы $G$ в пространстве $\operatorname{Exp} H(1,0)$. Условия его неприводимости (а также попарной неэквивалентности разных представлений) указаны в п. 1.5.

В заключении этого раздела отметим формулу для 2-коцикла (9), который в случае $\dim X = 2$ сводится к

$$f(g_1, g_2) = c \int_X ((g_1^{-1})^\bullet \wedge \overset{\bullet}{g}_2), \qquad c = \mathrm{const}\,.$$

Этот коцикл для некоторого $c$ эквивалентен целочисленному (разрывному) коциклу, задающему универсальное расширение группы токов. Аналогичные формулы известны для полупростых групп Ли, подчиненных необходимым ограничениям; см. [8], с. 161.

## §2. Некоторые расширения групп, связанных с динамической системой и каноническими коммутационными соотношениями (ККС); расширения групп токов

В этом параграфе будут рассмотрены нецентральные (абелевы) расширения и их представления. Мы начнем с общей конструкции, затем обратимся к группе токов.

**2.1. Расширения, порожденные динамической системой и ККС.** Пусть $(\Omega,\mu,G)$ — динамическая система; здесь $(\Omega,\mu)$ — пространство с мерой, а группа (топологическая) $G$ действует на $\Omega$, оставляя меру $\mu$ квазиинвариантной. Предполагается, что выполнены необходимые условия непрерывности этого действия.

Пусть, далее, $V$ — вещественное линейное пространство с кососимметрической формой $\tau$, $H_0$ — комплексное гильбертово пространство, $U(H_0)$ — группа всех унитарных операторов в $H_0$. Предположим, что дано представление ККС в форме Вейля, т.е. отображение $\Phi\colon V\to U(H_0)$, удовлетворяющее условиям $\Phi(0)=I$,

$$\Phi(v_1+v_2)=e^{i\tau(v_1,v_2)}\Phi(v_1)\Phi(v_2).$$

Пусть, наконец, дано отображение $c\colon G\times\Omega \bmod 0\to V$, измеримое по $\omega$, непрерывное по $g$ и удовлетворяющее условию

$$c(g_1g_2,\omega)=c(g_1,\omega)+c(g_2,\omega g_1),\qquad \omega\in\Omega \bmod 0,\ \ g_i\in G.$$

Введем функцию

$$f(g_1,g_2,\omega)=\frac{1}{2}\tau(c(g_1,\omega),c(g_2,\omega g_1)) \tag{21}$$

и обозначим через $A$ какое-либо линейное пространство функций на $\Omega$, содержащее все функции вида $\omega\to f(g_1,g_2,\omega)$ и инвариантное относительно действия группы $G$ по формуле $(g\varphi)(\omega)=\varphi(\omega g)$. Тогда множество $A\times G$ превращается в группу с операцией

$$(a_1,g_1)(a_2,g_2)=(a_1+g_1a_2+f(g_1,g_2,\bullet),g_1g_2).$$

Обозначим эту группу просто через $AG$. Возьмем гильбертово пространство вектор-функций $L_2(\Omega,\mu,H_0)$ и зададим в нем операторы

$$(T(a,g)\varphi)(\omega)=\sqrt{\frac{d\mu(\omega g)}{d\mu(\omega)}}\,\Phi(c(g,\omega))e^{ia(\omega)}\varphi(\omega g).$$

Легкий подсчет показывает, что они образуют унитарное представление группы $AG$.

Отметим следующий частный случай. Пусть $\mu$ — гауссова мера, определенная на пространстве $\Omega=L'$, сопряженном к линейному ядерному пространству $L$ со скалярным произведением; пусть, кроме того, функция $(g,\omega)\to c(g,\omega)$ получена естественным продолжением из функции $(g,\ell)\to c(g,\ell)$, $\ell\in L$, линейной по переменной $\ell$. Тогда функции из $\omega\to f(g_1,g_2,\omega)$ можно отождествить с их ограничениями на $L$. Тем самым в качестве пространства $A$ можно взять некоторое пространство полиномов степени $\leqslant 2$ на $L$.

**2.2. Расширения групп токов и их представления.** Применим сказанное к группе токов. С этой целью рассмотрим пространство $\Omega$, состоящее из непрерывных линейных функционалов на $E^1$. Скалярное произведение (3) обычным образом порождает гауссову меру $\mu$ на $\Omega$. Имеем естественное вложение $E^1 \hookrightarrow \Omega$. Группа $G = C^\infty(X, K)$ действует на $\Omega$ по формуле

$$\omega g = (\mathrm{ad}_g)^* \omega + \overset{\bullet}{g}.$$

Получилась динамическая система $(\Omega, \mu, G)$. Вместо группы $G$ здесь можно взять ее накрывающую $\widetilde{G}_0$, введенную в 1.4; это обстоятельство будет скоро использовано.

Возьмем, как выше, конечномерное вещественное линейное пространство $V$ с кососимметрической формой $\tau$, гильбертово пространство $H_0$ и представление ККС вида $\Phi\colon V \to U(H_0)$. Зафиксируем замкнутую $(n-2)$-форму $\varphi^{n-2}$ на $X$ со значениями в $V$ и введем отображение $t\colon E^1 \times E^1 \to V$ вида

$$t(\alpha_1, \alpha_2) = \int_X (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \varphi^{n-2}.$$

Построим отображение $s\colon G \times \Omega \bmod 0 \to V$ по формуле

$$s(g, \omega) = t(\overset{\bullet}{g}, \omega) = \int_X (\overset{\bullet}{g} \wedge \omega) \wedge \varphi^{n-2} \tag{22}$$

(форма $(\overset{\bullet}{g} \wedge \omega) \wedge \varphi^{n-2}$ определяется естественным образом). Легко проверить, что

$$s(g_1 g_2, \omega) = s(g_1, \omega) + s(g_2, \omega \cdot g_1) + t((g_1^{-1})^\bullet, \overset{\bullet}{g}_2). \tag{23}$$

Тем самым функция (22) не является коциклом на $G$ — препятствует слагаемое $t((g_1^{-1})^\bullet, \overset{\bullet}{g}_2)$ в (23). Чтобы исправить положение, привлечем накрытие $p_0\colon \widetilde{G}_0 \to G$. Мы уже знаем, что функция $(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2) \to t((g_1^{-1})^\bullet, \overset{\bullet}{g}_2)$, $g_i = p_0(\widetilde{g}_i)$, есть тривиальный коцикл на $\widetilde{G}_0$; точнее, она является кограницей функции

$$N(\widetilde{g}) = \frac{1}{6} \int_X \beta_{\widetilde{g}}^2 \wedge \varphi^{n-2}$$

(см. п. 1.3). Следовательно, функция

$$s_1(\widetilde{g}, \omega) = s(\widetilde{g}, \omega) - N(\widetilde{g}), \qquad \widetilde{g} \in \widetilde{G}_0, \ \omega \in \Omega \bmod 0,$$

является коциклом на $\widetilde{G}_0$.

Введем пространство $A$, указанное в п. 2.1. В качестве $A$ возьмем пространство всех функций $h\colon E^1 \to \mathbb{R}$ вида

$$h(\alpha) = c_0 + (\alpha, \alpha_0) + (B\alpha, \alpha), \qquad \alpha \in E^1,$$

где $c_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 \in E^1$, $B$ — интегральный оператор с гладким ядром в $E^1$ (такие функции можно назвать гладкими полиномами степени $\leqslant 2$ на $E^1$). Легкий подсчет показывает, что коцикл (21) выражается в нашем случае формулой

$$f(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, \alpha) = \int\limits_{X\times X} \pi_1^*(\overset{\bullet}{g}_1 \wedge \alpha - \beta^2_{\widetilde{g}_1}) \wedge \pi_2^*((g_1g_2)^* \wedge \alpha - \beta^2_{\widetilde{g_1g_2}}) \wedge \Phi^{2n-4}; \tag{24}$$

здесь $\Phi^{2n-4}$ — замкнутая $(2n-4)$-форма на $X \times X$, удовлетворяющая условию $\sigma^*\Phi^{2n-4} = -\Phi^{2n-4}$, где $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, а $\pi_k$ означают естественные проекции. Любая форма $\Phi^{2n-4}$ может быть получена описанным способом при соответствующем выборе пары $V$, $\tau$ (если, разумеется, $\Phi^{2n-4}$ обладает указанными свойствами).

Теперь, используя коцикл (24) и следуя общей схеме из п. 2.2, получаем группу $A\widetilde{G}_0$ и ее унитарное представление в пространстве $L_2(\Omega, \mu, H_0)$.

В заключение рассмотрим условия неприводимости построенного представления $T$ группы $a\widetilde{G}_0$. С этой целью обозначим через $[\varphi^{n-2}]$ элемент пространства $V$-значных когомологий $H^{n-2}(X, V)$. Используя указанное в п. 1.4 отображение $\theta\colon \Gamma \to H^2(X, \mathbb{R})$, построим отображение $b\colon \Gamma \to V$ по формуле $b(\gamma) = \langle \theta(\gamma), [\varphi^{n-2}] \rangle$ (здесь использовано естественное спаривание).

**Теорема 2.** *Пусть ограничение представления $\Phi\colon V \to U(H_0)$ на подгруппу $b(\Gamma) \subset V$ неприводимо. Тогда $T$ неприводимо.*

**Доказательство.** Пусть $S$ — ограниченный оператор в $L_2(\Omega, \mu, H_0)$, перестановочный с операторами представления $T$. Из перестановочности $S$ с операторами $T(a, \widetilde{e})$, где $a \in A$, $\widetilde{e}$ — нейтральный элемент в $\widetilde{G}_0$, вытекает, что $S$ — это умножение на слабо измеримую операторную функцию $S(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Из перестановочности $S$ с $T(0, \widetilde{\gamma})$, где $\widetilde{\gamma} \in b(\Gamma) = \operatorname{Ker} p_0$, и из предпосылок теоремы следует, что $S(\omega) = r(\omega)I$, где $r(\omega)$ есть измеримая числовая функция, $I$ — единичный оператор в $H_0$. Наконец, из эргодичности динамической системы $(\Omega, m, G)$ вытекает, что $r(\omega) = r_0$ при $\omega \in \Omega \bmod 0$. Итак, $S = r_0 I$. Неприводимость доказана.

## Заключительные замечания

Мы построили точное унитарное неприводимое представление универсальной накрывающей группы токов $G = C^\infty(X, K)$ лишь в случае инъективности отображения $\theta\colon \Gamma \to H^2(X, \mathbb{R})$. Заметим, что коцикл, задающий универсальное накрытие,

— это многозначный функционал на группе токов; он может быть задан замкнутой однозначной 1-формой на $G$, которая по существу появилась при доказательстве теоремы 1. Простейший пример, где отображение $\theta$ не инъективно, это $X = S^3$, $K = SU_2$; здесь $\pi_1(G) \simeq \mathbb{Z}_2$. Неясно, существует ли в этом случае точное унитарное представление группы $\widetilde{G}$.

Абелево расширение группы $\widetilde{G}_0$, построенное в §2, нетривиально (т.е. не сводится к полупрямому произведению) лишь тогда, когда форма $\Phi^{2n-4}$ из (2.9) не точна и, более того, представляет ненулевой элемент из $H^{n-2}(X,\mathbb{R}) \otimes H^{n-2}(X,\mathbb{R})$. Представляет интерес построение унитарных представлений других абелевых расширений.

## Список литературы


[1] Прессли Э., Сигал Г., *Группы петель*, Мир, 1990.

[2] Исмагилов Р. С., *Унитарные представления группы $C^\infty(X,G)$, $G - SU_2$*, Мат. сб. **100** (1976), № 1, 117–131.

[3] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., *Irreducibility and Reducibility for Energy Representations*, J. of Funct. Anal. **41** (1981), no. 3, 378–396.

[4] Vershik A., Gelfand I., Graev M., *Remarka on representation of the group of functions with values in compact Lie group*, Com. math. **42** (1981), 217–243.

[5] Araki H., *Factorisable representations of Current Algebra*, R.I.M.S. **5** (1970), 361–422, Kyoto University.

[6] Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И., *Представления группы $Sl_2(\mathbb{R})$, R-кольцо функции*, Успехи мат.наук **28** (1973), № 5, 83–128.

[7] Гиемин В., Стернберг С., *Геометрические асимптотики*, Мир, 1981.

[8] Гишарде А., *Когомологии топологических групп и алгебр Ли*, Мир, 1984.


Поступило 2 марта 1993 г.

Московский государственный
технический университет им. Баумана
107005, Москва
2-я Бауманская, 5