

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Артемов, А. Б. Ватажин, Ю. С. Левитан,
О. А. Синкевич, Аппроксимация корреляций, содержащих пульсации электрических параметров, при турбулентном течении высокотемпературного электропроводного газа, *ТВТ*, 1984, том 22, выпуск 4, 720–727

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.153.44

3 ноября 2024 г., 13:38:14



УДК 621.31:532.526

АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПУЛЬСАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ, ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА

*Артемов В. И., Ватажин А. Б., Левитан Ю. С.,
Синкевич О. А.*

Рассмотрена проблема определения корреляций, содержащих пульсации электрических параметров, возникающих при расчетно-теоретическом исследовании турбулентных течений электропроводного газа в электрическом поле. Приведено уравнение, позволяющее установить функциональную связь между пульсациями потенциала и проводимости при заданном поле осредненных параметров. Получены решения этого уравнения в виде плоских волн и в приближении локального дисперсионного уравнения. Проанализировано общее решение уравнения, найденное с помощью функции Грина. Корреляции, содержащие пульсации электрических параметров, выражаются в виде интегралов по объему от двухточечной корреляции проводимости с весом, зависящим от геометрии объема и распределений осредненных параметров. Представлены конкретные выражения для корреляций при различных упрощающих предположениях.

Рассмотрим термически равновесную среду, электропроводность которой σ зависит от двух термодинамических параметров: энтальпии h и давления p . Во многих приложениях зависимостью проводимости от давления можно пренебречь и считать, что $\sigma = \sigma(h)$ [1].

Анализ системы уравнений, описывающей турбулентное движение электропроводной среды в электрическом поле E при наличии зависимости $\sigma = \sigma(h)$, убеждает в необходимости учета корреляций, содержащих пульсации E' и σ' . Такие корреляции возникают при осреднении уравнений электродинамики

$$j = \sigma E, \quad \text{rot } E = 0, \quad \text{div } j = 0, \quad E = -\nabla \varphi, \quad (1)$$

где j — плотность тока; φ — электрический потенциал. Представляя все величины в (1) в виде сумм осредненных и пульсационных составляющих ($\xi = \bar{\xi} + \xi'$), получим после осреднения [2]

$$\bar{j} = \bar{\sigma} \bar{E} + A, \quad \bar{E} = -\nabla \bar{\varphi}, \quad E' = -\nabla \varphi', \quad (2)$$

$$\Delta \bar{\varphi} + \nabla \bar{\varphi} \nabla \ln \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1} \text{div } A, \quad A = \sigma' \bar{E}'. \quad (3)$$

Распределение осредненных электрических параметров в газе может быть определено на основе решения уравнения (3), которое становится замкнутым (при наличии соответствующих граничных условий) после задания величины A .

В уравнение энергии для проводящего газа входит источниковый член $q = \sigma E^2$, выражающий объемную плотность джоулева тепловыделения. Пренебрегая корреляциями третьего порядка, запишем

$$\bar{q} = \bar{\sigma} \bar{E}^2 + 2\bar{E} \cdot A + \bar{\sigma} C, \quad C = \bar{E}'^2. \quad (4)$$

Таким образом, в осредненное уравнение энергии, помимо A , входит еще один корреляционный член C , для которого также необходимо иметь аппроксимационное выражение.

Дополнительные корреляции, содержащие пульсации электрических параметров, могут появиться при описании турбулентного движения элект-

тропроводной среды с использованием уравнений для вторых моментов пульсаций параметров или при рассмотрении течений во внешних магнитных полях.

Вычитая из уравнений (1) осредненные соотношения (3), получим

$$\Delta\varphi' + \nabla\varphi' \nabla \ln \bar{\sigma} = \bar{\mathbf{E}} \nabla \Phi' + \bar{k}(\Phi' + 1) - \bar{k}, \quad (5)$$

$$\bar{k} = -\bar{\sigma}^{-1} \operatorname{div}(\bar{\sigma}' \bar{\mathbf{E}}'), \quad \Phi' = \sigma'/\bar{\sigma}.$$

Для малых пульсаций из (5) получаем линейное уравнение относительно φ'

$$\Delta\varphi' + \nabla\varphi' \nabla \ln \bar{\sigma} = \bar{\mathbf{E}} \nabla \Phi'. \quad (6)$$

Входящая в это уравнение величина $\bar{\mathbf{E}}$ определяется на основе выражения (3), в котором в первом приближении необходимо положить $\mathbf{A}=0$,

$$\Delta\bar{\varphi} + \nabla\bar{\varphi} \nabla \ln \bar{\sigma} = 0. \quad (7)$$

Уравнения (6), (7) дают принципиальную возможность определить составляющие электрического потенциала $\bar{\varphi}$ и φ' через распределения $\bar{\sigma}$ и σ' в виде функциональных зависимостей. После этого можно получить выражения для корреляций \mathbf{A} и \mathbf{C} . Однако фактическое определение указанных зависимостей наталкивается на весьма значительные трудности и может быть осуществлено лишь в простейших случаях.

Заметим, что, вообще говоря, пульсационные гидродинамические характеристики течения зависят от распределений как осредненных, так и пульсационных электрических параметров. Эта связь осуществляется через уравнения движения для электропроводной среды. Однако можно выделить класс течений, когда структура гидродинамической турбулентности в первом приближении не зависит от электрического поля (например, при слабом взаимодействии поля и среды). В этом случае гидродинамические параметры определяются из решения уравнений гидродинамики при $\bar{\mathbf{E}}=0$, далее с помощью (6), (7) находятся распределения $\bar{\varphi}$ и φ' , вычисляются корреляции типа \mathbf{A} и \mathbf{C} и затем решаются уравнения движения и энергии с известными источниковыми электрическими членами. Однако получающиеся при этом функциональные выражения для \mathbf{A} и \mathbf{C} могут иметь и более общее значение: их можно попытаться использовать для решения задач и при более сильном взаимодействии поля \mathbf{E} и среды. Конечно, в этом случае большое значение приобретает сопоставление результатов расчета с экспериментом, на основе которого можно ввести поправки для корреляций.

Используем для анализа (6) приближение локального дисперсионного уравнения [3].

В общем случае поля пульсаций гидродинамических параметров (энthalпии, скорости, проводимости) имеют сложный характер. Однако для получения основных функциональных связей пульсационные параметры в первом приближении можно представить в виде плоской волны или суперпозиции плоских волн [4]. Пусть поле Φ' задано в виде

$$\Phi' = \sigma'/\bar{\sigma} = \Phi^0 \operatorname{Re} \{ \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \}, \quad (8)$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3),$$

где Φ^0 — слабо изменяющаяся функция координаты \mathbf{r} ; Re — действительная часть комплексной величины. Если масштаб $2\pi/|\mathbf{k}|$ изменения пульсации проводимости мал по сравнению с масштабом изменения $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\sigma}$, Φ^0 , то из (6), (8) имеем

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{k}(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{k}) \Phi^0}{(k^2 - i\mathbf{k} \cdot \nabla \ln \bar{\sigma})} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \right\}. \quad (9)$$

Проведя осреднение по времени, получим

$$A = - \frac{\mathbf{k} \cdot (\bar{\mathbf{E}}\mathbf{k}) k^2}{k^4 + (\mathbf{k} \cdot \nabla \ln \bar{\sigma})^2} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}}, \quad (10)$$

$$C = \frac{k^4 (\bar{\mathbf{E}}\mathbf{k})^2}{[k^4 + (\mathbf{k} \cdot \nabla \ln \bar{\sigma})^2]^2} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}^2}. \quad (11)$$

Пусть теперь $\bar{\sigma} = \text{const}$, $\bar{\mathbf{E}} = \text{const}$, а пульсации проводимости представляются в виде

$$\Phi' = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^0 \cos(\mathbf{k}_{\alpha} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\alpha} t), \quad (12)$$

где Φ_{α}^0 — постоянные величины.

Решая (6), получим

$$\mathbf{E}' = - \sum_{\alpha} \frac{(\mathbf{k}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{E}}) \mathbf{k}_{\alpha}}{k_{\alpha}^2} \Phi_{\alpha}^0 \cos(\mathbf{k}_{\alpha} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\alpha} t), \quad (13)$$

$$A = - \bar{\sigma} \sum_{\alpha} \frac{(\mathbf{k}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{E}}) \mathbf{k}_{\alpha}}{k_{\alpha}^2} \frac{(\Phi_{\alpha}^0)^2}{2}, \quad k_{\alpha}^2 = |\mathbf{k}_{\alpha}|^2, \quad (14)$$

$$C = \sum_{\alpha} \frac{(\mathbf{k}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{E}})^2}{k_{\alpha}^2} \frac{(\Phi_{\alpha}^0)^2}{2}, \quad \bar{\Phi}'^2 = \sum_{\alpha} \frac{(\Phi_{\alpha}^0)^2}{2}. \quad (15)$$

Предположим, что направления $\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{k}_{\alpha}/|\mathbf{k}_{\alpha}|$ равномерно и достаточно плотно заполняют единичную сферу и $\Phi_{\alpha}^0 = \Phi_{\alpha}^0(|\mathbf{k}|)$. В этом случае выполняются соотношения

$$A = - \bar{\sigma} \int_{(4\pi)} (\mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{E}}) \mathbf{e} ds \sum_{\alpha} \frac{(\Phi_{\alpha}^0)^2}{2} = - \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}} \bar{\mathbf{E}}, \quad (16)$$

$$C = \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}^2} (\bar{\mathbf{E}})^2, \quad ds = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\perp}^2 = \frac{2}{15} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}^2} (\bar{\mathbf{E}})^2, \quad \bar{\mathbf{E}}_{\parallel}^2 = \frac{1}{5} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}^2} (\bar{\mathbf{E}})^2. \quad (17)'$$

Здесь \mathbf{E}'_{\perp} и \mathbf{E}'_{\parallel} — составляющие вектора \mathbf{E}' , ориентированные соответственно перпендикулярно и параллельно вектору $\bar{\mathbf{E}}$.

Вводя полученные соотношения для A в (2), найдем

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_r \bar{\mathbf{E}}, \quad \sigma_r = \bar{\sigma} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}^2} \right). \quad (18)$$

Этот результат получен ранее в [5], а также в [6, 7].

Точно так же, вводя выражение для C в (4), получим

$$\bar{q} = \sigma_r \bar{\mathbf{E}}^2 = \bar{\sigma} \bar{\mathbf{E}}^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}'^2}{\bar{\sigma}^2} \right). \quad (19)$$

Развитый метод позволяет в отличие от [5–7] получить выражения для произвольных корреляций, содержащих пульсации электрических параметров.

Представим общий метод, позволяющий выразить величины A и C через двухточечные корреляции термодинамических параметров. Запишем решение уравнения (6) с использованием функции Грина. Это решение

для объема V , на границе которого $\Sigma\Phi'$ обращается в нуль, имеет вид

$$\varphi'(P_0) = - \int_V \Omega(P_0, P) (\bar{\mathbf{E}} \cdot \nabla \Phi')_P dV_P, \quad (20)$$

$$\mathbf{E}'(P_0) = \int_V (\nabla_{P_0} \Omega) (\bar{\mathbf{E}} \cdot \nabla \Phi')_P dV_P, \quad P_0 \in V, \quad P \in V, \quad (21)$$

$$\Delta_{P_0} \Omega + (\nabla_{P_0} \Omega) (\nabla_{P_0} \ln \bar{\sigma}) = -\delta(P_0, P), \quad \Omega(P_\Sigma, P) = 0. \quad (22)$$

Здесь $\Omega(P_0, P)$ — функция Грина; P_0, P — произвольные точки области V . Нижние индексы P и P_0 у операторов указывают, по какой переменной производится дифференцирование, нижние индексы P и P_0 у функций указывают точку, в которой вычисляется функция $\xi_P = \xi(P)$.

На основе полученного решения находим

$$\mathbf{A} = \bar{\sigma}(P_0) \int_{V_P} [\nabla_{P_0} \Omega(P_0, P)] (\bar{\mathbf{E}}_P \cdot \nabla_{P \nabla_{P_0 P}}) dV_P, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{E}}'_P \bar{\mathbf{E}}'_P)_{P_0} = & \int_{V_M} \int_{V_P} [e_\beta \cdot \nabla_{P_0} \Omega(P_0, P)] [e_\gamma \cdot \nabla_{P_0} \Omega(P_0, M)] \times \\ & \times \bar{E}_j(P) \bar{E}_i(M) \left[\frac{\partial^2 \nu_{PM}}{\partial x_j(P) \partial x_i(M)} \right] dV_P dV_M, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & \int_{V_M} \int_{V_P} [\nabla_{P_0} \Omega(P_0, P) \nabla_{P_0} \Omega(P_0, M)] \bar{E}_j(P) \bar{E}_i(M) \times \\ & \times \left[\frac{\partial^2 \nu_{PM}}{\partial x_j(P) \partial x_i(M)} \right] dV_P dV_M \quad (\gamma, \beta, i, j = 1, 2, 3; \nu_{PM} = \overline{\Phi'(P) \Phi'(M)}). \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь e_β ($\beta=1, 2, 3$) — единичные орты по осям декартовой системы координат, нижние индексы γ, β, i, j обозначают проекции векторов на соответствующие оси этой системы; суммирование проводится по повторяющимся индексам.

Формулы (23)–(25) представляют собой наиболее общие выражения для \mathbf{A} и C . Для определения этих величин необходимы сведения о двухточечной корреляции между пульсациями Φ' . Предполагая, что пульсации проводимости σ' аппроксимируются выражением

$$\sigma' = (d\bar{\sigma}/d\bar{T}) T',$$

где T — температура газа, корреляцию ν_{PM} можно свести к двухточечной корреляции

$$\nu_{PM} = (d \ln \bar{\sigma} / d\bar{T})^2 \overline{T'(P) T'(M)}. \quad (26)$$

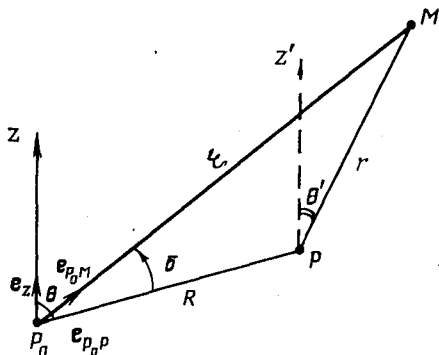
Если распределения всех осредненных параметров среды являются однородными, а турбулентность — однородна и изотропна, то

$$\nu_{PM} = \overline{(\Phi')^2} f(r_{PM}), \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) \rightarrow 0, \quad (27)$$

где r_{PM} — расстояние между точками P и M . Пусть объем V имеет достаточно большие размеры и функция Грина представляется в виде

$$\Omega(P_0, P) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PP_0}}. \quad (28)$$

Введем две декартовы системы координат x, y, z и x', y', z' с центрами в точках P_0 и P и две соответствующие сферические системы координат R, θ, ϕ и r, θ', ϕ' (рисунок). Будем считать, что электрическое поле $\bar{\mathbf{E}}$



ориентировано по z ($\mathbf{E} = \mathbf{e}_z \bar{E}$). В процессе преобразований (23)–(25) используем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla_{P_0} \Omega(P_0, P) &= \frac{1}{4\pi R^2} \mathbf{e}_{P_0 P}, & \nabla_{P_0} \Omega(P_0, M) &= \frac{1}{4\pi \xi^2} \mathbf{e}_{P_0 M}, & \mathbf{e}_{P_0 P} &= \mathbf{r}_{P_0 P} / R, \\ \mathbf{e}_{P_0 M} &= \mathbf{r}_{P_0 M} / \xi, & \mathbf{e}_{P_0 P} \cdot \mathbf{e}_{P_0 M} &= \cos \delta = (R^2 + \xi^2 - r^2) / (2\xi R), \\ \xi^2 &= R^2 + r^2 + 2Rr\rho, \end{aligned}$$

$$\rho = \sin \theta \cos \varphi \sin \theta' \cos \varphi' + \sin \theta \sin \varphi \sin \theta' \sin \varphi' + \cos \theta \cos \theta',$$

$$\frac{\partial^2 \nabla_{PM}}{\partial z_P \partial z_M} = -(\overline{\Phi'})^2 \psi, \quad \psi = \frac{d^2 f}{dr^2} \cos^2 \theta' + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \sin^2 \theta'.$$

Используя эти соотношения и (23), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \bar{\sigma}(P_0) \bar{E} \overline{\Phi'^2} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_{P_0 P} \frac{df}{dR} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dR = \\ &= -\bar{\sigma}(P_0) \bar{E} \overline{\Phi'^2} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi (\mathbf{e}_x \sin \theta \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \\ &\quad + \mathbf{e}_z \cos \theta) = -\frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}} \bar{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Эта формула совпадает с (16). Существенно, что полученное выражение не зависит от вида $f(R)$.

Корреляции (24) и (25) представляются в виде

$$\begin{aligned} \overline{E_\beta' E_\gamma'} &= -\bar{E}^2 \overline{\Phi'^2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \int_{V_P} \frac{(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{r}_{P_0 P})(\mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{r}_{P_0 P})}{R^3} \left[\int \frac{\psi}{\xi^3} dV_M \right] dV_P + \right. \\ &\quad \left. + \int_{V_P} \frac{(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{r}_{P_0 P})}{R^3} \left[\int_{V_M} \frac{(\mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{r}_{PM})}{\xi^3} \psi dV_M \right] dV_P \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (30) следует, что

$$C = m \bar{E}^2 \overline{\Phi'^2} = m \bar{E}^2 \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}^2}, \quad (31)$$

$$m = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} K(r, \rho, R) \psi \sin \theta' \, dr \, d\theta' \, d\varphi' \right] \sin \theta \, dR \, d\theta \, d\varphi,$$

где ядро

$$K(r, \rho, R) = \frac{r^2}{\xi^2} \cos \delta = \frac{(R+r\rho)r^2}{(R^2+r^2+2Rr\rho)^{3/2}}.$$

Для вычисления интеграла (31) сначала проведем интегрирование по R

$$\int_0^\infty \frac{K(r, \rho, R)}{r^2} dR = \int_0^\infty \frac{(R+r\rho)dR}{(R^2+r^2+2Rr\rho)^{3/2}} = \frac{1}{r}.$$

После интегрирования по углам имеем

$$m = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \int_0^\infty r \frac{d^2 f}{dr^2} dr. \quad (32)$$

Интегрирование (32) по частям в предположении, что $r(df/dr) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, дает

$$m = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left\{ \left[r \frac{df}{dr} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{df}{dr} dr \right\} = \frac{1}{3}. \quad (33)$$

Это выражение также совпадает с полученным выше результатом (17).

Предложения об однородности распределений осредненных параметров среды, однородности и изотропности турбулентности и о возможности аппроксимации функции Грина выражением, справедливым для бесконечного пространства, в общем случае, конечно, не выполняются. Однако, как следует из полученных соотношений, при конечной величине r (расстоянии, на котором коэффициент корреляции отличен от нуля) функция $K(R)$ при больших R по порядку величины равна R^{-2} и поэтому вклад областей, расположенных далеко от точки P_0 , в величину m оказывается малым. В связи с этим, для приближенного выполнения полученных формул для \mathbf{A} и \mathbf{C} в некоторой точке P_0 необходимо, чтобы указанные выше предположения об однородности и изотропности были справедливы лишь в некоторой окрестности этой точки. Это обстоятельство позволяет надеяться на значительное расширение области применения соотношений (29) и (31). Полученные формулы могут быть обобщены на случай электрического и магнитного полей.

Рассмотрим ситуацию, когда течение среды происходит при наличии электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей. Пусть распределение электрических параметров описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma[\mathbf{E} + (\mathbf{U} \times \mathbf{B})] - \beta^*(\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $\beta^* = \beta/|B|$; β — параметр Холла; магнитное число Рейнольдса Re_m предполагается много меньшим единицы.

Система уравнений (34) при однородных распределениях \mathbf{U} и \mathbf{B} и постоянных σ и β допускает однородное решение относительно векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} [8].

Предположим, что газодинамические величины \mathbf{U} и σ испытывают малые отклонения (зависящие от пространственных координат и времени) от указанных выше невозмущенных значений. В этом случае электрические величины \mathbf{E} , \mathbf{j} , φ также будут флуктуировать, причем их флуктуации будут зависеть от флуктуаций скорости и проводимости. Флуктуации \mathbf{B} вследствие условия $Re_m \ll 1$ оказываются несущественными. Точно также в первом приближении не учитываются флуктуации величины β^* .

Как отмечалось выше, эти флуктуации можно отождествить с пульсациями параметров в турбулентном потоке.

Задача состоит в определении пульсаций электрических параметров \mathbf{E}' , \mathbf{j}' , φ' через пульсации σ' и \mathbf{U}' и в определении соответствующих корреляций, содержащих эти пульсации. Система уравнений (34) относительно пульсационных характеристик имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \sigma'[\bar{\mathbf{E}} + (\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{B})] + \bar{\sigma}[\mathbf{E}' + (\mathbf{U}' \times \mathbf{B})] - \beta^*(\mathbf{j}' \times \mathbf{B}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}' &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}' = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

В этой системе \mathbf{U} , $\bar{\mathbf{E}}$, \mathbf{B} , β^* , $\bar{\sigma}$ являются постоянными невозмущенными (осредненными) величинами.

Пусть, как и ранее, пульсации σ' и \mathbf{U}' представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^0 \cos(\mathbf{k}_{\alpha} \mathbf{r} - \omega_{\alpha} t), \\ \mathbf{U}' &= \sum_{\alpha} \mathbf{U}_{\alpha}^0 \cos(\mathbf{k}_{\alpha} \mathbf{r} - \omega_{\alpha} t), \\ \sigma_{\alpha}^0 &= (U_{\alpha}^0, v_{\alpha}^0, w_{\alpha}^0), \quad \mathbf{U}' = (U', v', w'), \\ \overline{\sigma'^2} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^0{}^2, \quad \overline{U'^2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \bar{U}_{\alpha}^0{}^2, \quad \overline{\sigma' \mathbf{U}'} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^0 \mathbf{U}_{\alpha}^0. \end{aligned} \quad (36)$$

Решение системы (35) с учетом (36) имеет следующий вид:

$$\mathbf{E}' = - \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{k}_{\alpha}}{M} \left[F_1 \left(\frac{\sigma_{\alpha}^0}{\bar{\sigma}} \right) + F_2 \left(\frac{u_{\alpha}^0}{\bar{U}} \right) + F_3 \left(\frac{v_{\alpha}^0}{\bar{U}} \right) + F_4 \left(\frac{w_{\alpha}^0}{\bar{U}} \right) \right] \bar{U} B \cos(\mathbf{k}_{\alpha} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\alpha} t), \quad (37)$$

где

$$F_1 = \delta_x k_{\alpha x} \bar{E}_x^* + \delta_y k_{\alpha y} \bar{E}_y^* + \delta_z k_{\alpha z} \bar{E}_z^* + \gamma_x (k_{\alpha z} \bar{E}_y^* - k_{\alpha y} \bar{E}_z^*) + \\ + \gamma_y (k_{\alpha x} \bar{E}_z^* - k_{\alpha z} \bar{E}_x^*) + \gamma_z (k_{\alpha y} \bar{E}_x^* - k_{\alpha x} \bar{E}_y^*) + \gamma_x \gamma_y (k_{\alpha x} \bar{E}_y^* + k_{\alpha y} \bar{E}_x^*) + \\ + \gamma_x \gamma_z (k_{\alpha x} \bar{E}_z^* + k_{\alpha z} \bar{E}_x^*) + \gamma_y \gamma_z (k_{\alpha y} \bar{E}_z^* + k_{\alpha z} \bar{E}_y^*), \\ F_2 = -\gamma_x (k_{\alpha y} B_y + k_{\alpha z} B_z) + k_{\alpha x} (\gamma_y B_y + \gamma_z B_z) - \\ - \gamma_x k_{\alpha x} (\gamma_y B_z - \gamma_z B_y) + \gamma_y \gamma_z (k_{\alpha y} B_y - k_{\alpha z} B_z),$$

$$F_3 = \delta_x k_{\alpha x} B_z - \delta_z k_{\alpha z} B_x + (\gamma_x k_{\alpha y} - \gamma_y k_{\alpha x}) B_x - \\ - (\gamma_y k_{\alpha z} - \gamma_z k_{\alpha y}) B_z + \gamma_x (\gamma_y k_{\alpha y} + \gamma_z k_{\alpha z}) B_z - \gamma_y \gamma_z k_{\alpha y} B_x,$$

$$F_4 = \delta_y k_{\alpha y} B_x - \delta_x k_{\alpha x} B_y + (\gamma_x k_{\alpha z} - \gamma_z k_{\alpha x}) B_x + (\gamma_y k_{\alpha z} - \gamma_z k_{\alpha y}) B_y + \\ + \gamma_x \gamma_y (k_{\alpha x} B_x - k_{\alpha y} B_y) - \gamma_x \gamma_z k_{\alpha z} B_y + \gamma_y \gamma_z k_{\alpha z} B_x,$$

$$M = \delta_x k_{\alpha x}^2 + \delta_y k_{\alpha y}^2 + \delta_z k_{\alpha z}^2 + 2(\gamma_x \gamma_y k_{\alpha x} k_{\alpha y} + \gamma_x \gamma_z k_{\alpha x} k_{\alpha z} + \gamma_y \gamma_z k_{\alpha y} k_{\alpha z}),$$

$$\delta_j = 1 + \beta^2 B_j^2, \quad \gamma_j = \beta^2 B_j,$$

$$\bar{u} = \sqrt{\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2 + \bar{u}_z^2}, \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}, \quad \bar{\mathbf{E}}^* = \bar{\mathbf{E}} + (\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{B}).$$

Пульсации \mathbf{j}' определяются из первого уравнения системы (35) с учетом (37). Полученное решение позволяет определить все необходимые корреляции. В качестве примера рассмотрим течение в канале со скрещенными постоянными электрическим и магнитным полями

$$\bar{\mathbf{E}} = (\bar{E}_x, \bar{E}_y, 0); \quad \mathbf{B} = (0, 0, B); \quad \bar{\mathbf{U}} = (\bar{U}, 0, 0)$$

В этом случае имеем

$$\frac{\sigma' \mathbf{E}'}{\bar{\sigma} \bar{U} B} = - \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{k}_{\alpha}}{k_{\alpha}^2 + \beta^2 k_{\alpha z}^2} \left[(L k_{\alpha x} + N k_{\alpha y}) \frac{\sigma_{\alpha}^{02}}{2\bar{\sigma}^2} - \right. \\ \left. - (k_{\alpha y} - \beta k_{\alpha x}) \frac{\sigma_{\alpha}^0 U_{\alpha}^0}{2\bar{\sigma} \bar{U}} + (k_{\alpha x} + \beta k_{\alpha y}) \frac{\sigma_{\alpha}^0 v_{\alpha}^0}{2\bar{\sigma} \bar{U}} \right]; \quad (38)$$

$$\frac{\bar{\mathbf{E}}'^2}{(\bar{U} B)^2} = \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{k}_{\alpha}^2}{k_{\alpha}^2 + \beta^2 k_{\alpha z}^2} \left[(L k_{\alpha x} + N k_{\alpha y})^2 \frac{\sigma_{\alpha}^{02}}{2\bar{\sigma}^2} + (k_{\alpha y} - \beta k_{\alpha x})^2 \frac{U_{\alpha}^{02}}{2\bar{U}^2} + \right. \\ + (k_{\alpha x} + \beta k_{\alpha y})^2 \frac{v_{\alpha}^{02}}{2\bar{U}^2} - 2(L k_{\alpha x} + N k_{\alpha y}) (k_{\alpha y} - \beta k_{\alpha x}) \frac{\sigma_{\alpha}^0 U_{\alpha}^0}{2\bar{\sigma} \bar{U}} + 2(L k_{\alpha x} + N k_{\alpha y}) \times \\ \left. \times (k_{\alpha x} + \beta k_{\alpha y}) \frac{\sigma_{\alpha}^0 v_{\alpha}^0}{2\bar{\sigma} \bar{U}} - 2(k_{\alpha y} - \beta k_{\alpha x}) (k_{\alpha x} + \beta k_{\alpha y}) \frac{U_{\alpha}^0 v_{\alpha}^0}{2\bar{U}^2} \right], \quad (39)$$

где $L = \Pi_x + \beta(1 - \Pi_y)$; $N = \beta \Pi_x - (1 - \Pi_y)$;

$$\Pi_x = \bar{E}_x / (\bar{U} B); \quad \Pi_y = \bar{E}_y / (\bar{U} B); \quad k_{\alpha}^2 = |\mathbf{k}_{\alpha}|^2.$$

При тех же предположениях, как и выше, из (38) и (39) в результате перехода от суммирования к интегрированию находим

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\sigma' E_x'}}{\overline{\sigma UB}} &= -I_1(\beta) \left(L \frac{\overline{\sigma'^2}}{\overline{\sigma^2}} + \beta \frac{\overline{\sigma' U'}}{\overline{\sigma U}} + \frac{\overline{\sigma' v'}}{\overline{\sigma U}} \right), \\ \frac{\overline{\sigma' E_v'}}{\overline{\sigma UB}} &= -I_1(\beta) \left(N \frac{\overline{\sigma'^2}}{\overline{\sigma^2}} - \frac{\overline{\sigma' U'}}{\overline{\sigma U}} + \beta \frac{\overline{\sigma' v'}}{\overline{\sigma U}} \right), \\ \frac{\overline{\sigma' E_z'}}{\overline{\sigma UB}} &= 0; \\ \frac{\overline{E_x'^2}}{(\overline{UB})^2} &= \frac{1}{3} I_2(\beta) \left[(3L^2 + N^2) \frac{\overline{\sigma'^2}}{\overline{\sigma^2}} + (3\beta^2 + 1) \frac{\overline{U'^2}}{\overline{U^2}} + (\beta^2 + 3) \frac{\overline{v'^2}}{\overline{U^2}} - \right. \\ &\quad \left. - 2(N - 3\beta L) \frac{\overline{\sigma' U'}}{\overline{\sigma U}} + 2(3L + \beta N) \frac{\overline{\sigma' v'}}{\overline{\sigma U}} + \frac{4}{3} \beta \frac{\overline{U' v'}}{\overline{U^2}} \right]; \\ \frac{\overline{E_v'^2}}{(\overline{UB})^2} &= \frac{1}{3} I_2(\beta) \left[(L^2 + 3N^2) \frac{\overline{\sigma'^2}}{\overline{\sigma^2}} + (\beta^2 + 3) \frac{\overline{U'^2}}{\overline{U^2}} + (3\beta^2 + 1) \frac{\overline{v'^2}}{\overline{U^2}} - \right. \\ &\quad \left. - 2(3N - \beta L) \frac{\overline{\sigma' U'}}{\overline{\sigma U}} + 2(L + 3\beta N) \frac{\overline{\sigma' v'}}{\overline{\sigma U}} - \frac{4}{3} \beta \frac{\overline{U' v'}}{\overline{U^2}} \right]; \\ \frac{\overline{E_z'^2}}{(\overline{UB})^2} &= I_3(\beta) \left[(L^2 + N^2) \frac{\overline{\sigma'^2}}{\overline{\sigma^2}} + (\beta^2 + 1) \frac{\overline{U'^2 + v'^2}}{\overline{U^2}} - \right. \\ &\quad \left. - 2(N - \beta L) \frac{\overline{\sigma' U'}}{\overline{\sigma U}} + 2(L + \beta N) \frac{\overline{\sigma' v'}}{\overline{\sigma U}} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_1(\beta) &= -\frac{1}{2\beta^2} \left[1 - \frac{(\beta^2 + 1)}{\beta} \operatorname{arctg} \beta \right]; \\ I_2(\beta) &= \frac{3}{16\beta^4} \left[(\beta^2 + 3) + \frac{(\beta^2 - 3)(\beta^2 + 1)}{\beta} \operatorname{arctg} \beta \right]; \\ I_3(\beta) &= \frac{1}{4\beta^4} \left[-3 + \frac{(\beta^2 + 3)}{\beta} \operatorname{arctg} \beta \right]; \\ I_1(0) &= 1/3; \quad I_2(0) = 1/5; \quad I_3(0) = 1/15. \end{aligned}$$

Полученные выражения для корреляций необходимо использовать при определении интегральных характеристик конкретных устройств со скрещенными постоянными электрическим и магнитным полями.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 6.IV.1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. М.: Мир, 1968. 492 с.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
3. Глушков И. С., Кареев Ю. А. ТВТ, 1971, т. 9, № 1, с. 1.
4. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
5. Yoshikawa S., Rose D. J. Phys. Fluids, 1964, v. 5, № 3.
6. Ганефельд Р. В. Препринт № 134 ИЭД АН УССР. Киев, 1977, 20 с.
7. Кудинов В. А., Мойжес Б. Я. ЖТФ, 1979, т. 49, № 8, с. 1595.
8. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.