M. A. Petrosova, On estimating the sum of coefficient moduli in Bernstein polynomials on a symmetric interval, *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2024, Volume 9, Issue 4, 622–633

DOI: 10.47475/2500-0101-2024-9-4-622-633

Челябинский физико-математический журнал. 2024. Т. 9, вып. 4. С. 622–633.

УДК 517.518.82+517.15+519.66 DOI: 10.47475/2500-0101-2024-9-4-622-633

О СКОРОСТИ РОСТА СУММЫ МОДУЛЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПОЛИНОМАХ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова

ГБОУ «Школа № 1234», Москва, Россия
petrosova05@mail.ru

Изучается задача о скорости роста суммы модулей коэффициентов при алгебраической записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$. Представлен возможный путь решения через специальные числовые объекты — «трапеции Паскаля», связанные с различными комбинаторными тождествами. Полученный результат улучшает прежнюю оценку Рулье, действующую для совокупности коэффициентов при увеличении номера полинома Бернштейна.

Ключевые слова: *полиномы Бернштейна, симметричный отрезок, оценки коэффициентов, трапеции Паскаля.*

Введение

Полиномы Бернштейна являются важным инструментом, применяемым в теории аппроксимации (см. [1–4]). Обычно полиномы Бернштейна рассматривают на стандартном отрезке $[0,1]$. Так, в работе И. В. Тихонова и В. Б. Шерстюкова [5] был изучен вопрос о росте максимального коэффициента в полиномах Бернштейна при увеличении номера $n \in \mathbb{N}$ для функции $f(x) = |2x-1|$, взятой на $[0,1]$. Дальнейшему развитию тематики посвящена заметка [6], в которой представлены дополнительные сведения о поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при их алгебраической записи на том же стандартном отрезке.

В последние годы выяснилось, что полиномы Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$ обладают своей спецификой (см. [7–13]). Потребовалось оценить поведение коэффициентов полиномов и в случае отрезка $[-1,1]$.

Прежде чем приступить к основному изложению, отметим, что вопросы, связанные с оценками коэффициентов аппроксимирующих полиномов (не обязательно полиномов Бернштейна), затрагивались в работах [14–20]. При этом публикация Стафни [14] считается отправной для данного направления.

1. Постановка задачи и главный результат

Напомним, что для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна вводят по правилу

$$B_n(f,z) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \, (1+z)^k \, (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Здесь z — комплексная переменная, а C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Ясно, что $\deg B_n(f,z) \leqslant n$ и, следовательно, полиномы $B_n(f,z)$ допускают явную алгебраическую запись

$$B_n(f,z)=\sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f)\,z^m, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

с числовыми коэффициентами $a_{n,m}(f)$, зависящими от функции $f\in C[-1,1]$.

Определим величину

$$S_n(f)=\sum_{m=0}^{n} |a_{n,m}(f)|, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

характеризующую поведение совокупности коэффициентов $a_{n,m}(f)$ при изменении номера $n\in\mathbb{N}$. Из результатов Рулье [15] применительно к отрезку $[-1,1]$ следует оценка

$$S_n(f)\leqslant 2^n\,\|f\|, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

где $\|f\|$ — стандартная супремум-норма функции $f\in C[-1,1]$.

Покажем, что оценка (4), полученная общим методом работы [15], является завышенной. Используя более тонкие подходы, установим следующий результат.

Теорема 1. *Для любой функции $f\in C[-1,1]$ и величины $S_n(f)$, определённой по формуле* (3), *справедлива оценка*

$$S_n(f)\leqslant 2\;(3/2)^n\,\|f\|, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

При $n=1$ и $n=2$ новая оценка (5) хуже, чем оценка (4). Но уже при $n\geqslant 3$ качество оценки (5) существенно повышается и её точность заведомо превосходит точность прежней оценки (4). Например, при $n=6$ из оценки Рулье следует, что $S_6(f)\leqslant 64\,\|f\|$, а из нашей оценки (5) — что $S_6(f)\leqslant 22.78125\,\|f\|$.

Теорема 1 была анонсирована в работе [11]. Изложим сейчас все подробности, связанные с доказательством данного результата. Ключевую роль в последующем играет наша совместная работа [12], посвящённая исследованию алгебраической записи (2) полиномов Бернштейна $B_n(f,z)$ на симметричном отрезке $[-1,1]$.

2. Формулы для коэффициентов полиномов Бернштейна

Доказательство основной теоремы 1 разобьём на несколько этапов. Зафиксируем функцию $f\in C[-1,1]$ и её полиномы Бернштейна (1). Напомним вначале явные выражения для коэффициентов $a_{n,m}(f)$ из формулы (2). В работе [12] показано, что

$$a_{n,m}(f)=2^{-n}\,C_n^m\sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k\,f\Big(1-\frac{2k}{n}\Big), \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad m\in\{\,0,\,1,\,\ldots,\,n\}, \tag{6}$$

где числа $D_{n,m}^k$ определены по правилу

$$D_{n,m}^k=\sum_{j}(-1)^j\;C_m^j\,C_{n-m}^{k-j}. \tag{7}$$

Суммирование в подобных формулах удобно распространять на все значения $j\in\mathbb{Z}$ с учётом того, что

$$C_\nu^\mu=0, \qquad \nu\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \qquad \mu\in\{\,\ldots,\,-2,\,-1\,\}\cup\{\,\nu+1,\,\nu+2,\,\ldots\}, \tag{8}$$

в согласии с известными свойствами биномиальных коэффициентов (см. [21, с. 4]). Тем самым всякая сумма вида (7) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

При $m=0$ из определения (7) с учётом соотношений (8) следует, что

$$D^k_{n,0} = C^k_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad k \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, n\}, \tag{9}$$

т. е. числа $D^k_{n,0}$ совпадают с обычными биномиальными коэффициентами. Для остальных m действуют следующие правила.

Лемма 1. *При любом фиксированном* $m \in \mathbb{N}$ *числа* $D^k_{n,m}$, *определённые выше по формуле* (7), *обладают свойствами*

$$D^k_{m,m} = (-1)^k\, C^k_m, \qquad k \in \{\,0,\, 1,\, \ldots,\, m\}, \tag{10}$$

$$D^0_{n,m} = 1, \qquad D^n_{n,m} = (-1)^m, \qquad n \in \{\,m,\, m+1,\, \ldots\}, \tag{11}$$

$$D^{k-1}_{n,m} + D^k_{n,m} = D^k_{n+1,m}\,, \qquad n \in \{\,m,\, m+1,\, \ldots\}, \qquad k \in \{\,1,\, \ldots,\, n\}. \tag{12}$$

Доказательство леммы 1 дано в работе [12]. Свойства (10)–(12) позволяют организовать регулярный процесс вычисления значений $D^k_{n,m}$ при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$. Формулу (10) естественно рассматривать как знакопеременное «начальное условие», а формула (11) даёт соответствующие «краевые значения». Ключевое свойство (12) действует так же, как известная связь $C^{k-1}_n + C^k_n = C^k_{n+1}$ между биномиальными коэффициентами. Из-за сходства с классической конструкцией возникающие таблицы чисел $D^k_{n,m}$ естественно называть *трапециями Паскаля.* Каждая из таких трапеций $\mathcal{T}_m$ отнесена к своему индексу $m \in \mathbb{N}$.

Например, при $m=2$ для чисел $D^k_{n,2}$ получаем трапецию $\mathcal{T}_2$ вида

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&1&&-2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&-1&&-1&&1&&&&& \\
&&&&1&&0&&-2&&0&&1&&&& \\
&&&1&&1&&-2&&-2&&1&&1&&& \\
&&1&&2&&-1&&-4&&-1&&2&&1&& \\
&1&&3&&1&&-5&&-5&&1&&3&&1& \\
1&&4&&4&&-4&&-10&&-4&&4&&4&&1
\end{array}$$

Здесь приведены строки с номерами от $n=2$ до $n=8$. По формуле (6) числа из данной таблицы (вместе с её дальнейшим продолжением) нужны для вычисления коэффициентов $a_{n,2}(f)$, стоящих в полиномах $B_n(f,z)$ при степени z^2. Такие коэффициенты возникают как раз при $n \geqslant 2$.

Далее, при $m=3$ для чисел $D^k_{n,3}$ получаем трапецию $\mathcal{T}_3$ вида

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&1&&-3&&3&&-1&&&&& \\
&&&&1&&-2&&0&&2&&-1&&&& \\
&&&1&&-1&&-2&&2&&1&&-1&&& \\
&&1&&0&&-3&&0&&3&&0&&-1&& \\
&1&&1&&-3&&-3&&3&&3&&-1&&-1& \\
1&&2&&-2&&-6&&0&&6&&2&&-2&&-1
\end{array}$$

Здесь приведены строки с номерами от $n=3$ до $n=8$. Числа из этой таблицы (вместе с её продолжением) используются для вычисления коэффициентов $a_{n,3}(f)$, стоящих в полиномах $B_n(f,z)$ при степени z^3. Такие коэффициенты возникают в полиномах при $n \geqslant 3$.

Подробную теорию, посвящённую числам $D^k_{n,m}$ и порождаемым ими соотношениям, можно найти в работе [12]. Там, среди прочего, установлен такой результат.

Лемма 2. *При любом фиксированном значении* $m \in \mathbb{N}$ *числа* $D^k_{n,m}$, *определённые по формуле* (7), *обладают свойствами*

$$D^{2j}_{2m,m} = D^j_{m,m} = (-1)^j\, C^j_m, \qquad j \in \{\,0,\,1,\,\ldots,\,m\}, \tag{13}$$

$$D^{2j-1}_{2m,m} = 0, \qquad j \in \{\,1,\,\ldots,\,m\}. \tag{14}$$

Доказательство леммы есть в работе [12] (см. там формулы (66), (67) на с. 79). Соотношения (13), (14) выражают важную закономерность, наблюдаемую в каждой трапеции $\mathcal{T}_m$ при фиксированном значении $m \in \mathbb{N}$, а именно, строка с номером $n = 2m$ выглядит так же, как первая строка с номером $n = m$, только «прореженная» нулями. Указанную закономерность можно заметить, например, в трапеции $\mathcal{T}_2$, сравнивая строки с номерами $n = 2$ и $n = 4$, а в трапеции $\mathcal{T}_3$, сравнивая строки с номерами $n = 3$ и $n = 6$ (см. таблицы выше).

Помимо многочисленных соотношений, действующих для элементов той или иной фиксированной трапеции $\mathcal{T}_m$, имеются связи между различными трапециями Паскаля. Нам, в частности, понадобится такой результат.

Лемма 3. *Для чисел* $D^k_{n,m}$, *определённых по формуле* (7), *справедливы равенства*

$$D^k_{n,m} = (-1)^k\, D^k_{n,n-m}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad k, m \in \{\,0,\,1,\,\ldots,\,n\}. \tag{15}$$

Доказательство данного утверждения см. в [12, с. 78]. Формула (15) связывает n-е строки в трапециях с номерами m и $n - m$ (указанные номера различны, если $n \neq 2m$). Например, выбирая строку с номером $n = 5$ в трапециях $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$, нетрудно проверить для элементов выполнение условия (15). Отметим также, что при $n = m$ из формулы (15) следует соотношение $D^k_{m,m} = (-1)^k D^k_{m,0} = (-1)^k C^k_m$, очевидно совпадающее с правилом (10).

Следующий шаг связан с введением новой характеристики, позволяющей давать общие (суммарные) оценки элементов n-й строки в трапеции $\mathcal{T}_m$.

3. Построчные нормы в трапециях Паскаля

Зафиксируем значение $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и рассмотрим соответствующий набор чисел $D^k_{n,m}$ из формулы (7). При $m = 0$ согласно (9) получаем обычный треугольник Паскаля со срезанной вершиной (без элемента C^0_0). При $m \in \mathbb{N}$ получаем трапеции $\mathcal{T}_m$, описанные в лемме 1.

Определим величину

$$\eta_{n,m} \equiv \sum_{k=0}^{n} |D^k_{n,m}|, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant m, \tag{16}$$

характеризующую совокупность всех чисел $D^k_{n,m}$ в n-й строке трапеции $\mathcal{T}_m$.

При $m = 0$ по свойству (9) имеем

$$\eta_{n,0} \equiv \sum_{k=0}^{n} |D^k_{n,0}| = \sum_{k=0}^{n} C^k_n = 2^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

т. е. значения $\eta_{n,0}$ вычисляются непосредственно.

При остальных индексах $m \in \mathbb{N}$ дадим оценки сверху значений $\eta_{n,m}$ сначала для номеров $n \geqslant 2m$, а затем — для $m \leqslant n \leqslant 2m$.

Лемма 4. *При любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ для величины* (16) *верна оценка*

$$\eta_{n,m} \leqslant 2^{n-m}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant 2m. \tag{18}$$

Оценка (18) *применима также к значениям $\eta_{n,0}$ при $m = 0$.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$. При $n = 2m$ по лемме 2 получаем

$$\eta_{2m,m} \equiv \sum_{k=0}^{2m} |D^k_{2m,m}| = \sum_{j=0}^{m} |D^j_{m,m}| = \sum_{j=0}^{m} C^j_m = 2^m,$$

что соответствует формуле (18). Зафиксируем теперь номер $n \geqslant 2m$ и покажем, что при переходе к следующему номеру $n+1$ величина $\eta_{n,m}$ может увеличиться не более, чем в два раза. Действительно, согласно (11) имеем

$$\left|D^0_{n+1,m}\right| = \left|D^{n+1}_{n+1,m}\right| = \left|D^0_{n,m}\right| = \left|D^n_{n,m}\right| = 1.$$

Поэтому, учитывая свойство (12), заключаем, что

$$\eta_{n+1,m} \equiv \sum_{k=0}^{n+1} \left|D^k_{n+1,m}\right| = \left|D^0_{n+1,m}\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|D^k_{n+1,m}\right| + \left|D^{n+1}_{n+1,m}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|D^0_{n,m}\right| + \sum_{k=1}^{n} \left(\left|D^k_{n,m}\right| + \left|D^{k-1}_{n,m}\right|\right) + \left|D^n_{n,m}\right| = 2\sum_{k=0}^{n} \left|D^k_{n,m}\right| = 2\,\eta_{n,m}.$$

Отсюда $\eta_{n+d,m} \leqslant 2^d\,\eta_{n,m}$ при любом $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и, в частности,

$$\eta_{2m+d,m} \leqslant 2^d\,\eta_{2m,m} = 2^d\,2^m = 2^{(2m+d)-m}, \qquad d \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

что и утверждается в формуле (18). При $m = 0$ оценка (18) совпадает с прежним результатом (17). Лемма доказана. $\square$

Сделаем теперь следующий шаг. Используя лемму 3, заметим, что

$$\eta_{n,m} \equiv \sum_{k=0}^{n} \left|D^k_{n,m}\right| = \sum_{k=0}^{n} \left|D^k_{n,n-m}\right| \equiv \eta_{n,n-m}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant m \geqslant 0. \tag{19}$$

Отсюда с учётом предыдущей леммы 4 получаем такой результат.

Лемма 5. *При любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ для величины* (16) *верна оценка*

$$\eta_{n,m} \leqslant 2^m, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad m \leqslant n \leqslant 2m. \tag{20}$$

Доказательство. Зафиксируем значение $n \in \mathbb{N}$ из диапазона, указанного в формуле (20). В силу (19) имеем $\eta_{n,m} = \eta_{n,n-m}$. Так как $n \leqslant 2m$, то $n \geqslant 2(n-m)$. Следовательно, к величине $\eta_{n,n-m}$ применима оценка из леммы 4. В результате получаем $\eta_{n,m} = \eta_{n,n-m} \leqslant 2^{n-(n-m)} = 2^m$, что и утверждается в формуле (20). Лемма доказана. $\square$

Установленные соотношения позволяют вывести основную оценку (5), составляющую содержание теоремы 1.

4. Вывод нужного неравенства

Исходя из формулы (6) и с учётом определения (16), имеем оценку

$$|a_{n,m}(f)| \leqslant 2^{-n}\, C_n^m \sum_{k=0}^{n} |D_{n,m}^k| \cdot \|f\| = 2^{-n}\, C_n^m\, \eta_{n,m}\, \|f\|$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \{\, 0,\, 1,\, \ldots,\, n\}$. Отсюда для суммы (3) устанавливаем соотношение

$$S_n(f) \equiv \sum_{m=0}^{n} |a_{n,m}(f)| \leqslant 2^{-n} \sum_{m=0}^{n} C_n^m\, \eta_{n,m}\, \|f\|, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Формулы (18) и (20) позволяют оценить значения $\eta_{n,m}$ в неравенстве (21). Для удобства выкладок используем известные обозначения *пола* $\lfloor h \rfloor$ и *потолка* $\lceil h \rceil$ для точных нижней и верхней граней числа $h \in \mathbb{R}$ на множестве $\mathbb{Z}$ (см. [22, с. 88]).

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и перепишем (21) в виде

$$S_n(f) \leqslant 2^{-n} \left(\sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^m\, \eta_{n,m} + \sum_{m=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} C_n^m\, \eta_{n,m} \right) \|f\|.$$

Первую из этих сумм оценим с помощью леммы 4, а вторую — с помощью леммы 5. В результате имеем

$$S_n(f) \leqslant 2^{-n} \left(\sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-m}\, C_n^m + \sum_{m=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} 2^m\, C_n^m \right) \|f\| =$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{-m}\, C_n^m + \sum_{m=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} 2^{m-n}\, C_n^m \right) \|f\|.$$

Рассмотрим отдельно последнюю из полученных сумм:

$$\sum_{m=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} 2^{m-n}\, C_n^m = \sum_{k=0}^{n-\lfloor n/2 \rfloor-1} 2^{-k}\, C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil-1} 2^{-k}\, C_n^k \leqslant \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{-k}\, C_n^k$$

(в преобразованиях верхнего индекса использовано равенство $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$, верное при любом $n \in \mathbb{N}$). Как следствие, имеем оценку

$$S_n(f) \leqslant \left(\sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{-m}\, C_n^m + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{-k}\, C_n^k \right) \|f\| = 2 \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{-m}\, C_n^m\, \|f\|.$$

Отсюда, с учётом формулы бинома, выводим, что

$$S_n(f) \leqslant 2 \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{-m}\, C_n^m\, \|f\| \leqslant 2 \sum_{m=0}^{n} 2^{-m}\, C_n^m\, \|f\| = 2\, (3/2)^n\, \|f\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Но это и есть желаемая оценка (5). Доказательство теоремы 1 завершено.

5. Примеры и комментарии

Как уже отмечалось в разделе 1, при больших номерах $n \in \mathbb{N}$ установленная оценка (5) очевидно лучше прежней оценки (4), основанной на общих соображениях работы Рулье [15]. Возникает естественный вопрос о точности нашего нового результата (5). Ответ здесь выглядит так: скорее всего, определённое усиление (5) возможно, но оно заведомо не будет сколько-нибудь существенным.

Так, например, заменить в мажоранте из (5) основание $q = 3/2 = 1.5$ близким основанием $q = 7/5 = 1.4$ уже не получится, даже если мы заменим там коэффициент 2 любым другим, сколь угодно большим числом. Точнее, для исследуемой величины (3) оценка вида

$$S_n(f) \leqslant M\,(7/5)^n\,\|f\|, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

заведомо нарушается на классе $f \in C[-1,1]$, как бы ни выбирать константу $M > 0$.

Для того чтобы это показать, возьмём функцию

$$f(x) = |x|, \qquad x \in [-1,1], \tag{23}$$

с полиномами Бернштейна

$$B_n(f,z) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{2k}{n} - 1\right| C_n^k\,(1+z)^k\,(1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Полиномы (24) для *стандартного модуля* (23) подробно изучены в работе [9].

Как показано там, первый полином $B_1(f,z) \equiv 1$ является отдельным, а далее действует *правило попарного склеивания* $B_{2k}(f,z) = B_{2k+1}(f,z)$ с явными алгебраическими выражениями

$$B_{2k}(f,z) = B_{2k+1}(f,z) = 2^{-2k} C_{2k}^k \left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}\,C_k^j x^{2j}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Соответственно для величины (3) получаем представление

$$S_{2k}(f) = S_{2k+1}(f) = 2^{-2k} C_{2k}^k \left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j-1}\,C_k^j\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Комбинаторная сумма в (26) не допускает явного вычисления, но может быть исследована аналитически.

Согласно результатам [10] в примере (26) действует асимптотическая формула

$$S_{2k}(f) = S_{2k+1}(f) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^k}{k^{3/2}} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отсюда для чётных и нечётных n получаем раздельно

$$S_n(f) \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^{n/2}}{n^{3/2}}, \qquad n = 2k \to \infty, \tag{27}$$

и соответственно

$$S_n(f) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^{n/2}}{n^{3/2}}, \qquad n = 2k+1 \to \infty. \tag{28}$$

Как видим, в примере (23) основной рост величины $S_n(f)$ характеризуется показательной функцией $2^{n/2} = \left(\sqrt{2}\right)^n$. В качестве следствия имеем такой результат.

Теорема 2. *При любом значении* q *из интервала* $1 < q < \sqrt{2}$ *для величины* (3) *в примере* (23) *справедливо соотношение*

$$q^{-n} S_n(f) \to \infty, \qquad n \to \infty. \tag{29}$$

Доказательство теоремы 2 несложно. Основываясь на формулах (27) и (28), запишем асимптотики величины $q^{-n} S_n(f)$ для чётных и нечётных значений $n \in \mathbb{N}$. В полученных выражениях основной множитель $q^{-n} \cdot 2^{n/2} = \left(\sqrt{2}/q\right)^n$ экспоненциально растёт при $n \to \infty$ (в силу сделанного выбора значения q). Отсюда сразу следует результат (29).

Поскольку функция (23) принадлежит классу $C[-1,1]$, теорема 2 показывает, что при любом выборе значения q из интервала $1 < q < \sqrt{2}$ оценка

$$S_n(f) \leqslant M q^n \, \|f\|, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

уже невозможна на классе $C[-1,1]$ ни при какой константе $M > 0$. В частности, установленную оценку (5) из теоремы 1 нельзя заменить близкой оценкой (22) (так как $7/5 < \sqrt{2}$). Вопрос о точной нижней грани $q^* \equiv \inf q$ всех тех значений $q > 1$, при которых оценка (30) сохраняется на классе $f \in C[-1,1]$, требует отдельного изучения (задача И. В. Тихонова и В. Б. Шерстюкова). Из теоремы 2 очевидно следует, что $q^* \geqslant \sqrt{2}$. Есть основания полагать, что $q^* = \sqrt{2}$ (гипотеза И. В. Тихонова и В. Б. Шерстюкова).

При этом не следует думать, что изучаемая величина (3) экспоненциально растёт для всех других функций $f \in C[-1,1]$, отличных от тождественного нуля.

В качестве примера рассмотрим систему степеней

$$f_p(x) = x^p, \qquad x \in [-1,1], \tag{31}$$

с показателями $p \in \mathbb{N}$. В недавней публикации [13] показано, что величина $S_n(f_p)$ не только не растёт, но даже сохраняет постоянное значение при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой функции* (31) *произвольной степени* $p \in \mathbb{N}$ *введём величину* $S_n(f_p)$ *согласно определениям* (1)–(3). *Тогда* $S_n(f_p) = 1$ *при всех номерах* $n \in \mathbb{N}$.

Для доказательства теоремы 3 надо заметить, что

$$S_n(f_p) \equiv \sum_{m=0}^{n} |a_{n,m}(f_p)| = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f_p) = B_n(f_p, 1) = f_p(1) = 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Выкладка (32) использует *неотрицательность* всех коэффициентов $a_{n,m}(f_p)$ в примере (31) (подробнее про это см. [13]). Как видно из формулы (25), в предыдущем примере с модулем неотрицательность коэффициентов не наблюдается.

Для наглядности дадим иллюстрации к теореме 3. Воспользуемся результатами работы [7], посвящённой вопросу о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна с порождающими функциями (31).

Так, согласно [7], для функции $f_2(x) = x^2$, взятой на $[-1,1]$, полиномы Бернштейна представимы формулой

$$B_n(f_2, z) = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) z^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Значимые коэффициенты

$$a_{n,0}(f_2) = \frac{1}{n}, \qquad a_{n,2}(f_2) = \frac{n-1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

очевидно неотрицательны при всех $n \in \mathbb{N}$, и соответственно

$$S_n(f_2) = a_{n,0}(f_2) + a_{n,2}(f_2) = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

как и утверждалось в теореме 3.

Далее, для функции $f_3(x) = x^3$ полиномы Бернштейна имеют вид

$$B_n(f_3, z) = \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right) z + \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) z^3, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Значимые коэффициенты

$$a_{n,1}(f_3) = \frac{3n-2}{n^2}, \qquad a_{n,3}(f_3) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

снова неотрицательны, и соответственно

$$S_n(f_3) = a_{n,1}(f_3) + a_{n,3}(f_3) = \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

в полном согласии с теоремой 3.

Итак, в случае степенных функций (31) величина (3) сохраняет постоянное значение при всех номерах $n \in \mathbb{N}$ (дополнительные подробности см. в [13]). Отметим также, что вопрос о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна в примерах (31) связан со многими нетривиальными соотношениями (см. [7]).

Выражаю глубокую признательность своему научному руководителю профессору И. В. Тихонову, а также профессору В. Б. Шерстюкову за постановку задачи и постоянную помощь в процессе подготовки данной работы.

Список литературы

1. **Lorentz G. G.** Bernstein Polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953.
2. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.** Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ. : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2014. С. 126–175.
3. **Bustamante J.** Bernstein Operators and Their Properties. Birkhäuser, 2017.
4. **Виденский В. С.** Линейные положительные операторы конечного ранга. Многочлены Бернштейна. СПб. : Лань, 2023.
5. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.** Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.
6. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.** О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и матем. образования : материалы научн. конф. «Герценовские чтения – 2015». СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 115–121.
7. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.** Полиномы Бернштейна для степенной функции на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В. П. Дьяконова. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 215–220.

8. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.** Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300.
9. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.** Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 425–435.
10. **Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.** О росте коэффициентов в полиномах Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Уфимский матем. журнал. 2018. Т. 10, № 3. С. 89–107.
11. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.** Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 336–347.
12. **Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.** Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке и связанные с ней комбинаторные соотношения // Владикавказский матем. журнал. 2019. Т. 21, вып. 3. С. 62–86.
13. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.** Об одном свойстве коэффициентов полиномов Бернштейна для степенных функций на симметричном отрезке // Современные проблемы математики и математического образования. Международная научн. конф. : сб. науч. тр. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. С. 305–309.
14. **Stafney J. D.** A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$ // Duke Mathematical Journal. 1967. Vol. 34, № 3. P. 393–396.
15. **Хавинсон С. Я.** Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций // Матем. заметки. 1969. Т. 6, вып. 5. С. 619–625.
16. **Roulier J. A.** Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials // Journal of Approximation Theory. 1970. Vol. 3, № 2. P. 117–122.
17. **Roulier J. A.** Restrictions on the coefficients of approximating polynomials // Journal of Approximation Theory. 1972. Vol. 6, № 3. P. 276–282.
18. **Гурарий В. И., Мелетиди М. А.** Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // Функциональный анализ и его прилож. 1971. Т. 5, вып. 1. С. 73–75.
19. **Мурадян О. А., Хавинсон С. Я.** О величинах коэффициентов многочленов в аппроксимационной теореме Вейерштрасса // Матем. заметки. 1977. Т. 2, № 2. С. 269–276.
20. **Трынин А. Ю.** О многочленах наилучшего приближения сегментных функций // Владикавказский матем. журнал. 2023. Т. 25, вып. 1. С. 105–111.
21. **Fowler D.** The binomial coefficient function // The American Mathematical Monthly. 1996. Vol. 103, № 1. P. 1–17.
22. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. Основание информатики. 2-е изд., испр. М. : Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

Поступила в редакцию 20.07.2024
После переработки 20.09.2024

Сведения об авторе

Петросова Маргарита Арсеновна, учитель математики, ГБОУ «Школа № 1234», Москва, Россия; e-mail: petrosova05@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2024. Vol. 9, iss. 4. P. 622–633.

DOI: 10.47475/2500-0101-2024-9-4-622-633

ON ESTIMATING THE SUM OF COEFFICIENT MODULI IN BERNSTEIN POLYNOMIALS ON A SYMMETRIC INTERVAL

M.A. Petrosova

School No. 1234, Moscow, Russia
petrosova05@mail.ru

For Bernstein polynomials on the symmetric interval $[-1,1]$, a growth rate problem for the sum of coefficient moduli is considered. Used representations of the polynomials is indicated. We give a possible way to solve the problem through special numerical objects (Pascal's trapezoids). These objects are related to various combinatorial identities. The obtained result improves Roulier's previous estimate, which applies to the sum of coefficient moduli as the index of the Bernstein polynomial increases.

Keywords: *Bernstein polynomials, symmetric interval, estimates of coefficients, Pascal's trapezoids.*

References

1. **Lorentz G.G.** *Bernstein Polynomials.* Toronto, University of Toronto Press, 1953.
2. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B., Petrosova M.A.** Polinomy Bernshteyna: staroye i novoye [Bernstein polynomials: the old and the new]. *Matematicheskiy forum* [Mathematical forum], vol. 8, part 1. Vladikavkaz, YuMI VNTs RAN i RSO-A, 2014. Pp. 126–175. (In Russ.).
3. **Bustamante J.** *Bernstein Operators and Their Properties.* Cham, Birkhäuser, 2017.
4. **Videnskij V.S.** *Lineynye polozhitel'nye operatory konechnogo ranga. Mnogochleny Bernshteyna* [Linear positive operators of finite rank. Bernstein polynomials]. Saint Petersburg, Lan', 2023. (In Russ.).
5. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B.** Priblizheniye modulya polinomami Bernshteyna [Approximation of the module by Bernstein polynomials]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Chelyabinsk State University. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40. (In Russ.).
6. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B.** O povedenii koeffitsientov polinomov Bernshteyna pri algebraicheskoy zapisi na standartnom otrezke [On the behavior of the coefficients of Bernstein polynomials in algebraic notation on a standard interval]. *Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoy matematiki i matematicheskogo obrazovaniya* [Some actual problems of modern mathematics and mathematical education], Scientific Conference "Herzen Readings". Saint Petersburg, A. I. Herzen Russian State Pedagogical University, 2015. Pp. 115–121. (In Russ.).
7. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B.** Polinomy Bernshteyna dlya stepennoy funktsii na simmetrichnom otrezke [Bernstein polynomials for a power function on a symmetric interval]. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Systems of computer mathematics and their applications], XVI International Scientific Conference, Smolensk, Smolensk State University, 2015, iss. 16, pp. 215–220. (In Russ.).
8. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B., Petrosova M.A.** Pravilo skleivaniya dlya polinomov Bernshteyna na simmetrichnom otrezke [The gluing rule for Bernstein polynomials on a symmetric interval]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [News of Saratov University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 288–300. (In Russ.).

9. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B., Petrosova M.A.** Polinomy Bernshteyna dlya standartnogo modulya na simmetrichnom otrezke [Bernstein polynomials for a standard module on a symmetric interval]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika* [News of Saratov University. New series. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2016, vol. 16, no. 4, pp. 425–435. (In Russ.).
10. **Petrosova M.A., Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B.** O roste koeffitsientov v polinomakh Bernshteyna dlya standartnogo modulya na simmetrichnom otrezke [On the growth of coefficients in Bernstein polynomials for a standard module on a symmetric interval]. *Ufa Mathematical Journal*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 89–107. (In Russ.).
11. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B., Petrosova M.A.** Novye issledovaniya, svyazannye s algebraicheskoy zapis'yu polinomov Bernshteyna na simmetrichnom otrezke [A new research related to the algebraic representation of Bernstein polynomials on a symmetric interval]. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Systems of computer mathematics and their applications], XIX International Scientific Conference, Smolensk, Smolensk State University, 2018, iss. 19, pp. 336–347. (In Russ.).
12. **Petrosova M.A., Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B.** Algebraicheskaya zapis' polinomov Bernshteyna na simmetrichnom otrezke i svyazannye s ney kombinatornye sootnosheniya [Algebraic representation for Bernstein polynomials on the symmetric interval and combinatorial identities]. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [Vladikavkaz mathematical journal], 2019, vol. 21, iss. 3, pp. 62–86. (In Russ.).
13. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B., Petrosova M.A.** Ob odnom svoystve koeffitsientov polinomov Bernshteyna dlya stepennykh funktsij na simmetrichnom otrezke [On coefficients of Bernstein polynomials of simple power functions on a symmetrical interval]. *Sovremennye problemy matematiki i matematicheskogo obrazovaniya* [Contemporary problems of mathematics and mathematical education], International Scientific Conference. Saint Petersburg, A. I. Herzen Russian State Pedagogical University, 2024. Pp. 305–309. (In Russ.).
14. **Stafney J.D.** A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$. *Duke Mathematical Journal*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 393–396.
15. **Havinson S.Ya.** Dopustimye velichiny koeffitsientov mnogochlenov pri ravnomernoy approksimatsii nepreryvnykh funktsiy [Acceptable values of the coefficients of polynomials in the uniform approximation of continuous functions]. *Matematicheskiye zametki* [Mathematical notes], 1969, vol. 6, iss. 5, pp. 619–625. (In Russ.).
16. **Roulier J.A.** Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 1970, vol. 3, no. 2, pp. 117–122.
17. **Roulier J.A.** Restrictions on the coefficients of approximating polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 1972, vol. 6, no. 3, pp. 276–282.
18. **Gurarii V.I., Meletidi M.A.** On estimates of the coefficients of polynomials approximating continuous functions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1971, vol. 5, iss. 1, pp. 60–62.
19. **Muradyan O.A., Khavinson S.Ya.** Absolute values of the coefficients of the polynomials in Weierstrass's approximation theorem. *Mathematical Notes*, 1977, vol. 22, iss. 2, pp. 641–645.
20. **Trynin A.Yu.** O mnogochlenakh nailuchshego priblizheniya segmentnykh funktsiy [On the polynomials of the best approximation of segment functions]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal* [Vladikavkaz mathematical journal]. 2023, vol. 25, iss. 1, pp. 105–111. (In Russ.).
21. **Fowler D.** The binomial coefficient function. *The American Mathematical Monthly*, 1996, vol. 103, no. 1, pp. 1–17.
22. **Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O.** *Konkretnaya matematika. Osnovanie informatiki* [Concrete Mathematics. A foundation for Computer Science]. Moscow, Mir; BINOM. Laboratoriya znanij, 2006. (In Russ.).

Article received 20.07.2024.

Corrections received 20.09.2024.