

УДК 519.63

## НЕЛИНЕЙНАЯ КВАЗИМОНОТОННАЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ С ПЕРЕНОСОМ. ЗАДАЧА О СКОРОСТНОМ СКИН-СЛОЕ

М. П. Галанин

Рассмотрим задачу, возникающую при математическом моделировании процессов, протекающих в электродинамическом ускорителе типа рельсотрон при разгоне проводящих макротел [1, 2]. Цель работы — разработка вычислительных алгоритмов для расчета решения. Как будет ясно из используемых моделей, возникающие здесь проблемы имеют общий характер для многих задач математической физики, что определяет значимость разрабатываемых алгоритмов и методов.

Будем вести рассмотрение на примере двумерной области, соответствующей сечению ускорителя плоскостью  $z = \text{const}$ . На рис. 1 показана половина такого сечения. По рельсам течет ток, создающий магнитное поле. Оно действует на проводник с током (якорь) и ускоряет его. Протекающий полный ток считается известным. Рассматривается случай произвольных форм границ якоря по  $y$ . Для определенности в дальнейшем будет братья прямая передняя сторона и произвольная задняя. Одна из проблем в создании таких ускорителей — обеспечение надежного электрического контакта направляющего рельса и проводящего тела. Это критическое место и представляет главный интерес с точки зрения математического моделирования. Проводники здесь образуют угол величиной больше  $\pi$ , в который диффундирует магнитное поле.

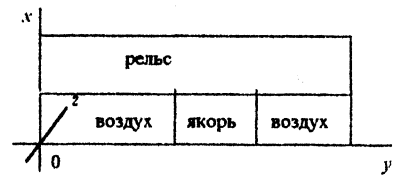


Рис. 1

Указанная задача относится к классу задач математической физики, решение которых содержит особенность, а также нелинейных задач с фазовыми переходами. Это определяет сложность их аккуратного решения и их важность для исследования. Особенности решения задачи связаны с различием материалов, используемых в ускорителе, что приводит к разрыву компонент электромагнитного поля, разрывом скорости движения на границе рельс-якорь, а также фазовыми превращениями веществ в местах больших плотностей тока. Есть еще две группы причин, вызывающих появление особенностей: геометрия области (наличие тупых углов в ней), а также сверхвысокие скорости движения, приводящие к появлению скоростного скин-слоя, также сильно влияющего на характер решения.

В мировой литературе имеется много работ, посвященных исследованию решений эллиптических уравнений в областях с негладкими границами (см. [3—6 и др.]). В этих работах показано, что в углу, например в  $1,5\pi$  (т.е. якоря прямоугольной формы), решение имеет особенность вида  $r^{2/3}$ , что приводит к обращению в бесконечность первых и последующих производных при  $r = 0$ . Решение уравнения диффузии в такой области имеет ту же особенность [6]. Иначе дело обстоит с особенностью, вызванной разрывом скорости движения. Существует множество работ с описанием скоростного скин-слоя [7—9 и др.], однако проведенный в них анализ не является строгим и общим.

Опишем кратко возможные численные алгоритмы для решения подобных задач: а) введение в углу сетки в координатах  $(r, \varphi)$ , согласованной с решением и позволяющей передать его особенность [5]; б) построение разностной схемы, явным образом учитывающей имеющуюся особенность и являющейся точной на решениях такого класса [6]; в) выбор конечных элементов, учитывающих особенность [10]; г) построение схем повышенного порядка точности,

использующих монотонизаторы, искусственную дисперсию и т. п., в том числе TVD-подход к построению схем для уравнений газовой динамики [11 — 13 и др.].

Примем за основу при построении алгоритма метод конечных элементов (МКЭ) [10, 14]. Разработанный в настоящей работе алгоритм имеет сходство с подходами, указанными выше в пп. а) и г).

В качестве базиса в построенной конечноэлементной модели выбраны простейшие конечные элементы на треугольниках. Полученная схема описывает энергетические соотношения так же, как и исходная дифференциальная задача. Проведена монотонизация схемы с помощью различных добавочных слагаемых. Построена нелинейная схема, позволяющая ограничить искусственную диффузию.

Созданный комплекс программ позволяет рассчитывать задачи произвольной геометрии, что дает возможность исследовать влияние различных геометрических характеристик на поведение решения, в том числе закруглений, углов и т. п. В результате получен инструмент для изучения явлений фазового перехода в области металлического контакта.

### § 1. Математическая модель процесса ускорения

Модель состоит из системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении для двух компонент электрического поля (в продольном направлении) и одной компоненты магнитного поля (в поперечном) [15, 16], уравнений для температуры и движения ускоряемого тела:

$$\begin{aligned} D\mathbf{H}/Dt - (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{H} = \text{rot}([\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}] - \mathbf{E}), \quad \text{rot}\mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{H} = 0, \\ \rho D\varepsilon/Dt + \rho(\mathbf{w}, \nabla)\varepsilon = (\mathbf{j}\mathbf{E}) + \text{div}(\kappa\text{grad}T) + Q_{tr}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и далее  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  и  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  — напряженности электрического и магнитного полей соответственно ( $\mathbf{E}$  в системе координат, в которой вещество покоится),  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $I(t)$  — заданный ток,  $\sigma$  — электропроводность,  $\mathbf{u} = (0, u, 0)$  — скорость движения вещества,  $\mathbf{v} = (0, v_x, 0)$  — скорость движения якоря,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $t$  — время,  $T$  — температура,  $l_z$  — толщина ускорителя по  $z$ ,  $\rho$  — плотность,  $c_v$  — удельная теплоемкость,  $\varepsilon = \int c_v dT$  — удельная внутренняя энергия,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $Q_{tr}$  — мощность тепловыделения за счет трения, сосредоточенная на контактных поверхностях. При описании плавления и кипения также будем использовать (1.1), считая  $\varepsilon$  разрывной функцией  $T$ , испытывающей скачки величиной в удельную теплоту плавления или кипения при температуре плавления или кипения соответственно (см. [17, 18]). Система (1.1) записана в безразмерном виде, в ней  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ,  $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}, \nabla)$ .

В межрельсовом пространстве позади якоря магнитное поле в силу двумерности (в декартовых переменных) задачи постоянно и определяется только протекающим током

$$H = H_0 = (4\pi/l_z)I(t). \quad (1.2)$$

На плоскости симметрии должны быть выполнены условия

$$\mathbf{E}_\tau|_{x=0} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь и далее индексы  $n$  и  $\tau$  указывают на нормальную или тангенциальную (по отношению к границе) компоненту.

Будем рассматривать не весь рельсотрон, а лишь его часть  $G$  с границей  $\partial G$ , жестко связанную с якорем и перемещающуюся вместе с ним по направлению  $y$  со скоростью якоря. Длина этой области  $l_y$  по  $y$  является фиксированной. Считаем, что на торце области  $y = 0$ , проходящей по рельсу, задано условие

$$\mathbf{E}_\tau|_{y=0} = 0, \quad (1.4)$$

т. е. отсутствие токов, текущих поперек рельса. В соответствии с пространственной двумерностью задачи имеем на оставшейся части  $\partial G$  условие

$$\mathbf{H}_r = H = 0. \quad (1.5)$$

В отличие от трехмерного случая [2, с. 72] здесь можно решать задачу в терминах  $\mathbf{H}$  и в одной проводящей подобласти  $G$ . Уравнение для  $\mathbf{H}$  имеет вид

$$D\mathbf{H}/Dt - v\partial\mathbf{H}/\partial y = -\partial(u\mathbf{H})/\partial y + \operatorname{div}((1/(4\pi\sigma))\operatorname{grad}\mathbf{H}). \quad (1.6)$$

В результате имеем задачу: требуется найти поля  $\mathbf{H}$ ,  $T$ ,  $\mathbf{E}$ , описываемые системой уравнений (1.1), (1.6) в области  $G$  при  $t > 0$ , удовлетворяющих условиям (1.5) при  $y = l_y$ ,  $x = l_x$ , межэлектродных границах рельса и якоря впереди якоря, (1.3) на оси симметрии, (1.4) при  $y = 0$  и  $H$  из (1.2) на границах межрельсового пространства позади якоря, условию  $\varepsilon|_{y=l_y} = \varepsilon_0$  и нулевому тепловому потоку на остальных границах  $G$ . В начальный момент времени  $\mathbf{H}|_{t=0} = 0$ ,  $\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_0 = \varepsilon(T_0)$ . В задаче учитывается зависимость  $\sigma$  от  $T$ . Аналогично и скорость движения также является непостоянной величиной. Она определяется уравнением движения якоря.

Некоторые опущенные подробности физической и математической моделей рассматриваемого явления приведены в [19].

## § 2. Конечноэлементная модель

Для применения МКЭ [10, 14] разобьем область  $G$  на  $N_t$  треугольников  $N_t$  точками. Пример такого треугольника показан на рис. 2. Будем использовать только остроугольные треугольники. Соединим центры описанных окружностей соседних треугольников либо, если это граничный треугольник, опустим перпендикуляр на соответствующую сторону. Получим тем самым так называемые ячейки Дирихле в количестве  $N_t$  штук. На рис. 2 штрихами показаны грани таких ячеек Дирихле. Ячейки Дирихле могут быть и невыпуклыми, если их центры лежат на границе.

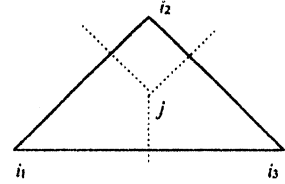


Рис. 2

Рассмотрим два простейших семейства конечных элементов (первого и нулевого порядка [10, 14]):

$$\varphi_{i_1}(x, y) = \begin{cases} a_{i_1j}x + b_{i_1j}y + c_{i_1j} & \text{при } \mathbf{r} \in \omega_j \in \Omega_{i_1}, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega_{i_1}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega_j$  — треугольник номера  $j$ ,  $\Omega_{i_1}$  — множество треугольников, имеющих точку  $i_1$  своей вершиной. При этом  $a_{i_1j}x_k + b_{i_1j}y_k + c_{i_1j} = \delta_{i_1k}$ ,  $k = i_1, i_2, i_3$ , т. е. (2.1) есть плоскость в пределах  $\omega_j$ , проходящая через единицу в точке  $i_1$  и нуль в других вершинах ( $\delta_{ik}$  — символ Кронекера).

Второе семейство есть семейство характеристических функций ячеек Дирихле:

$$\psi_{i_1}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{r} \in W_{i_1}, \\ 0 & \text{при } \mathbf{r} \notin W_{i_1}, \end{cases}$$

где  $W_{i_1}$  — ячейка Дирихле, имеющая точку  $i_1$  своим центром.

Далее введем два вида интерполяции сеточной функции  $P$  (в дальнейшем  $P = H, T$ ):

$$P^{I1}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_t} P_i \varphi_i(\mathbf{r}), \quad P^{I2}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_t} P_i \psi_i(\mathbf{r}).$$

В первом случае на данном треугольнике  $P^{I1}$  зависит от значений  $P_i$  во всех трех вершинах, а во втором — кусочно-постоянно в соответствии с разбиением треугольника на ячейки Дирихле.

Запишем решаемую в терминах  $H, T$  задачу в виде

$$L^H H = L_1^H H + L_2^H H = F^H, \quad L^T T = L_1^T T + L_2^T T = F^T.$$

При этом на самом деле и в первом уравнении участвует  $T$  (через  $\sigma$  и неявно  $u, v$ ), а во втором —  $H$  (через джоулево тепло и неявно  $u, v$ ). Они опущены для сокращения записи. Операторы  $L_1$  выделяют члены с производной по времени, а  $L_2$  — остаток.

Получим систему ОДУ для амплитуд конечных элементов следующим образом:

$$(L_1^H H^{I2}, \psi_i) + (L_2^H H^{I1}, \varphi_i) = (F^H, \varphi_i), \quad (L_1^T T^{I2}, \psi_i) + (L_2^T T^{I1}, \psi_i) = (F^T, \psi_i). \quad (2.2)$$

Видно, что пространственная часть первого уравнения дискретизируется по алгоритму Галеркина через интерполяцию  $I1$ , временная —  $I2$ , а пространственная часть второго уравнения — через алгоритм Галеркина — Петрова и интерполяцию  $I1$  (см. [10]).

Выбор (2.2) диктуется необходимостью обеспечить выполнение закона сохранения энергии и в дискретном случае, что весьма важно при численном моделировании процессов, связанных с переходами энергии из одной формы в другую (здесь энергии электромагнитного поля в тепловую или кинетическую и наоборот) [15]. Видно, что при умножении (2.2) на  $H_i$  и суммировании по всем треугольникам будет получено в точности энергетическое тождество для электромагнитной энергии [15, 20]. А второе уравнение (2.2) является аналогичным выражением для внутренней энергии уже само по себе.

При дискретизации по времени, т.е. введении временных слоев с шагом  $\tau$ , выбор весов достаточно очевиден. При этом в пространственной части уравнения для  $H$  из (2.2) нужно брать временной вес 0,5. Во втором уравнении будем брать  $T$  в пространственной части чисто неявным образом. Согласование мощности джоулева нагрева с первым уравнением (2.2) проводится аналогично [20]. Часть  $Q_{tr}$ , связанная с трением контактных поверхностей, вычисляется через  $v^{(0,5)}$  так, чтобы обеспечить верный обмен между кинетической энергией ускоряемого тела и тепловой энергией системы.

При вычислении различных параметров, используемых при численном моделировании, будем применять интерполяцию  $I1$  в  $T$  для лучшего учета изменения параметров при фазовых превращениях и учета их зависимости от  $T$ .

Для расчета фазовых превращений используем однородный метод из [17, 18], при котором  $c_v$  представляется в виде гладкой функции с  $\delta$ -образной особенностью. В результате получена полностью консервативная конечноэлементная схема для численного моделирования процесса электродинамического разгона проводящих макротел с учетом фазовых превращений.

### § 3. Построение квазимоноотонной схемы

**1. Введение искусственной диффузии.** Уже первые расчеты показали немоноотонность по пространству решения схемы (2.2). Это связано с используемой в (2.2) аппроксимацией производной по пространству типа центральной разности. Известно [17], что подобные схемы, вообще говоря, немоноотонны.

Исправим этот недостаток, добавив в правую часть первого уравнения (2.2) искусственную диффузию магнитного поля с коэффициентом  $|w|d_H$ . Будем считать величину  $d_H$  постоянной на каждом треугольнике. Аналогично [11, 12] будем называть квазимоноотонной схему, для которой выполнен принцип максимума.

Рассмотрим один треугольник на рис. 2. Опустим индексы, тогда в схеме (2.2) будут выполнены условия [17] на знаки коэффициентов разностной схемы (суммарно у конвективного члена и члена со введенной диффузией), при которых справедлив принцип максимума для решения схемы, в случае

$$d_H(a_1^2 + b_1^2) - (1/3)b_1 \geq 0, \quad (1/3)b_\alpha - d_H(a_1 a_\alpha + b_1 b_\alpha) \geq 0, \quad \alpha = 2, 3. \quad (3.1)$$

Здесь коэффициенты  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) из (2.1). Неравенства (3.1) возникают при рассмотрении уравнения для точки 1. Аналогичные выражения появляются для точек 2 и 3 (они могут быть получены из (3.1) циклической перестановкой индексов 1, 2, 3). Итого имеем девять неравенств, которым должна удовлетворять величина  $d_H$ . Выберем ее минимально возможной.

Задача решения такой системы линейных неравенств есть задача линейного программирования [21]. В данном случае из-за сравнительно малой размерности системы задачу можно решить простым перебором угловых точек (см. [21]), что в дальнейшем и реализовано программным образом. При этом получено  $\max d_H = O(h)$ , где  $h$  — характерный размер стороны

сеточного треугольника. В принципе уменьшение  $d_H$  возможно, если учесть член диффузионного типа в (2.2), связанный с электропроводностью, что потребует пересчета  $d_H$  на всех временных слоях, а алгоритм (3.1) позволяет этого избежать.

Отметим, что для данных конечных элементов выполнено тождество

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 0. \quad (3.2)$$

Поэтому заведомо разность диагонального (первого в (3.1)) и внедиагональных коэффициентов (3.1) схемы равна нулю. Тем самым одно из условий применимости принципа максимума выполнено априори.

Совершенно аналогичная проблема возникает и в уравнении для  $T$ . Поступим так же, как и с уравнением для  $H$ , добавив в правую часть член  $\text{div}(|w|\rho_v d_T \text{grad} T)$ . Тогда для одной из частей ячейки Дирихле, прилегающей к точке 1 в рассматриваемом треугольнике (рис. 2), имеем условия

$$-d_T \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} l_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_3} l_3 \right)_1 - b_1 S_1 \geq 0, \quad b_\alpha S_1 + d_T \left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial n_1} l_1 + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial n_3} l_3 \right)_1 \geq 0, \quad \alpha = 2, 3. \quad (3.3)$$

Здесь  $S_1$  — площадь части рассматриваемой ячейки Дирихле в данном треугольнике,  $n_1$  и  $n_2$  — внешние нормали к ее граням в треугольнике,  $l_1$  и  $l_3$  — длины этих граней. Отличие (3.3) от (3.1) вызвано различием способов получения конечноэлементной схемы для уравнений (см. (2.2)). Аналогично уравнению для  $H$  к (3.3) необходимо добавить еще две тройки неравенств для частей ячеек Дирихле, прилегающих к точкам 2 и 3. Ищем минимально возможное  $d_T$  тем же методом, что и  $d_H$ . Оно также получается величиной  $O(h)$ .

Отметим, что возможны ситуации, при которых (3.1) или (3.3) не имеют решения. Это определяется только сеткой. Например, в случае прямоугольного треугольника, изображенного на рис. 3, имеем  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_3 < 0$ . Отсюда получаем, что коэффициент при  $d_T$  в третьем неравенстве (3.3) равен нулю, в результате чего это неравенство не выполняется ни при каком  $d_T$ . Тем самым невозможность подобрать  $d_H$  или  $d_T$ , удовлетворяющих (3.1) и (3.3), влечет за собой необходимость перестройки сетки.

В проведенных расчетах сетка позволяла выполнить условия (3.1), (3.3), чего достаточно для получения монотонного по пространству решения. При этом возможна еще немонотонность при больших  $\tau$ , вызванная выбором веса 0,5 у  $H$  в первом уравнении (2.2). Она устраняется уменьшением  $\tau$  до величины в несколько курантовских временных шагов.

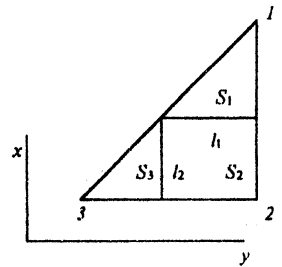


Рис. 3

**2. Консервативность схемы с дополнительными членами.** Введение в уравнение для  $H$  дополнительного слагаемого  $R$  влечет за собой изменения в энергетических соотношениях. Оказывается, что наиболее просто учесть их можно следующим образом:

$$DH/Dt - (v, \nabla)H = \text{rot}([u \cdot H] - (1/(4\pi\sigma))\text{rot} H - R) = \text{rot}([u \cdot H] - E),$$

$$E = (1/(4\pi\sigma))\text{rot} H + R, \quad \text{rot} H = 4\pi\sigma(E - R) = 4\pi j. \quad (3.4)$$

Тем самым введение  $R$  сказывается только на изменении закона Ома. Если во всех энергетических выражениях использовать  $j$ , определяемое (3.4), то больше ничего уже не изменяется. Во всех вариантах введения дополнительных членов такие видоизменения  $j$  были проделаны.

При введении искусственной диффузии все это приводит к тому, что получается схема, в точности совпадающая с (2.2), но с  $\tilde{\sigma} = \sigma/(1 + 4\pi\sigma|w|d_H)$ . Отсюда следуют ограничения на шаг сетки, на которой введенная искусственная диффузия не вносит сильных искажений в решение задачи  $4\pi\sigma|w|d_H = O(1)$ . Тогда получаем, что

$$h = O(1/(4\pi\sigma|w|)) = O(h_0). \quad (3.5)$$

Для рассматриваемых задач характерными величинами являются:  $\sigma \cong 40$ ,  $|w| \cong 10$ , откуда  $h_0 \cong 2 \cdot 10^{-4}$ .

В то же время выбор  $h$  из условия (3.5) позволяет добиться монотонного решения в  $H$  за счет исходной магнитной диффузии, что легко видно из схемы (2.2). Тем самым для сетки с  $h$  из (3.5) вводить искусственную диффузию бессмысленно. В наших расчетах используется  $h \cong 10^{-3} - 10^{-2}$ , для которых введение  $d_H$ ,  $d_T$  играет существенную роль.

Отметим, что благодаря тождеству (2.2) (и равенству единице суммы конечных элементов на  $\omega_j$ ) в схеме выполнены условия консервативности в уравнении для  $H$ , несмотря на недивергентную форму первого уравнения (2.2). Тем самым в схеме выполнен аналог закона Фарадея.

**3. Ограничение диффузии.** Из п.2 следует, что введение  $d_H$ ,  $d_T$  с реальными  $h$  приводит к значительному "размазыванию" решения, т.е. к его искажению по сравнению с точным. При этом порядок сходимости схемы понижается за счет добавления в уравнение, каждый член которого имеет аппроксимацию  $O(h^2)$ , дополнительного слагаемого величиной  $O(h)$ . Поэтому желательно изменить способ монотонизации схемы (2.2).

Согласно результатам работы [13], лучшим в классе линейных схем является добавление членов с третьей пространственной производной. В данном случае, например, можно взять  $\mathbf{R} = d_H(\mathbf{w}, \nabla) \text{rot} \mathbf{H}$ . Однако это требует очень существенного усложнения алгоритма решения задачи. Так, обойтись рассмотрением треугольника с линейным базисом уже невозможно: на нем  $\mathbf{R} \equiv 0$ . Необходимо расширять шаблон, что тут же скажется на неравенствах вида (3.1), (3.3) и т.д.

Попытки [19] добиться монотонности решения данной задачи введением члена с временной производной не дали результата. Поэтому рассмотрим класс нелинейных схем, в которых диффузия зависит от решения. Аналогичный подход используется в [11, 12], но способы ограничения диффузии различны.

Введем дополнительное слагаемое  $\mathbf{R} = d_H^* |w| \text{rot} \mathbf{H}$ , где  $d_H^* = d_H(1 - \gamma)$ . При этом  $d_H$  удовлетворяет условиям (3.1). Учитывая отрицательный знак  $w$  и опуская положительные сомножители, получим для данного треугольника и точки 1 сумму конвективного и диффузионного (искусственного) членов

$$K_1 = d_H^* \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha (a_1 a_\alpha + b_1 b_\alpha) - \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha b_\alpha. \quad (3.6)$$

Пусть  $K_1^0 = K_{1d}^0 - K_{1k}^0$ , где  $K_{1d}^0 = d_H \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha (a_1 a_\alpha + b_1 b_\alpha)$ ,  $K_{1k}^0 = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha b_\alpha$ . Обозначим  $R_1 = K_{1d}^0 / K_{1k}^0$ . Тогда получим

$$K_1 = K_{1k}^0 (1 - \gamma R_1). \quad (3.7)$$

При  $\gamma = 0$  имеем схему с искусственной диффузией из п.1, при  $\gamma = 1$  искусственная диффузия отсутствует. Из (3.7) следует, что условия принципа максимума будут выполнены при  $(1 - \gamma R_1) > 0$ . Из соображений устойчивости схемы и минимума искусственной диффузии следует условие  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Видно также, что при  $K_{1k}^0 = 0$  необходимо брать  $\gamma = 0$ . Выберем максимальное  $\gamma$ , удовлетворяющее приведенным условиям:

$$\gamma = \gamma(R_1, K_{1k}^0) = \begin{cases} 0 & \text{при } K_{1k}^0 = 0, \\ 1/R_1 & \text{при } R_1 \geq 1, \\ 1 & \text{при } R_1 < 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Функция (3.8) определяется однозначным образом. Из выражения для  $R_1$  видно, что ограничение диффузии происходит на решении, имеющем специальный профиль, в зависимости от соотношения средней производной в направлении  $y$  со вкладом диффузионных членов. Пусть, например,  $K_{1k}^0 \neq 0$ . Тогда в худшем случае

$$\gamma = 1/R_1 = 1 - K_{1k}^0 / K_{1d}^0 = 1 - (\partial H^{I1} / \partial y, \varphi_1)_\omega / (d_H(\text{grad} H^{I1}, \text{grad} \varphi_1)_\omega)$$

для данного треугольника  $\omega$  и точки 1. Отсюда следует, что величина  $d_H^* = d_H(1 - \gamma)$  прямо пропорциональна члену с производной решения по  $y$ . Тем самым в подобластях, в которых

решение слабо зависит от  $y$ , происходит максимальное ограничение искусственной диффузии. Нечто аналогичное происходит и в алгоритме [11, 12].

Пока рассмотрели лишь точку 1. Необходимо учесть еще две другие и выбрать  $\gamma$  так, чтобы удовлетворить все девять неравенств. Это проще всего сделать, если взять  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ , где  $\gamma_1$  определяется по  $R_1, K_1^0$  из (3.8), а  $\gamma_2, \gamma_3$  определяются теми же выражениями по  $R_2, K_2^0$  и  $R_3, K_3^0$  соответственно. Тем самым решается задача ограничения искусственной диффузии.

Исследуем случай “вырождения”, при котором нельзя ограничить диффузию. Это происходит, если для любых значений  $H_\alpha$  для одного из  $i = 1, 2, 3$  выполнено  $K_i^0 \equiv 0$ . Пусть для определенности  $i = 1$ , т.е. выполнено условие  $b_1/(a_1 a_1 + b_1 b_1) = b_2/(a_1 a_2 + b_1 b_2) = b_3/(a_1 a_3 + b_1 b_3)$  — система трех уравнений. Легко видеть, что вследствие тождеств (3.2) из выполнения одного уравнения вытекают два других. Рассмотрим поэтому, например, лишь первое. Оно выполнено либо при  $a_1 = 0$ , либо при  $a_2 b_1 = a_1 b_2$ . Последнее справедливо в случае нулевой площади треугольника. Очевидно, что рассмотрение вариантов “вырождения” в двух оставшихся вершинах треугольника дает аналогичные результаты.

В результате из получения в описанном алгоритме ограничения искусственной диффузии  $\gamma \equiv 0 \forall H_\alpha$  следует условие

$$a_1 a_2 a_3 = 0. \quad (3.9)$$

Вариант нулевой площади исключается, так как на практике он не реализуется. Таким образом, (3.9) есть необходимое условие “вырождения”.

Условие (3.9) выполняется для некоторых треугольников (см. пример на рис. 3). Также (3.9) выполнено (точнее, эти члены просто отсутствуют в (3.6)) при введении одномерной диффузии, действующей только в направлении  $y$ . Тем самым описанный алгоритм является принципиально двумерным и не имеет одномерного аналога. Весь алгоритм ограничения диффузии в  $H$ , приведенный выше, с очевидными изменениями переносится на уравнение для  $T$ .

Отметим также, что реализация алгоритма для случая конечных элементов другого вида происходит аналогичным образом. При решении задачи с конвективным переносом по  $x$  необходимо проделать те же действия с точностью до обозначений. При наличии переноса по  $x$  и  $y$  результирующая схема будет объединением схем, предназначенных для описания переноса по одному из направлений (но каждая из них не является одномерной).

**4. Одномерный случай.** Укажем, что описанные выше действия можно проделать в одномерном случае, например, для уравнения переноса. При этом схема (2.2) есть в точности схема с центральной разностью. Алгоритм введения искусственной диффузии дает в точности схему с направленными разностями. Это соответствует “вырожденному случаю”. С помощью описанного алгоритма ограничить далее диффузию не удастся.

#### § 4. Примеры расчетов

Описанный алгоритм реализован в виде программ для персональной ЭВМ. При этом обращение матрицы осуществляется методами [22]. Перед счетом по времени программа рассчитывает коэффициенты искусственной диффузии. Например, в типичном варианте с  $h = 10^{-2}$  (здесь  $N_t = 1496, N_r = 2772$ ) получено  $\max d_H = 1,38 \cdot 10^{-2}, \max d_T = 1,28 \cdot 10^{-2}$ .

Приведем некоторые данные расчетов процесса ускорения с использованием указанных схем. Пусть схема 0 — схема (2.2) без дополнительных членов, 1 — схема с искусственной диффузией, 2 — схема с ограничением диффузии (нелинейная).

На рис. 4 показаны линии уровня напряженности магнитного поля  $H$ , рассчитанного по схемам 2, 0, 1 (сверху вниз) на практически один момент времени. Видна значительная немонотонность  $H$  в схеме 0, сосредоточенная вблизи стыка якоря с рельсом в направлении под углом  $45^\circ$ . Видно, что схемы 2 и 1 дают монотонное решение, однако 1 значительно “размазывает” решение задачи. Схема 2 дает полосу проникновения поля в рельс практически той же ширины, что и 0. В данных расчетах  $v_{x,0} = 10^{-3}, T_0 = 1,45$ . Максимальная температура величиной 6,0 достигалась в следующие моменты в расчетах по схемам: 0 — ( $t = 0,312, v_x = 7,656$ ); 1 — ( $t = 0,445, v_x = 13,31$ ); 2 — ( $t = 0,439, v_x = 13,08$ ). Отсюда следует, что плотность

тока вблизи угла, рассчитанная по схемам 1 и 2, практически одинакова. Тем самым для задач расчета момента перехода электрического контакта движущихся проводников, происходящего при плавлении и испарении якоря, схемы 0 и 2 являются эквивалентными. Этот вывод важен еще и потому, что из-за нелинейности счет по схеме 2 приходится вести с шагом по времени  $\tau$  на порядок меньшим, чем по схеме 1.

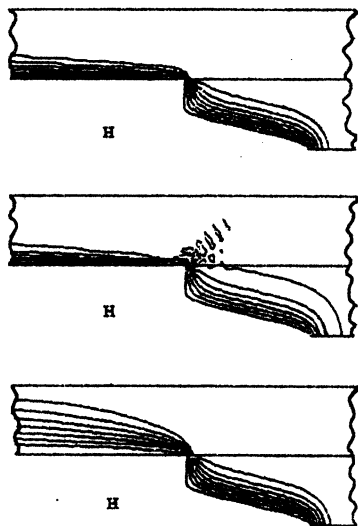


Рис. 4

Напомним, что в двумерном случае линии уровня  $H$  являются линиями тока. Тем самым немонотонность решения на фронте создает дополнительные вихревые токи, ведущие к энерговыделению. Представляется, что (помимо близости к острию) именно они ответственны за разницу в достижении нужной температуры, демонстрируемую схемой 0 по сравнению с остальными.

Автор благодарен Ю. П. Попову за интерес к работе и поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93 — 01 — 00634).

### Литература

1. Лебедев А. Д., Урюков И. А. Импульсные ускорители плазмы высокого давления. Новосибирск, 1990.
2. Матер. II Всесоюз. сем. по динамике сильноточного дугового разряда в магнитном поле / Под ред. В. Е. Накорякова. Новосибирск, 1992.
3. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М., 1991.
4. Волков Е. А. // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 77. С. 89 — 112.
5. Волков Е. А. // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 140. С. 68 — 102.
6. Фрязинов И. В. Разностные схемы для уравнения Пуассона и уравнения теплопроводности в многоугольнике при различных типах краевых условий на различных частях границы. М., 1977. (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР : 25).
7. Long G. C., Weldon W. F. // IEEE Transactions on Magnetics. 1989. Vol. MAG-25, N1. P. 347 — 352.
8. Nearing J. C., Huerta M. A. // IEEE Transactions on Magnetics. 1989. Vol. MAG-25, N1. P. 381 — 386.
9. Barber J. P., Challita A. // IEEE Transactions on Magnetics. 1993. Vol. MAG-29, N1. P. 733 — 738.
10. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
11. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Квази монотонные разностные схемы повышенного порядка точности. М., 1987. (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР: 36).
12. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 5. С. 95 — 120.
13. Ермаков С. В., Мажорова О. С., Попов Ю. П. Построение разностных схем для параболических уравнений с малым параметром при старшей производной. М., 1990. (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР : 89).
14. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М., 1986.
15. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 1980.
16. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.; Л., 1948.
17. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1978.
18. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816 — 827.
19. Галанин М. П. Задача о скоростном скин-слое и квази монотонная конечноэлементная схема для ее численного решения. М., 1995. (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН : 21).
20. Галанин М. П., Попов Ю. П., Чублукова Ю. Н. Полностью консервативная разностная схема в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для моделирования электродинамического ускорения проводящих тел. М., 1992. (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН : 32).
21. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988.
22. Гончаров А. Л. Комплекс программ решения разреженных систем алгебраических уравнений. М., 1987. (Отчет / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР).