Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

L. N. Chibrikova, Certain piecewise holomorphic functions with a countable set of singular contours,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1974, Number 5, 198–204

https://www.mathnet.ru/eng/ivm6598

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.84
January 19, 2026, 11:57:13

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 5 (144)

УДК 517.544

Л. И. Чибрикова

О НЕКОТОРЫХ КУСОЧНО-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ОСОБЫХ КОНТУРОВ

К семидесятилетию
Александра Петровича Нордена

Пусть элементами множества $L=\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются точки простых гладких замкнутых контуров L_k, расположенных на комплексной плоскости z вне друг друга, и $\mathfrak{K}$ есть его замкнутое производное ограниченное множество. Будем считать контуры L_k пронумерованными в порядке невозрастания их расстояний до множества $\mathfrak{K}$, так что, если $r_k=\rho(L_k, \mathfrak{K})$, то $r_k \geqslant r_{k+1}$. Кроме того, считаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k=0$, если $R_k=r_k+\delta_k$, где δ_k — диаметр области, лежащей внутри L_k.

Будем говорить, что $\Phi(z)$ есть *кусочно-голоморфная функция со счетным множеством линий скачков* L_k, если на любом связном множестве, не содержащем точек множеств L и $\mathfrak{K}$, она является аналитической, а при стремлении z к $t\in L_k$ слева и справа по отношению к положительному направлению на L_k она имеет граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ непрерывные всюду, кроме конечного числа точек, в которых допускается обращение в бесконечность интегрируемого порядка. Если $\Phi(z)$ имеет еще полюсы в точках некоторого множества $\{a_j\}$, не пересекающегося с L и $\mathfrak{K}$, но с предельными точками только из $\mathfrak{K}$, то $\Phi(z)$ будем называть *кусочно-мероморфной*.

Нас будет интересовать структура кусочно-голоморфных функций $\Phi(z)$, удовлетворяющих на множестве L соотношениям

$$\Phi^+(t)=G_k(t)\Phi^-(t)+g_k(t),\ t\in L_k,\ k=1,\ 2,\dots, \tag{1}$$

где $G_k(t)$ и $g_k(t)$ — заданные на L_k функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, при этом $G_k(t)\neq 0$ всюду на L_k. Такие функции называют обычно *решениями граничной задачи Римана*. В работах [1] — [5] задача Римана рассматривалась в случае конечного множества $\mathfrak{K}$. Здесь некоторые результаты этих работ будут распространены на случай бесконечного $\mathfrak{K}$.

§ 1. Построение кусочно-голоморфной функции по заданным скачкам

Будем рассматривать кусочно-голомофные функции, удовлетворяющие условиям

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g_k(t),\ t\in L_k,\ k=1,\ 2,\dots \tag{2}$$

Одну из таких функций можно построить следующим образом.

Обозначим через α_k точку множества $\mathfrak{R}$, ближайшую к контуру L_k (или одну из таких точек), и пусть d — некоторое положительное число, удовлетворяющее условию $d > R_k$. Тогда интеграл типа Коши

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{3}$$

в области $|z - \alpha_k| \geqslant d$ будет аналитической функцией, представимой рядом Лорана

$$F_k(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha_k)^{-(j+1)}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau)(\tau - \alpha_k)^j d\tau. \tag{4}$$

Если задать некоторое число $\varepsilon_k > 0$, то в силу сходимости ряда (4) всегда можно взять такой его отрезок $f_k(z)$ из n_k членов, чтобы разность

$$F_k(z) - f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau) \left\{ \frac{1}{\tau - z} + \sum_{j=1}^{n_k - 1} \frac{(\tau - \alpha_k)^j}{(z - \alpha_k)^{j+1}} \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau - \alpha_k}{z - \alpha_k} \right)^{n_k} d\tau \tag{5}$$

удовлетворяла условию

$$|F_k(z) - f_k(z)| < \varepsilon_k. \tag{6}$$

Если теперь взять сходящийся ряд положительных чисел $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$, то в силу условий (6) функциональный ряд

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \{F_k(z) - f_k(z)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau - \alpha_k}{z - \alpha_k} \right)^{n_k} d\tau \tag{7}$$

сходится абсолютно и равномерно для всех z, удовлетворяющих условиям $|z - \alpha_k| \geqslant d$ $(k = 1, 2, \ldots)$, если отбросить в нем конечное число членов с теми номерами k, для которых $|\tau - \alpha_k| \geqslant d$, $\tau \in L_k$. Эти контуры L_k для суммы ряда (7) являются, очевидно, линиями скачков, вблизи которых

$$F(z) = F_k(z) + \Omega(z), \tag{8}$$

где $\Omega(z)$ голоморфна вблизи L_k и на L_k и потому

$$F^+(t) - F^-(t) = F_k^+(t) - F_k^-(t) = g_k(t), \quad t \in L_k. \tag{9}$$

Значит, сумма ряда (7) есть одно из кусочно-голоморфных решений задачи (2).

Множество $\mathfrak{R}$ для функции $F(z)$ будет, конечно, особым и наиболее естественным является изучение роста $F(z)$ в зависимости от расстояния $d = \rho(z, \mathfrak{R})$. Следуя В. В. Голубеву ([6], с. 200), будем называть множество $\mathfrak{R}$ *полярным особым множеством для* $F(z)$ или *существенно особым множеством конечного порядка*, если, начиная с достаточно малого d,

$$|F(z)| < Md^{-m} \text{ или } |F(z)| < \exp(Md^{-m}), \tag{10}$$

где M и m — постоянные числа, не зависящие от z. Если ни одно из условий (10) не выполняется, то $\mathfrak{R}$ будем называть *существенно особым множеством бесконечного порядка*.

Оценим общий член ряда (7) по модулю. На основании представления (5) имеем

$$|F_k(z)-f_k(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}\left|\frac{\tau-\alpha_k}{z-\alpha_k}\right|^{n_k}\frac{|g_k(\tau)\,d\tau|}{|\tau-z|}.$$

Здесь при $k\to\infty$ величина

$$\left|\frac{\tau-\alpha_k}{z-\alpha_k}\right|\leqslant\frac{R_k}{d}$$

стремится к нулю. Поэтому можно указать такой номер k_0, начиная с которого

$$\left|1-\frac{\tau-\alpha_k}{z-\alpha_k}\right|\geqslant\frac{1}{2},\quad |\tau-z|\geqslant\frac{1}{2}|z-\alpha_k|\geqslant\frac{1}{2}d,$$

так что

$$|F_k(z)-f_k(z)|\leqslant 2A_kR_k^{n_k}d^{-(n_k+1)},\quad k\geqslant k_0, \tag{11}$$

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}|g_k(\tau)\,d\tau|.$$

Из оценок (11) вытекает

Теорема 1. *Если целые числа $n_k\geqslant 0$ подобраны так, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_kR_k^{n_k}d^{-(n_k+1)}<\infty, \tag{12}$$

то ряд (7) *абсолютно и равномерно сходится для всех z, удовлетворяющих условию $\rho(z,\mathfrak{K})\geqslant d$ (после отбрасывания определенного конечного числа членов).*

В условиях этой теоремы имеем

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}|F_k(z)-f_k(z)|\leqslant 2\sum_{k=k_0}^{\infty}A_kR_k^{n_k}d^{-(n_k+1)}. \tag{13}$$

Значит, для суммы ряда (7) $\mathfrak{K}$ является существенно особым множеством бесконечного порядка. Однако, если все $n_k=n\geqslant 0$, то из соотношения (13) находим

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}|F_k(z)-f_k(z)|\leqslant 2d^{-(n+1)}\sum_{k=k_0}^{\infty}A_kR_k^n,$$

так что для остатка ряда (7) множество $\mathfrak{K}$ является полярным. Что касается суммы первых k_0-1 членов этого ряда, то для z, не лежащих на $L_1,\ldots,L_{k_0-1}$ и отстоящих от этих контуров не менее чем на $\Delta>0$, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{k_0-1}\{F_k(z)-f_k(z)\}\right|\leqslant d^{-n}\Delta^{-1}\sum_{k=1}^{k_0-1}A_kR_k^n.$$

Значит, справедлива

Теорема 2. *Если $n\geqslant 0$ есть целое число, при котором*

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_kR_k^n<\infty, \tag{14}$$

то ряд (7) *при всех* $n_k = n$ *сходится абсолютно и равномерно для всех* z, *для которых* $\rho(z, \mathfrak{K}) \geqslant d > 0$ (*после отбрасывания соответствующего числа членов*). *При дополнительном условии* $\rho(z, L) \geqslant \Delta > 0$ *множество* $\mathfrak{K}$ *для суммы этого ряда* $F(z)$ *будет полярным:* $|F(z)| < Md^{-(n+1)}$.

Малость Δ можно сравнивать с малостью d. При $\Delta = \theta d^{\sigma}$, $0 < \sigma \leqslant 1$, $0 < \theta < 1$ для $F(z)$ остается справедливой та же оценка. Если же первые $k_0 - 1$ членов ряда (7) взять в виде интегралов (3), то эта оценка будет иметь место и при $0 < \sigma \leqslant n$.

Имея частное решение $F(z)$ задачи (2), можно легко построить и ее общее кусочно-голоморфное решение. Разность $P(z) = \Phi(z) - F(z)$ на основании (2) и (9) аналитически продолжима через все контуры L_k и ее особенностями могут быть только точки множества $\mathfrak{K}$. Значит, общее кусочно-голоморфное решение задачи (2)

$$\Phi(z) = P(z) + F(z) \tag{15}$$

определяется с точностью до целой функции $P(z)$ с особым множеством $\mathfrak{K}$. Очевидно, общее кусочно-мероморфное решение задачи (2) с полюсами в точках последовательности $\{a_j\}$ будет иметь тот же вид (15), где $P(z)$ — мероморфная функция с полюсами заданных порядков в точках a_j.

§ 2. О решениях задачи (2) с полярным особым множеством

Пусть $n \geqslant 0$ есть наименьшее целое число, при котором сходится ряд (14). Тогда по теореме 2 задача (2) имеет частное решение

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau - \alpha_k}{z - \alpha_k}\right)^n d\tau, \tag{16}$$

удовлетворяющее вблизи $\mathfrak{K}$ условию $|F(z)| < Md^{-(n+1)}$ для всех z, $\rho(z, L) \geqslant \Delta$, $\rho(z, \mathfrak{K}) \geqslant d$. Общее кусочно-голоморфное решение, удовлетворяющее условию

$$|\Phi(z)| < Nd^{-\nu}, \tag{17}$$

будет при $\nu \geqslant n + 1$ определяться формулой (15), если в ней $F(z)$ имеет вид (16), а функция $P(z)$, являясь голоморфной при всех $z \notin \mathfrak{K}$, удовлетворяет условию (17).

Если $\nu < n + 1$, то задача (2) не имеет решений, удовлетворяющих условию (17). Даже в частном случае, когда функции $g_k(t)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{L_k} g_k(\tau)(\tau - \alpha_k)^{n-j} d\tau = 0, \quad j = \overline{1, n - \nu + 1}; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

сумма ряда (16), в котором в силу условий (18) число n можно заменить на $\nu - 1$, будет частным решением задачи (2), не удовлетворяющим условиям (17). Итогом изложенного является

Теорема 3. *Если* n *есть наименьшее целое число, при котором сходится ряд* (14), *то при* $\nu \geqslant n + 1$ *задача* (2) *в классе кусочно-голоморфных функций, для которых* $\mathfrak{K}$ *является полярным множеством порядка* ν, *разрешима и имеет бесконечное множество*

решений. При $\nu < n+1$ *задача в указанном классе решений не имеет.*

Можно вести речь о решениях задачи (2), удовлетворяющих условию (17) на множестве точек z с иными свойствами, чем в теореме 2, например, на последовательности вложенных друг в друга замкнутых кривых Γ_q, охватывающих множество $\mathfrak{K}$. Определить вид таких функций при некоторых формах Γ_q удается при помощи рассуждений, близких к изложенным в работе [1] на с. 221—223. Условия существования таких решений можно получить аналогично тому, как мы установили теоремы 1 и 2.

§ 3. Однородная задача

Из всех кусочно-голоморфных функций, удовлетворяющих условиям (1) при $g_k(t) \equiv 0$, наиболее просто построить те, которые не имеют нулей ни в одной обыкновенной точке плоскости. Обозначим через $\varkappa_k$ индекс функции $G_k(t)$ на L_k и, выбрав определенные ветви $\ln G_k(t)$, будем считать, что при некоторых целых n_k сходится ряд вида (12)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k R_k^{n_k} d^{-n_k} < \infty, \quad \xi_k = \max\{B_k, |\varkappa_k|\}, \quad B_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} |\ln G_k(\tau)\, d\tau|. \tag{19}$$

Тогда одной из кусочно-голоморфных функций, удовлетворяющих условиям

$$\Gamma^+(t) - \Gamma^-(t) = \ln G_k(t), \quad t \in L_k, \tag{20}$$

будет сумма ряда

$$\Gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau - a_k}{z - a_k}\right)^{n_k} d\tau. \tag{21}$$

Вблизи любого контура L_k для $\Gamma(z)$ имеет место представление (8): $\Gamma(z) = \Gamma_k(z) + \Omega(z)$, где $\Gamma_k(z)$ есть интеграл типа Коши с плотностью $\ln G_k(t)$. Поэтому в окрестности точки t_k, принятой на L_k за начало обхода, функцию $\Gamma(z)$ можно представить в виде $\Gamma(z) = \varkappa_k \ln(z - t_k) + \Gamma_0(z)$, где кусочно-голоморфная функция $\Gamma_0(z)$ при $z \to t_k$ имеет вполне определенные конечные пределы. Отсюда следует, что функция $\exp \Gamma(z)$ является кусочно-мероморфной: при $\varkappa_k > 0$ в точках t_k она имеет нули, а при $\varkappa_k < 0$ — полюсы порядков $|\varkappa_k|$. На основании (20) $\exp \Gamma(z)$ удовлетворяет однородным условиям (1). Поэтому произведение $\psi(z) = \Phi(z) \exp\{-\Gamma(z)\}$, где $\Phi(z)$ — искомое кусочно-голоморфное решение однородной задачи без нулей, есть мероморфная функция, у которой множество нулей и полюсов $\{t_k\}$ имеет в качестве производного множество $\mathfrak{K}$. Логарифмическую производную $\psi(z)$ на основании аналога теоремы Миттаг-Леффлера можно представить в виде

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = Q(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_k}{z - t_k} \left(\frac{t_k - a_k}{z - a_k}\right)^{n_k}, \tag{22}$$

где $Q(z)$ — произвольная целая функция с особым множеством $\mathfrak{K}$, а числа n_k, обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость этого ряда на множестве $\rho(z, \mathfrak{K}) \geqslant d$, в силу условия (19) те же самые, что и в формуле (21). Ряд (22) можно проинтегрировать вдоль любого пути, не проходящего через точки множеств $\{t_k\}$ и $\mathfrak{K}$ и соединяющего фиксированную точку z_0 с произвольной точкой z. После элементарных вычислений таким путем найдем $\psi(z)$, а затем и общее кусочно-голоморфное решение однородной задачи без нулей:

$$\Phi(z) = \exp\{P(z) + \Gamma(z)\} \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{t_k - a_k}{z - a_k},\ n_k - 1\right); \tag{23}$$

здесь $P(z)$ — произвольная целая функция, а $E(u, q)$ — первичный множитель Вейерштрасса

$$E(u, q) = (1 - u)\exp\left\{\sum_{m=1}^{q} u^m/m\right\},\quad E(u, 0) = 1 - u.$$

Если в формуле (23) положить $P \equiv 0$, то получим частное кусочно-голоморфное решение

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{t_k - a_k}{z - a_k},\ n_k - 1\right), \tag{24}$$

которое будем называть *каноническим*. При помощи известных рассуждений можно показать, что любое кусочно-голоморфное решение однородной задачи выражается через каноническое по формуле

$$\Phi(z) = X(z)P(z), \tag{25}$$

где $P(z)$ — произвольная целая функция с особым множеством $\mathfrak{K}$.

В общем случае для любого решения однородной задачи множество $\mathfrak{K}$ будет существенно особым бесконечного порядка. Если же условие (19) заменить условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k R_k^n < \infty,\quad n > 0,$$

где n — наименьшее целое, при котором сходимость имеет место, то $\mathfrak{K}$ для канонической функции $X(z)$ будет существенно особым множеством конечного порядка (в формуле (24) в этом случае надо положить все $n_k = n$).

Задача отыскания всех решений однородной задачи, для которых $\mathfrak{K}$ должно быть существенно особым множеством заданного конечного порядка ν, на основании формулы (25) сводится к построению целой функции $P(z)$ с подобными же свойствами. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в книге В. В. Голубева [6] (с. 197—294).

При известной канонической функции $X(z)$ общая структура решений неоднородной задачи (1) определяется без труда и мы на этом не останавливаемся. Позднее мы построим изложенным методом решения задачи (1) в некоторых специальных классах кусочно-голоморфных функций и, в частности, в классе автоморфных функций, принадлежащих фуксовым группам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чибрикова Л. И., Салехова И. Г. Задача Римана в случае счетного множества контуров. Тр. семин. по краевым задачам. Изд. Казанск. ун-та, вып. 9, 1972, с. 216—233.

2. Чибрикова Л. И., Мкоян П. Х. Задача Римана для счетного множества контуров с двумя предельными точками, I. Изв. вузов, Матем., 1972, № 3, с. 90—102.

3. Чибрикова Л. И., Мкоян П. Х. Задача Римана для счетного множества контуров с двумя предельными точками, II. Изв. вузов, Матем., 1974, № 1, с. 113—125.

4. Мкоян П. Х. К задаче Римана для счетного множества контуров с несколькими точками сгущения. Сб. аспирантск. работ (точные науки: матем., мех.). Изд. Казанск. ун-та, 1973, с. 101—106.

5. Чибрикова Л. И. К решению задачи Римана в случае счетного множества контуров. Тр. семинара по краевым задачам. Изд. Казанск. ун-та, вып. 10, 1973, с. 171—175.

6. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М., Физматгиз, 1961.

г. Казань

Поступила
6 III 1974