В. П. Шелест, О возможности учета трехчастичных сил в релятивистской задаче рассеяния трех тел,

Докл. АН СССР, 1966, том 167, номер 4, 799–802

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 529.121.72 *ФИЗИКА*

В. П. ШЕЛЕСТ

О ВОЗМОЖНОСТИ УЧЕТА ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СИЛ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 29 VI 1965)

1°. В настоящее время общепризнано удобство использования интегральных уравнений Л. Д. Фаддеева ([1]) для изучения нерелятивистской задачи рассеяния трех тел. Достоинства этих уравнений сохраняются и в случае применения релятивистского обобщения, полученного Д. Стояновым и А. Н.Тавхелидзе ([2], [3]). В работе ([4]) с помощью этого релятивистского обобщения был указан метод получения матричных элементов амплитуд трехчастичных процессов; именно, было указано, что эти матричные элементы имеют вид

$$T_{ij} = \overset{+}{\chi}{}^0_{(i)} M_{ij} \chi^0_{(j)}, \tag{1}$$

где операторы перехода M_{ij} удовлетворяют уравнениям

$$M_{ij} = \sum_{\alpha \neq i} K_\alpha + \sum_{\beta \neq j} M_{i\beta} g_\beta K_\beta. \tag{2}$$

Здесь g_i — двухчастичная функция Грина

$$g_i = g_0 + g_0 K_i g_i, \tag{3}$$

K_α — парные ядра Бете — Солпитера, g_0 — свободная функция Грина, $\chi^0_{(i)}$ — решения двухчастичных уравнений Бете — Солпитера для i-й двухчастичной подсистемы.

Операторы перехода M_{ij} могут быть также определены соотношениями ([4])

$$g_i M_{ij} g_j = g_i (K_\text{п} - K_i) g_\text{п} = g_\text{п} (K_\text{п} - K_i) g_i, \tag{4}$$

где $g_\text{п}$ — полная трехчастичная функция Грина (для случая парного взаимодействия)

$$g_\text{п} = g_i + g_i (K_\text{п} - K_i) g_\text{п}, \tag{5}$$

$$K_\text{п} = \sum_\alpha K_\alpha. \tag{6}$$

Из соотношения (4) видно, что

$$g_i M_{ij} g_j = g_i M_{ik} g_k. \tag{7}$$

Используя (7), имеем вместо (2)

$$M_{ij} = (K_\text{п} - K_i) + M_{ij} g_j (K_\text{п} - K_j). \tag{8}$$

2°. Мы будем различать два типа возможных состояний двухчастичной системы — состояния рассеяния и связанные состояния. В произвольной системе координат полная энергия E_i состояний рассеяния равняется $\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2} + \sqrt{\mathbf{p}_k^2 + m_k^2}$, в то время как энергия связанного состояния $E_i^n = \sqrt{(\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_k)^2 + \mu_n^{i2}}$, где $\mu_n{}^i$ — масса связанного состояния. Поскольку выполняется неравенство $\mu_n{}^i < m_j + m_k$, то очевидно, что для одинаковых импульсов, входящих в выражения для E_i и $E_i{}^n$, имеем $E_i{}^n < E_i$. Пользуясь этим обстоятельством, можно получить следующее выражение для двухчастичной функции Грина ([5]) * (в координатах Якоби)

$$\hat{g}(P_i x_i y_i) = P(E_i^n) \int f_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i) \hat{g}_0 (P_i \bar{p}_i) \overset{+}{\varphi}_{P_i \bar{p}_i}(\bar{y}_i) d\bar{p}_i + \\ + \sum_n \omega^n_{P_i}(\bar{x}_i) \overset{+n}{\omega}_{P_i}(\bar{y}_i) \delta(P_i^2 - \mu_n^{i2}) \theta(P_{i0}). \quad (9)$$

Здесь $P(E_i{}^n)$ означает, что интеграл берется в смысле главного значения во всех точках, отвечающих энергиям связанных состояний; ω^n удовлетворяет уравнению Бете — Солпитера для волновой функции связанного состояния

$$\omega^n_{P_i}(\bar{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int \hat{g}_0 (P_i \bar{x}_i \bar{u}_i) \hat{K}_i (P_i \bar{u}_i \bar{v}_i) \omega^n_{P_i}(\bar{v}_i) d\bar{u}_i d\bar{v}_i; \quad (10)$$

$\overset{+}{\omega}{}^n$ удовлетворяет соответствующему сопряженному уравнению; f является волновой функцией Бете — Солпитера, описывающей рассеяние двух частиц, и удовлетворяет уравнению

$$f_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i) = \varphi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i) + \frac{1}{(2\pi)^8} \int \hat{g}_0 (P_i \bar{x}_i \bar{u}_i) \hat{K}_i (P_i \bar{u}_i \bar{v}_i) f_{P_i \bar{p}_i}(\bar{v}_i) d\bar{u}_i d\bar{v}_i, \quad (11)$$

$$\varphi_{P_i \bar{p}_i}(\bar{x}_i) = \exp[-i\bar{P}_i \bar{x}_i]. \quad (12)$$

Вводя обозначения

$$\chi^{000}_{P\tilde{p}_i \bar{p}_i}(X\tilde{x}_i \bar{x}_i) = \exp[-iPX - i\tilde{p}_i \tilde{x}_i] \varphi_{\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}_i, \bar{p}_i}(\bar{x}_i); \quad (13)$$

$$\chi^{00}_{P\tilde{p}_i \bar{p}_i}(X\tilde{x}_i \bar{x}_i) = \exp[-iPX - i\tilde{p}_i \tilde{x}_i] f_{\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}_i, \bar{p}_i}(\bar{x}_i); \quad (14)$$

$$\chi^{0n}_{P\tilde{p}_i}(X\tilde{x}_i \bar{x}_i) = \exp[-iPX - i\tilde{p}_i \tilde{x}_i] \omega^n_{\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}_i}(\bar{x}_i); \quad (15)$$

$$M_i = m_j + m_k, \quad M = m_i + m_j + m_k, \quad (16)$$

умножая (8) справа и слева на соответствующие χ и интегрируя по промежуточным переменным, получим, в соответствии с (1) и (9), системы уравнений:

$$T^{nm}_{ii}(P\tilde{p}_i \tilde{p}'_i) = \langle K_п - K_i \rangle^{nm}_{ii} (P\tilde{p}_i \tilde{p}'_i) + \frac{P}{(2\pi)^{12} i} \int T^{n0}_{i0}(P\tilde{p}_i \tilde{p}''_i \bar{p}''_i) \times \\ \times S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right) \hat{g}_0 \left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i, \bar{p}''_i\right) \langle K_п - K_i \rangle^{00,m}_{ii} (P\tilde{p}''_i \tilde{p}'_i \bar{p}''_i) d\tilde{p}''_i d\bar{p}''_i + \\ + \frac{\sum_{n'}}{(2\pi)^{12} i} \int T^{nn'}_{ii}(P\tilde{p}_i \tilde{p}''_i) S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right) \delta\left[\left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i\right)^2 - \mu_n^{i2}\right] \times \\ \times \theta\left(\frac{M_i}{M}P_0 + \tilde{p}''_{i0}\right) \langle K_п - K_i \rangle^{n'm}_{ii} (P\tilde{p}''_i \tilde{p}'_i) d\tilde{p}''_i; \quad (17а)$$

$$T^{n0}_{i0}(P\tilde{p}_i \tilde{p}'_i \bar{p}'_i) = \langle K_п - K_i \rangle^{n0}_{ii} (P\tilde{p}_i \tilde{p}'_i \bar{p}'_i) + \frac{1}{(2\pi)^{12} i} P \int T^{n0}_{i0}(P\tilde{p}_i \tilde{p}''_i \bar{p}''_i) \times \\ \times S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right) \hat{g}_0 \left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i, \bar{p}''_i\right) \langle K_n - K_i \rangle^{00,0}_{ii} (P\tilde{p}''_i \tilde{p}'_i \bar{p}''_i \bar{p}'_i) d\tilde{p}''_i d\bar{p}''_i + \\ + \frac{\sum_{n'}}{(2\pi)^{12} i} \int T^{nn'}_{ii}(P\tilde{p}_i \tilde{p}''_i) S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right) \delta\left[\left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i\right)^2 - \mu_n^{i2}\right] \theta\left(\frac{M_i}{M}P_0 + \tilde{p}''_{i0}\right) \times \\ \times \langle K_п - K_i \rangle^{n'0}_{ii} (P\tilde{p}''_i \tilde{p}'_i \bar{p}'_i) d\tilde{p}''_i; \quad (17б)$$

* Значок $\wedge$ указывает, что величина является двухчастичной.

$$T_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}'_i) = \langle K_{\text{п}} - K_i\rangle_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}'_i) +$$
$$+ \frac{P}{(2\pi)^{12} i}\int \langle K_{\text{п}} - K_i\rangle_{ii}^{n,\,00}(P\tilde{p}_i\tilde{p}''_i\bar{p}''_i)\, S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right) \times$$
$$\times\, \hat{g}_0\left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i,\ \bar{p}''_i\right) T_{ii}^{0m}(P\tilde{p}''_i\tilde{p}'_i\bar{p}''_i)\, d\tilde{p}''_i\, d\bar{p}''_i + \frac{\sum\limits_{n'}}{(2\pi)^{12} i}\int \langle K_{\text{п}} - K_i\rangle_{ii}^{nn'}(P\tilde{p}_i\tilde{p}''_i)\times$$
$$\times\, S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right)\delta\left[\left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i\right)^2 - \mu_{n'}^{i2}\right]\theta\left(\frac{M_i}{M}P_0 + \tilde{p}''_{i0}\right) T_{ii}^{n'm}(P\tilde{p}''_i\tilde{p}'_i)\, d\tilde{p}''_i; \tag{18а}$$

$$T_{0i}^{0m}(P\tilde{p}_i\tilde{p}'_i\bar{p}_i) = \langle K_{\text{п}} - K_i\rangle_{ii}^{0m}(P\tilde{p}_i\tilde{p}'_i\bar{p}_i) +$$
$$+ \frac{P}{(2\pi)^{12} i}\int \langle K_{\text{п}} - K_i\rangle_{ii}^{0,00}(P\tilde{p}_i\tilde{p}'_i\bar{p}''_i)\, S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right)\times$$
$$\times\, \hat{g}_0\left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i,\ \bar{p}''_i\right) T_{0i}^{0m}(P\tilde{p}''_i\tilde{p}'_i\bar{p}''_i)\, d\tilde{p}''_i\, d\bar{p}''_i + \frac{\sum\limits_{n'}}{(2\pi)^{12} i}\int \langle K_{\text{п}} - K_i\rangle_{ii}^{0n'}(P\tilde{p}_i\tilde{p}''_i\bar{p}'_i)\times$$
$$\times\, S_i\left(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}''_i\right)\delta\left[\left(\frac{M_i}{M}P + \tilde{p}''_i\right)^2 - \mu_{n'}^{i2}\right]\theta\left(\frac{M_i}{M}P_0 + \tilde{p}''_{i0}\right) T_{ii}^{n'm}(P\tilde{p}''_i\tilde{p}'_i)\, d\tilde{p}''_i\,. \tag{18б}$$

В формулах (17)—(18) функция S_i — одночастичная функция Грина, а $\langle K_{\text{п}} - K_i\rangle_{ii}^{0m}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i'\bar{p}_i')$ и т. д. означают $\langle K_{\text{п}} - K_i\rangle$, проинтегрированные с соответствующими функциями χ ([5]).

Таким образом, мы получили две системы уравнений: систему (17), связывающую амплитуды рассеяния на связанном состоянии (без его распада, но с возможным переходом в другое энергетическое состояние внутри той же двухчастичной подсистемы) T_{ii}^{nm} и амплитуды рассеяния трех несвязанных частиц с образованием двухчастичных связанных состояний T'^{n0}_{i0}, и систему (18), связывающую те же амплитуды рассеяния на связанном состоянии T_{ii}^{nm} и амплитуды рассеяния на связанном состоянии с его распадом T_{0i}^{0m}.

3°. Все предыдущее рассмотрение относилось к случаю парного взаимодействия. В то же время учет трехчастичных сил может оказаться существенным для некоторых задач с участием трех частиц ([6]). Поэтому мы учтем трехчастичные силы, считая, что ядро трехчастичного уравнения Бете — Солпитера теперь имеет вид

$$K = \sum_{\alpha} K_{\alpha} + K_T = K_{\text{п}} + K_T. \tag{19}$$

Введем новые операторы перехода W_{ik}, определив их уравнениями

$$W_{ik} = (K_{\text{п}} - K_i + K_T) + W_{ij}g_j(K_{\text{п}} - K_k + K_T). \tag{20}$$

Представляя W_{ik} в виде

$$W_{ik} = M_{ik} + A_{ik}, \tag{21}$$

получим

$$A_{ik} = K_T + M_{ij}g_jK_T + A_{ij}g_j(K_{\text{п}} - K_k + K_T). \tag{22}$$

Отсюда имеем, используя (4) и (5):

$$g_iA_{ik}g_k = g_{\text{п}}K_Tg_{\text{п}} + g_iA_{ik}g_kK_Tg_{\text{п}}. \tag{23}$$

Полагая $g_iA_{ik}g_k = g_{\text{п}}Tg_{\text{п}}$, находим уравнение для T

$$T = K_T + Tg_{\text{п}}K_T = K_T + Tg_iK_T + Tg_iM_{ik}g_kK_T. \tag{24}$$

Снова используя уравнения (4) и (5), получим из (21)

$$W_{ik} = M_{ik} + T + Tg_kM_{kk} + M_{ij}g_jT + M_{ij}g_jTg_kM_{kk}. \tag{25}$$

4°. Теперь, применяя технику, аналогичную описанной в 2°, можно получить выражения для матричных элементов операторов перехода с учетом трехчастичных сил, считая, что нам известны матричные элементы операторов перехода без учета трехчастичных сил M_{ik} (которые можно получить из уравнений (17)—(18)) и матричные элементы амплитуды T (которые следует брать из (24)). Ввиду недостатка места эти соотношения здесь не приведены.

Однако можно воспользоваться приближением сильной связи внутри двухчастичного связанного состояния ([7]). Тогда вместо (25) и (24) получим соответственно

$$\mathcal{T}_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i') = \langle K_T\rangle_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i') + \frac{\sum_{n'}}{(2\pi)^{13}}\int \frac{d\tilde{p}_i''\,\mathcal{T}_{ii}^{nn'}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i'')\,S_i\left(\frac{m_i}{M}P-\tilde{p}_i''\right)}{\frac{M_i}{M}P_0+\tilde{p}_{i0}''-\sqrt{\left(\frac{M_i}{M}\mathbf{P}+\tilde{\mathbf{p}}_i''\right)^2+\mu_{n'}^{i^2}+i\varepsilon}} \times$$

$$\times\left\{\langle K_T\rangle_{ii}^{n'm}(P\tilde{p}_i''\tilde{p}_i') + \sum_{r''}\int\frac{d\tilde{p}_i'''\,T_{ii}^{n'n''}(P\tilde{p}_i''\tilde{p}_i''')\,S_i\left(\frac{m_i}{M}P-\tilde{p}_i'''\right)\langle K_T\rangle_{ii}^{n''m}(P\tilde{p}_i'''\tilde{p}_i')}{\frac{M_i}{M}P_0+\tilde{p}_{i0}'''-\sqrt{\left(\frac{M_i}{M}\mathbf{P}+\tilde{\mathbf{p}}_i'''\right)^2+\mu_{n''}^{i^2}+i\varepsilon}}\right\}; \quad (26)$$

$$\overset{*}{T}{}_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i') = T_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i') + \mathcal{T}_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i') +$$

$$+\sum_{n'}\int\frac{d\tilde{p}_i''S_i\left(\frac{m_i}{M}P-\tilde{p}_i''\right)}{\frac{M_i}{M}P_0+\tilde{p}_{i0}''-\sqrt{\left(\frac{M_i}{M}\mathbf{P}+\tilde{\mathbf{p}}_i''\right)^2+\mu_n^{i^2}+i\varepsilon}}\times$$

$$\times\left\{\mathcal{T}_{ii}^{nn'}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i'')\,T_{ii}^{n'm}(P\tilde{p}_i''\tilde{p}_i') + T_{ii}^{nn'}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i'')\,\mathcal{T}_{ii}^{n'm}(P\tilde{p}_i''\tilde{p}_i') +\right.$$

$$\left.+\sum_{n''}\int\frac{T_{ii}^{nn'}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i'')\,\mathcal{T}_{ii}^{n'n''}(P\tilde{p}_i''\tilde{p}_i''')\,S_i\left(\frac{M_i}{M}P-\tilde{p}_i'''\right)T_{ii}^{n''m}(P\tilde{p}_i'''\tilde{p}_i')\,d\tilde{p}_i'''}{\frac{M_i}{M}P_0+\tilde{p}_{i0}'''-\sqrt{\left(\frac{M_i}{M}\mathbf{P}+\tilde{\mathbf{p}}_i'''\right)^2+\mu_{n''}^{i^2}+i\varepsilon}}\right\}; \quad (27)$$

где

$$\mathcal{T}_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i') =$$

$$=\int\chi_{P\tilde{p}_i}^{0n}(X\tilde{x}_i\bar{x}_i)\,T(X-Y,\,\tilde{x}_i\bar{x}_i\tilde{y}_i\bar{y}_i)\,\overset{+}{\chi}{}_{P\tilde{p}_i'}^{0m}(Y\tilde{y}_i\bar{y}_i)\,dX\,dY\,d\bar{x}_id\bar{y}_id\tilde{x}_id\tilde{y}_i; \quad (28)$$

$$\overset{*}{T}{}_{ii}^{nm}(P\tilde{p}_i\tilde{p}_i') =$$

$$=\int\chi_{P\tilde{p}_i}^{0n}(X\tilde{x}_i\bar{x}_i)\,W_{ii}(X-Y,\,\tilde{x}_i\bar{x}_i\tilde{y}_i\bar{y}_i)\,\overset{+}{\chi}{}_{P\tilde{p}_i'}^{0m}(Y\tilde{y}_i\bar{y}_i)\,dX\,dY\,d\bar{x}_id\bar{y}_id\tilde{x}_id\tilde{y}_i. \quad (29)$$

В заключение автор выражает благодарность акад. Н. Н. Боголюбову, Д. Стоянову и А. Н. Тавхелидзе за ценные обсуждения.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступило
29 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ, 39, 1459 (1960). [2] Д. Стоянов, Препринт Объединен. инст. ядерн. исслед., Дубна, Р-1777, 1964. [3] D. Stoyanov, A. N. Tavkhelidze, Phys. Lett., 13, 76 (1964). [4] V. P. Shelest, D. Stoyanov, Phys. Lett., 13, 253 (1964). [5] Д. Стоянов, В. П. Шелест, Препринт Объединен. инст. ядерн. исслед., Дубна, Р-2066, 1965. [6] R. Sawyer, Preprint, Cambridge, Mass., 1965. [7] D. Stoyanov, V. P. Shelest, Preprint, Dubna, E-2108, 1965.