С. И. Адян, О простоте периодических произведений групп, *Докл. АН СССР*, 1978, том 241, номер 4, 745–748

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 241, № 4

МАТЕМАТИКА

С. И. АДЯН

О ПРОСТОТЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 11 IV 1978)

В работе ([1]) была определена операция периодического произведения данного нечетного показателя для групп, не содержащих инволюции*. Там же были установлены некоторые свойства периодических произведений групп, не содержащих инволюций.

В настоящей работе получен критерий простоты периодических произведений групп без инволюций. Этот критерий показывает, что операция периодического произведения групп дает широкие возможности для построения новых бесконечных простых групп. В частности, доказывается, что в многообразии периодических групп достаточно большой нечетной составной экспоненты имеется бесконечное число попарно неизоморфных конечно-порожденных неабелевых простых групп, если эта экспонента не есть степень простого числа.

Теорема 1 (критерий простоты). *Пусть даны нечетное число $n \geqslant 665$ и некоторое семейство групп без элементов порядка 2*

$$\{G_i\}_{i \in I}. \tag{1}$$

Для того чтобы периодическое произведение показателя n семейства групп (1)

$$F \rightleftharpoons \prod_{i \in I} {}^n G_i \tag{2}$$

было простой группой, необходимо и достаточно, чтобы каждая группа G_i превращалась в единичную группу после добавления к ней тождественного соотношения $x^n=1$; иначе говоря, чтобы каждая группа G_i совпадала со своей подгруппой, порожденной всеми n-ми степенями.

Доказательство. Допустим, что группа (2) простая. Согласно определению периодических произведений (см. ([1]), стр. 8), эта группа F получена из свободного произведения тех же групп семейства (1) $\prod_{i \in I}^* G_i$ добавлением определяющих соотношений вида

$$A^n = 1 \tag{3}$$

для всех элементарных периодов в смысле работы ([1]). Рассмотрим произвольную группу G_j из семейства (1). Через F_j обозначим фактор-группу группы F по нормальному делителю, порожденному множеством $\bigcup_{i \neq j} G_i$. Пусть $i \neq j$. Рассмотрим произвольные элементы $a \in G_j$ и $b \in G_i$, не равные единице в соответствующей группе. Слово ab есть элементарный период ранга 1. Следовательно, $(ab)^n=1$ в F. Так как $b=1$ в F_j, то имеем $a^n=1$ в F_j. С другой стороны, если к свободному произведению $\prod_{i \in I}^* G_i$ добавить со-

* Т. е. элементов порядка 2. К сожалению, в ([1]) не было отмечено, что в ней всюду группы G_i следует предполагать не содержащими инволюций. Необходимость такого ограничения для применения теории, развитой в ([2]), очевидным образом вытекает, например, из леммы IV.2.36 (см. ([2]), стр. 203). Автор признателен В. П. Шункову, указавшему эту неточность.

отношения $a^n=1$ для всех $a\in G_j$ и соотношения $b=1$ для любого $b\in G_i$ при всех отличных от j значениях $i\in I$, то в полученной группе F' будут выполнены соотношения (3) для всех элементарных периодов A. Следовательно, F_j совпадает с группой F', которая, в свою очередь, есть результат добавления к группе G_j тождества $x^n=1$. Но так как по условию группа F простая, то ее истинная фактор-группа F_j есть единичная группа. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что каждая группа G_i превращается в единичную после добавления к ней тождества $x^n=1$. Пусть N_E есть нормальный делитель, порожденный в F данным элементом E, где $E\neq 1$ в F. Согласно лемме 4 из ([1]) слово E сопряжено в F некоторому слову A^r, где либо $A\in G_i$ при некотором $i\in I$ и тогда $r=1$, либо A есть элементарный период некоторого ранга $\geqslant 1$ и тогда $1\leqslant r\leqslant (n+1)/2+46$.

Сначала докажем, что если в N_E входит некоторый элемент A группы G_j, то $N_E=F$. Пусть $A\in N_E$ и $A\in G_j$. Рассмотрим произвольный элемент $B\in G_j$, где $i\neq j$. Так как AB — элементарный период ранга 1, то из $A\in N_E$ и $(AB)^n=1$ в F следует $B^n\in N_E$. Следовательно, N_E содержит n-е степени всех элементов групп G_i при $i\neq j$. Согласно нашему условию, это означает, что N_E содержит все подгруппы G_i при $i\neq j$. Далее, из $B\in N_E$ при $B\in G_i$, поменяв ролями i и j, получим, что G_j также содержится в N_E. Следовательно, $N_E=F$.

Так как по условию теоремы в группах G_i тождество $x^n=1$ не выполнено, то найдется такой элемент $d\in G_1$, что $d^n\neq 1$ в G_1.

Нам осталось рассмотреть случай, когда E сопряжено в F слову A^r, где $1\leqslant r\leqslant (n+1)/2+46$ и A есть элементарный период некоторого ранга $\alpha\geqslant 1$. Из $E\in N_E$ следует $A^{kr}\in N_E$ при любом $k>0$. Следовательно, $A^t\in N_E$ при некотором t, где $n/3\leqslant t\leqslant 2n/3$. Так как слово A найдено согласно лемме 4 работы ([1]), то A^q входит в некоторое слово из класса $\overline{M}_{\alpha-1}$. Тогда в силу II.6.13 и IV.1.21 ([2]) имеем $A^t\in L_{\alpha-1}$, откуда в силу IV.1.22 следует $[d^{-1}, A^t]_0\in R_{\alpha-1}$. Пусть $A\overset{\circ}{=}aA'$, где a — первая буква слова A. Тогда имеем

$$[d^{-1}, A^t]_0\overset{\circ}{=}[d^{-1}, a]_0 A'A^{t-1},$$

где слово $[d^{-1}, a]_0$ имеет длину 2, если d и a принадлежат разным группам G_i; длину 1, если $d, a\in G_i$ и $d\neq a$ в G_i, и длину 0, если $a=d$ в G_i. Обозначим $D\rightleftharpoons[d^{-1}, a]A'A^{t-1}$. Из $D\in R_{\alpha-1}$ в силу II.6.7 и IV.1.19 следует $D\in R_\alpha$, откуда в силу II.2.12 получаем $D\in A_{\alpha+1}$. В силу той же леммы 4 из ([1]) должен иметь место один из следующих двух случаев:

1) $D=SYS^{-1}$ при некотором $S\in A_{\alpha+3}$, где Y — элемент одной из подгрупп G_i.

2) Слово D сопряжено некоторой степени C^s некоторого элементарного периода C ранга $\delta\geqslant 1$.

Докажем, что случай 1) невозможен. Допустим, что $D=SYS^{-1}$, где $S\in A_{\alpha+3}$ и $Y\in G_i$, т. е. Y есть просто буква. Очевидно, можно считать, что $SYS^{-1}\in R_0$ и $S\in A_{\alpha+3}\cap L_{\alpha+3}$. Допустим, что при некотором $\delta>0$ $SYS^{-1}\notin K_\delta$. Пусть δ минимальное из таких чисел. Тогда в силу IV.1.19 найдется некоторое вхождение

$$V\in \text{Норм}(\delta, SYS^{-1}, n-217).$$

В силу II.5.21 в одном из вхождений $*S*YS^{-1}$ и $SY*S^{-1}*$ содержится менее 9 участков вхождения V. Тогда в силу II.5.2 в одном из этих вхождений содержится не менее $n-217-14$ участков вхождения V, а это в силу IV.1.18 противоречит условию $S\in L_\delta$, следовательно,

$$SYS^{-1}\in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Тогда из $D=SYS^{-1}$ в силу VI.2.6 следует, что $D\overset{\gamma}{\sim}SYS^{-1}$ при некотором $\gamma\geqslant 0$. Так как $t\geqslant n/3$, то слово $bA'A^{t-1}$ имеет одно активное ядро ранга α, которое в силу IV.1.7 содержит не менее $n/3-44$ и не более $2n/3$ участков. Тогда в силу IV.2.11 и IV.2.12 слово SYS^{-1} также должно иметь одно ядро W ранга α, содержащее не менее $n/3-86$ участков. Но в силу II.5.21 и II.5.2 такое ядро почти целиком содержится либо в $*S*YS^{-1}$ либо в $SY*S^{-1}*$. В таком случае в силу III.3.24 и IV.1.5 слово SYS^{-1} должно иметь еще одно активное ядро ранга α, откуда в силу IV.2.17 следует, что и D имеет два активных ядра ранга α. Получили противоречие; следовательно, случай 1) невозможен.

Случай 2). Из элементарности периода C следует $C^n=1$ в F, откуда получаем

$$(d^{-1}A^t)^n=D^n=TC^{ns}T^{-1}=1 \text{ в } F.$$

Тогда в силу условия $A^t \in N_E$ имеем

$$d^{-1}A^t d d^{-2} A^t d^2 \cdots d^{-n} A^t d^n = (d^{-1}A^t)^n d^n \in N_E.$$

Следовательно, $d^n \in N_E$. Так как по условию $d^n \neq 1$ в G_1, то в силу доказанного выше отсюда следует $N_E=F$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 непосредственно получаем

Следствие 1. *Пусть даны нечетное число $n \geqslant 665$ и семейство групп* (1) *без элементов порядка* 2. *Если в каждой группе G_i можно указать систему образующих элементов, каждый из которых имеет взаимно простой с числом n порядок, то периодическое произведение показателя n этого семейства групп есть простая группа.*

Теорема 2. *В многообразии всех периодических групп данной нечетной экспоненты вида nk, где $n \geqslant 665$, $k>1$ и числа n и k взаимно просты, можно указать бесконечное множество различных конечно-порожденных неабелевых простых групп.*

Доказательство. Искомыми группами являются периодические произведения показателя n

$$H_r \rightleftharpoons \prod_{i=1}^{r}{}^{n} G_i,$$

где $r \geqslant 2$ и все G_i суть копии циклической группы порядка k. В силу следствия 1 все группы H_r при $r \geqslant 2$ простые. В силу теоремы 2 работы ([1]) в них выполнено тождество $x^{nk}=1$.

Так как по условию числа n и k взаимно просты, то согласно теореме 2 работы ([1]) всякий элемент порядка k группы H_r сопряжен какому-то элементу одной из подгрупп G_i. Это означает, что в H_r имеется не более чем r различных классов сопряженных циклических подгрупп порядка k.

Допустим, что две подгруппы G_i и G_j при $i \neq j$ сопряжены в H_r. Тогда при некоторых $a \in G_i$, $b \in G_j$ и $T \in A_\alpha$ имеем $a=TbT^{-1}$ в H_r. Очевидно, можно считать, что $T \in M_\alpha$. Сделав возможные сокращения, мы получим $a= =T_1bT_1^{-1}$, где T_1 есть начало T и $T_1bT_1^{-1} \in R_0$. Тогда $T_1 \in L_\alpha$. Легко убедиться, что тогда $T_1bT_1^{-1} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$, т. е. $T_1bT_1^{-1} \in A$. Это устанавливается точно так же, как было сделано выше для слова SYS^{-1}. Далее из $a=T_1bT_1^{-1}$ в H_r в силу VI.2.6 получим $a \overset{\gamma}{\sim} T_1bT_1^{-1}$ при некотором $\gamma \geqslant 0$, откуда в силу IV.2.16 следует $a \overset{\circ}{=} T_1bT_1^{-1}$, т. е. T_1 пусто, элементы a и b принадлежат одной компоненте G_i и $a=b$ в G_i. Получили противоречие. Следовательно, подгруппы G_i и G_j при $i \neq j$ не сопряжены в H_r. Таким образом, мы доказали, что группа H_r содержит ровно r различных классов сопряженных циклических подгрупп порядка k. Поэтому при $r \neq s$ группы H_r и H_s не изоморфны.

Теорема 2 дает положительный ответ на вопрос, поставленный в проблеме 23 монографии ([3]), стр. 221. Для сравнения отметим, что, как было показано в ([4]), если данное групповое тождество выполнено во всех группах некоторого бесконечного множества групп из числа известных в настоящее время конечных неабелевых простых групп, то оно тривиально, т. е. выполнено в свободной группе.

Спектром данной периодической группы G назовем множество целых чисел, составленное из всех порядков элементов группы G.

Теорема 3. *Для всякого множества M нечетных простых чисел, содержащего хотя бы одно число $p>665$, можно построить счетную периодическую простую группу H, спектр которого совпадает с M. Если M конечно, то H имеет ограниченную экспоненту.*

Доказательство. Пусть $p>665$ и $p\in M$. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ есть последовательность всех чисел из M, отличных от p, и G_i есть циклическая группа порядка p_i. В качестве искомой группы H возьмем периодическое произведение показателя p:

$$H \rightleftharpoons \prod_{p_i\in M}^{p} G_i.$$

В силу следствия 1 H — простая группа. В силу теоремы 2 работы ([1]) ее спектр совпадает с M и при конечном M она имеет ограниченную экспоненту.

Из теоремы 3 легко получаем

Следствие 2. *Существует континуум различных счетных периодических простых групп.*

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
4 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. И. Адян*, Тр. МИАН, т. 142 (1976). [2] *С. И. Адян*, Проблема Бернсайда и тождества в группах, «Наука», 1975. [3] *Х. Нейман*, Многообразия групп, М., «Мир», 1969. [4] *G. A. Jones*, J. Austr. Math. Soc., v. 17, № 2 (1974).